2017학년도 대학수학능력시험

수학영역 가형(홀수형) 정답 및 풀이

01. ⑤	02. ②	03. ⑤	04. ④	05. ③
06. ⑤	07. ①	08. ①	09. ②	10. ③
11. ④	12. ④	13. ③	14. ①	15. ④
16. ②	17. ②	18. ③	19. ①	20. ⑤
21. ④	22. 10	23. 6	24. 16	25. 7
26. 11	27. 32	28. 12	29. 19	
30. 216				

1. **출제의도** : 벡터의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{a}-\vec{b}=(1,3)-(5,-6)$

$=(-4,9)$

따라서 모든 성분의 합은

$-4+9=5$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 지수함수와 로그함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{6x}-1}{\ln(1+3x)}$

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{6x}-1}{6x}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\ln(1+3x)}$

$=2\times1\times1$

$=2$

정답 ②

3. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\,dx=[-2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=0-(-2)$

$=2$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 확률의 계산식에서 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(B)=1-P(B^C)$

$=1-\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{2}{3}$

또, $\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{1}{2}$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(B)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

이때, 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

즉, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}$

정답 ④

5. **출제의도** : 중복순열의 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

일의 자리 수는 5이어야 하므로

나머지 3자리에 들어갈 수 있는 수의 개수는 중복을 허락하므로 모두 5개씩이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_5\prod{}_3 = 5^3 = 125$$

정답 ③

6. **출제의도** : 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(0)=1$이므로

$g(1)=0$

또, $f'(x)=3x^2+1$이므로

$f'(0)=1$

따라서

$f(g(x))=x$에서

$f'(g(x))g'(x)=1$이므로

$$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}$$

$$=\frac{1}{f'(0)}=1$$

정답 ⑤

7. **출제의도** : 독립시행의 확률을 이용하여 확률은 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주사위를 한 번 던져서4의 눈이 나올 확률은

$\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3\times\frac{5^2}{6^3}$$

$$=\frac{25}{72}$$

정답 ①

8. **출제의도** : 좌표공간에서 선분의 외분점을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $\mathrm{A}(1,\ a,\ -6)$, $\mathrm{B}(-3,\ 2,\ b)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\times(-3)-2\times1}{3-2},\ \frac{3\times2-2\times a}{3-2},\ \frac{3\times b-2\times(-6)}{3-2}\right)$$

즉, $(-11,\ 6-2a,\ 3b+12)$

이 점이 x축 위에 있으므로

$6-2a=0,\ 3b+12=0$

에서 $a=3,\ b=-4$

따라서

$a+b=3+(-4)=-1$

정답 ①

9. **출제의도** : 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\ln\frac{x}{e}=\ln x-1$이므로

$$\int_1^e \ln\frac{x}{e}\,dx$$

$$=\int_1^e \ln x\,dx-\int_1^e dx$$

한편, $\int_1^e \ln x\,dx$에서

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\int_1^e \ln x\,dx=[x\ln x-x]_1^e$$
$$=e\ln e-e-0+1=1$$

따라서

$$\int_1^e \ln\frac{x}{e}\,dx$$
$$=\int_1^e \ln x\,dx-\int_1^e dx$$
$$=1-[x]_1^e$$
$$=1-(e-1)=2-e$$

정답 ②

10. **출제의도** : 좌표평면 위를 움직이는 점의 속력을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{dx}{dt}=1+\frac{2}{t^2},$$
$$\frac{dy}{dt}=2-\frac{1}{t^2}$$

이므로 시각 $t=1$에서 점 P의 속도는 $(3,\ 1)$

따라서 시각 $t=1$에서 점 P의 속력은

$$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

정답 ③

11. **출제의도** : 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $x=t\,(0\le t\le 1)$을 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=(\sqrt{t}+1)^2$$
$$=t+2\sqrt{t}+1$$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^1 S(t)\,dt$$
$$=\int_0^1 (t+2\sqrt{t}+1)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{3}t\sqrt{t}+t\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+1$$
$$=\frac{17}{6}$$

정답 ④

12. **출제의도** : 두 평면이 이루는 예각의 크기에 대한 코사인 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

평면 $2x+2y-z+5=0$의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_1}$라 하면

$$\overrightarrow{n_1}=(2,\ 2,\ -1)$$

xy평면의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$$\overrightarrow{n_2}=(0,\ 0,\ 1)$$

로 놓을 수 있다.

따라서

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$
$$=\frac{|2\times0+2\times0+(-1)\times1|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\ \sqrt{0^2+0^2+1}}$$

$=\frac{1}{3\times 1}$

$=\frac{1}{3}$

정답 ④

13. **출제의도** : 표본평균의 분포를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(0, \left(\frac{4}{3}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z=\frac{\overline{X}-0}{\frac{4}{3}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

또, 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(3, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z=\frac{\overline{Y}-3}{\frac{1}{2}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 1)=\mathrm{P}(\overline{Y}\leq a)$에서

$\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{1-0}{\frac{4}{3}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{a-3}{\frac{1}{2}}\right)$

$\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{3}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\leq 2(a-3))$

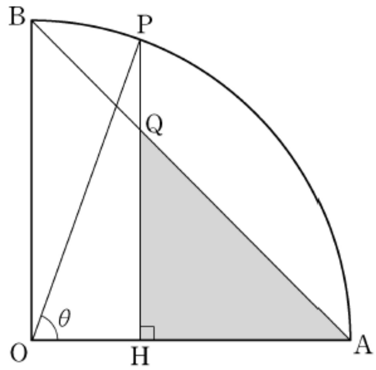
$\frac{3}{4}+2(a-3)=0$에서

$a=\frac{21}{8}$

정답 ③

14. **출제의도** : 삼각함수를 이용하여 도형의 넓이를 나타내고, 그 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{HA}}=1-\cos\theta$

직각삼각형 OAB에서

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이므로

$\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{OBA}$ …… ①

이때, $\overline{\mathrm{OB}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{PH}}$ 이므로

$\angle\mathrm{OBA}=\angle\mathrm{HQA}$ …… ②

①, ②에서

$\angle\mathrm{HAQ}=\angle\mathrm{HQA}$

즉, 직각삼각형 HAQ에서

$\overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{HQ}}$

따라서 삼각형 AQH의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\frac{(1-\cos\theta)^2}{2}$

이므로

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\theta^4}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{2(1+\cos\theta)^2}\times\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4$$
$$=\frac{1}{2(1+1)^2}\times 1^4$$
$$=\frac{1}{8}$$

정답 ①

15. **출제의도** : 접선의 방정식을 이용하여 주어진 도형의 넓이가 최대가 되는 t의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y'=-2e^{-x}$이므로

점 P에서의 접선의 방정식은

$y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$

$x=0$을 대입하면

$y=2(1+t)e^{-t}$

즉 $\mathrm{B}(0,\ 2(1+t)e^{-t})$

$\mathrm{A}(0,\ 2e^{-t})$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2te^{-t}$

삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times 2te^{-t}\times t$$
$$=t^2e^{-t}$$
$$S'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}$$
$$=t(2-t)e^{-t}$$

$S'(t)=0$에서 $t=2$

이때, $S(t)$는 $t=2$에서 극대이면서 최대이므로

구하는 t의 값은 2이다.

정답 ④

16. **출제의도** : 백터의 내적을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\overline{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$$
$$=|\vec{b}-\vec{a}|$$

이때,

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$$
$$=2-2\times 1+2$$
$$=2$$

이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=2$ …… ①

$$\overline{\mathrm{BC}}=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$$
$$=|\vec{c}-\vec{b}|$$

이때,

$$|\vec{c}-\vec{b}|^2=(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$$
$$=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$
$$=2-2\times 0+2$$
$$=4$$

이므로

$\overline{\mathrm{BC}}^2=4$ …… ②

$$\overline{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$$
$$=|\vec{c}-\vec{a}|$$

이때,

$$|\vec{c}-\vec{a}|^2=(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$$
$$=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$$
$$=2-2\times(-\sqrt{2})+2$$
$$=4+2\sqrt{2}$$

이므로

$\overline{\mathrm{AC}}^2=4+2\sqrt{2}$ …… ③

따라서 ①, ②, ③에서

$\overline{\mathrm{AB}}^2 < \overline{\mathrm{BC}}^2 < \overline{\mathrm{AC}}^2$이므로

$\overline{\mathrm{AB}} < \overline{\mathrm{BC}} < \overline{\mathrm{AC}}$

정답 ②

17. **출제의도** : 이산확률변수의 평균을 구하는 과정에서 빈칸을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

세 점 $(x+1, y)$, $(x, y+1)$, $(x+1, y+1)$로 이동하는 것을 각각 A, B, C로 나타내면

점 $(0, 0)$에서 점 $(4, 3)$까지 이동하는 횟수가 최소인 경우는

A, C, C, C를 일렬로 나열하는 경우이므로

$k = \boxed{4}$

이동하는 횟수가 6인 경우는

C, A, A, A, B, B를 일렬로 나열하는 경우이므로

$\dfrac{6!}{3! \times 2!} = 60$

에서 $\mathrm{P}(X=6) = \dfrac{1}{N} \times \boxed{60}$

이때, 확률의 총합이 1이므로

$\dfrac{4+30+60+35}{N} = 1$

에서 $N = \boxed{129}$

따라서

$a+b+c = 4+60+129 = 193$

정답 ②

18. **출제의도** : 정규분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$f(10) > f(20)$이므로

$m < 15$이어야 한다.

조건 (나)에서

$f(4) < f(22)$이므로

$m > 13$이어야 한다.

즉, $13 < m < 15$

이때, m이 자연수 이므로

$m = 14$

따라서

$\mathrm{P}(17 \le X \le 18)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{17-14}{5} \le Z \le \dfrac{18-14}{5}\right)$

$= \mathrm{P}(0.6 \le Z \le 0.8)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.8) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.6)$

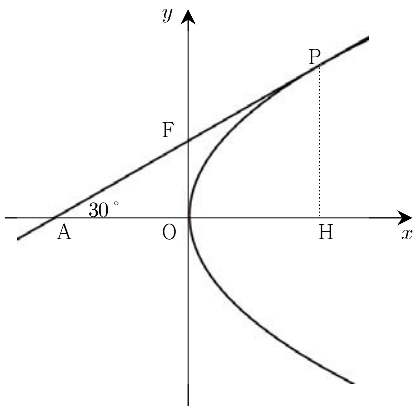
$= 0.288 - 0.226$

$= 0.062$

정답 ③

19. **출제의도** : 포물선의 접선을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선이 x축과 만나는 점의 좌표가 $(-x_1, 0)$이므로

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\mathrm{H}(k, 0)$이다.

$\angle \mathrm{PAH} = 30^\circ$ 이므로

$\overline{\mathrm{FO}} = \dfrac{k}{\sqrt{3}}$, $\overline{\mathrm{PH}} = \dfrac{2k}{\sqrt{3}}$

$\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{FP}} = \dfrac{2k}{\sqrt{3}}$

$\overline{\mathrm{PF'}} = \sqrt{k^2 + \left(\dfrac{3k}{\sqrt{3}}\right)^2} = 2k$이므로

타원의 장축의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = \dfrac{2k}{\sqrt{3}} + 2k$

$\dfrac{2k}{\sqrt{3}} + 2k = 4\sqrt{3} + 12$에서

$k = 6$

또, 점 $(6, 4\sqrt{3})$이 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점이므로

$(4\sqrt{3})^2 = 4p \times 6$

$48 = 24p$에서

$p = 2$

따라서

$k + p = 6 + 2 = 8$

정답 ①

20. 출제의도 : 정적분으로 정의된 함수에 대하여 평균값의 정리와 사잇값의 정리를 활용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $0 < x < \sqrt{\pi}$에서

$e^{-x} > 0$, $\sin(x^2) \geq 0$이고,

$\sin 0 = 0$, $\sin \pi = 0$이므로

$$f(\sqrt{\pi}) = e^{-\pi} \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)dt > 0 \text{ (참)}$$

ㄴ.

$$f'(x) = -e^{-x} \int_0^x \sin(t^2)dt + e^{-x}\sin(x^2)$$

$$f'(0) = -e^{-0} \int_0^0 \sin(t^2)dt + e^{-0}\sin(0^2)$$

$$= 0$$

$f'(\sqrt{\pi})$

$= -e^{-\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)dt + e^{-\sqrt{\pi}}\sin(\sqrt{\pi}^{\,2})$

$= -f(\sqrt{\pi}) < 0$

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$f(a) = \frac{f(\sqrt{\pi}) - f(0)}{\sqrt{\pi} - 0} > 0$$

를 만족시키는 a가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 적어도 하나 존재한다.

(참)

ㄷ. ㄴ을 만족시키는 $a\ (0 < a < \pi)$에 대하여 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고, $f'(a) > 0$, $f'(\sqrt{\pi}) < 0$이므로 사잇값의 정리에 의하여

$f'(b) = 0$

을 만족시키는 b가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 적어도 하나 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

21. 출제의도 : 함수의 그래프의 개형과 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y = f(x)$의 그래프가 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 x축과 만나는 점의 x좌표를 k라 하자.

곡선 $y=f(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$\int_0^1 f(x)\,dx=2$에서

$-S_1+S_2=2$ …… ㉠

$\int_0^1 |f(x)|\,dx=2\sqrt{2}$에서

$S_1+S_2=2\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$S_1=\sqrt{2}-1$, $S_2=\sqrt{2}+1$

(i) $0\le x\le k$인 경우

$F(x)=\int_0^x (-f(t))\,dt$이므로

$F'(x)=-f(x)$

$\int_0^k f(x)F(x)\,dx$에서

$F(x)=s$로 놓으면

$x=0$일 때 $s=0$,

$x=k$일 때 $s=\sqrt{2}-1$이고,

$F'(x)\dfrac{dx}{ds}=1$이므로

$$\int_0^k f(x)F(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}-1}(-s)\,ds$$

$$=\left[-\frac{1}{2}s^2\right]_0^{\sqrt{2}-1}$$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$$

(ii) $k\le x\le 1$인 경우

$F(x)=(\sqrt{2}-1)\int_k^x f(t)\,dt$이므로

$F'(x)=f(x)$

$\int_k^1 f(x)F(x)\,dx$에서

$F(x)=s$로 놓으면

$x=k$일 때 $s=\sqrt{2}-1$,

$x=1$일 때 $s=2\sqrt{2}$이고,

$F'(x)\dfrac{dx}{ds}=1$이므로

$$\int_k^1 f(x)F(x)\,dx$$

$$=\int_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}} s\,ds$$

$$=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}}$$

$$=4-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$$

(i), (ii)에서

$$\int_0^1 f(x)F(x)\,dx$$

$$=\int_0^k f(x)F(x)\,dx+\int_k^1 f(x)F(x)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2+4-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$$

$$=4-(\sqrt{2}-1)^2$$

$$=4-(3-2\sqrt{2})$$

$$=1+2\sqrt{2}$$

정답 ④

22. **출제의도** : 중복조합의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$

정답 10

23. **출제의도** : 지수부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$x-5 \leq -2$

에서 $x \leq 3$

따라서 모든 자연수 x의 값은 $1, 2, 3$이고, 그 합은

$1+2+3=6$

이다.

정답 6

24\. **출제의도** : 구의 중심에서 평면에 이르는 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구 $x^2+y^2+z^2+2y-3=0$에서

$x^2+(y+1)^2+z^2=4$

이므로 이 구의 중심은 $(0,\ -1,\ 0)$이고 반지름의 길이는 2이다.

평면 $x+8y-4z+k=0$이

구 $x^2+(y+1)^2+z^2=4$에 접하므로 구의 중심에서 평면 $x+8y-4z+k=0$에 이르는 거리는 구의 반지름의 길이와 같다.

이때, 구의 중심 $(0,\ -1,\ 0)$에서

평면 $x+8y-4z+k=0$에 이르는 거리는

$$\frac{|-8+k|}{\sqrt{1^2+8^2+(-4)^2}}=\frac{|-8+k|}{9}$$

이므로

$$\frac{|-8+k|}{9}=2 \text{ 에서}$$

$|-8+k|=18$

$-8+k=-18$ 또는 $-8+k=18$

$k=-10$ 또는 $k=26$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-10+26=16$

정답 16

25\. **출제의도** : 주어진 범위에서 삼각방정식의 근을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos^2 x-\sin x=1$

$(1-\sin^2 x)-\sin x=1$

$\sin^2 x+\sin x=0$

$\sin x(\sin x+1)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\sin x=-1$

$x=\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

따라서 모든 실근의 합이

$$\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi$$

이므로 $p+q=2+5=7$

정답 7

26\. **출제의도** : 확률의 정의를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

갑이 주머니 A에서 두 장의 카드를 꺼내고, 을이 주머니 B에서 두 장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}=36$$

갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같은 경우는 다음과 같다.

(i) 갑과 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 숫자가 모두 같을 때,

이때의 경우의 수는

$${}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

(ii) 갑이 1과 4가 적힌 카드를 꺼내고 을은 2와 3이 적힌 카드를 꺼내거나 갑이 2와 3이 적힌 카드를 꺼내고 을은 1과 4가 적힌 카드를 꺼낼 때,
이때의 경우의 수는
2
(i), (ii)에서 갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같을 확률은
$\frac{6+2}{36}=\frac{2}{9}$
따라서 $p=9$, $q=2$이므로
$p+q=9+2=11$

정답 11

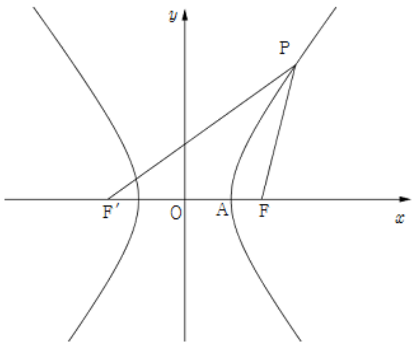
27. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 주건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
방정식 $a+b+c=7$을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$
이때, 조건 (나)를 만족시키지 않는 순서쌍 (a, b)는
$(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$
뿐이다.
따라서 구하는 순서쌍의 개수는
$36-4=32$

정답 32

28. **출제의도** : 쌍곡선의 성질을 이용하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



쌍곡선의 방정식을
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(단, $a>0$, $b>0$)
로 놓으면 점근선의 방정식은
$y=\pm\frac{b}{a}x$이므로
$\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$, $b=\frac{4}{3}a$
조건 (가)에서
$\overline{PF'}>\overline{PF}$
이고, 점 P가 쌍곡선 위의 점이므로
쌍곡선의 정의에 의하여
$\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$
이므로
$\overline{PF}=\overline{PF'}-2a=30-2a$
이때, $16 \le \overline{PF} \le 20$이므로
$16 \le 30-2a \le 20$
$5 \le a \le 7$ ...... ①
점 A의 좌표는 $(a,\ 0)$
쌍곡선의 정의에 의하여
$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\frac{16}{9}a^2}=\frac{5}{3}a$
이므로
점 F의 좌표는 $\left(\frac{5}{3}a,\ 0\right)$
$\overline{AF}=\frac{5}{3}a-a=\frac{2}{3}a$
조건 (나)에서

선분 AF의 길이가 자연수이므로

a는 3의 배수이어야 한다.

이때 ①에서

$a=6$

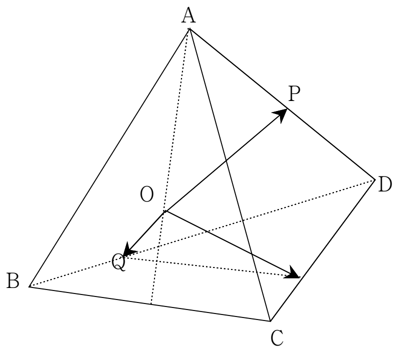
따라서 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는

$2a=12$

정답 12

29. **출제의도** : 벡터의 수직과 내적을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 벡터의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



점 Q는 삼각형 BCD의 경계를 포함한 내부의 점이고, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$을 만족시키는 점이다.

그런데 $|\overrightarrow{PQ}|$가 최대이려면 점 Q는 선분 DB 또는 선분 DC 위에 있어야 한다.

선분 DB 위의 점을 Q라 하자.

$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$라 하면

$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\vec{a}$이고,

$\overrightarrow{DQ}=k\vec{b}$ $(0<k<1)$이다.

또, $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=16$이고,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=8$이다.

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$

$=(\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DO})\cdot(\overrightarrow{DQ}-\overrightarrow{DO})$

$=\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)\cdot\left(k\vec{b}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)$

$=\left(\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\right)$

$\cdot\left\{-\frac{1}{3}\vec{a}+\left(k-\frac{1}{3}\right)\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\right\}$

$=-\frac{5}{6}k+\frac{2}{3}$

$-\frac{5}{6}k+\frac{2}{3}=0$에서 $k=\frac{4}{5}$

따라서 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은

$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|$

$=\left|\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{7}{15}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\right)\right.$

$\left.-\left(\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}\right)\right|$

$=\left|-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}\right|$

이때,

$\left|-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}\right|^2$

$=\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}\right)$

$=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2-\frac{4}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{16}{25}|\vec{b}|^2$

$=\frac{1}{4}\times16-\frac{4}{5}\times8+\frac{16}{25}\times16$

$=\frac{4\times49}{25}$

$=\left(\frac{14}{5}\right)^2$

이므로 구하는 최댓값은 $\frac{14}{5}$

즉 $p+q=5+14=19$

정답 19

30. 출제의도 : 미분법을 활용하여 극솟값의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\dfrac{g(x)}{x-a}(x>a)$에서

$f(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{\alpha-a}=M$

$f(\beta)=\dfrac{g(\beta)}{\beta-a}=M$

$f'(x)=\dfrac{g'(x)(x-a)-g(x)}{(x-a)^2}$에서

$f'(\alpha)=0$이므로

$g'(\alpha)(\alpha-a)-g(\alpha)=0$

$g'(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{\alpha-a}$

$f'(\beta)=0$이므로

$g'(\beta)(\beta-a)-g(\beta)=0$

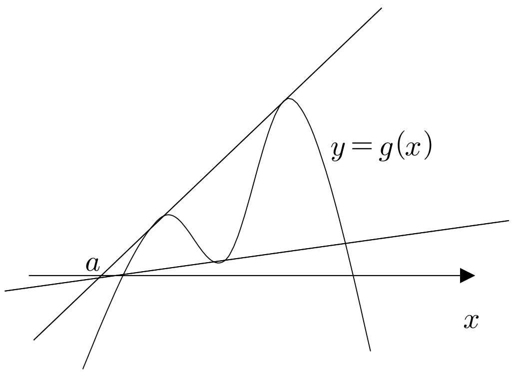
$g'(\beta)=\dfrac{g(\beta)}{\beta-a}$

이때, $g'(\alpha)$는 $x=\alpha$에서 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기이고,

$g'(\beta)$는 $x=\beta$에서 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기이다.

따라서 곡선 $y=g(x)$의 그래프는 다음 두 가지의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

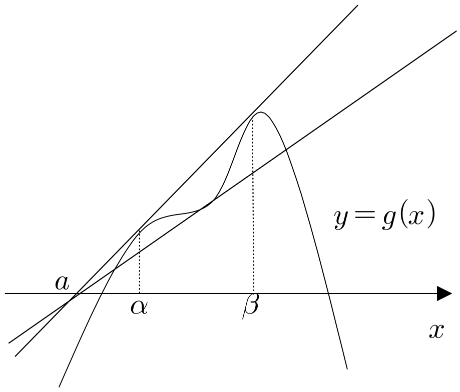
(i)



함수 $y=g(x)$의 그래프가 위의 그림과 같을 때, 함수 $y=g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 3개이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프도 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 3개이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii)



함수 $y=g(x)$의 그래프가 위의 그림과 같을 때, 함수 $y=g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 1개이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 3개이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서

함수 $y=g(x)$는 극값을 1개 갖는다.

$g(x)-kx=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$으로 놓으면

$g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+kx$

이므로

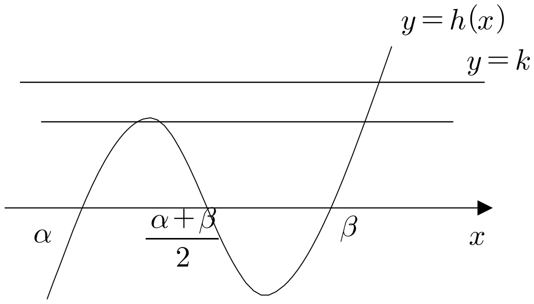
$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+k$

이때, $g'(x)=0$,

즉 $4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=k$

의 서로 다른 실근의 개수는 1 또는 2이어야 한다.

이때, $h(x)=4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$라 하면 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=k$는 한 점에서 만나거나 두 점에서 만나야 한다.



함수 $h(x)$의 극값은 $\beta=\alpha+6\sqrt{3}$이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=0$으로 놓은 후

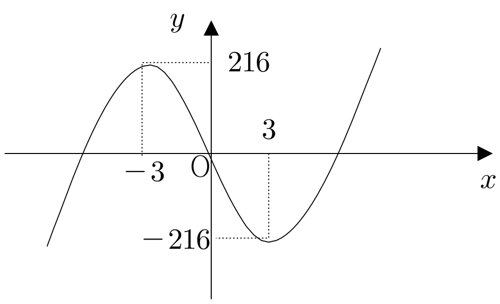
함수 $y=4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$의 극값을 구해도 된다.

이때, $y'=-12(x+3)(x-3)$이므로

$y'=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=3$

함수 $y=4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 k의 범위는

$k \leq -216$ 또는 $k \geq 216$

이때, $k>0$이므로 k의 최솟값은 216다.

따라서 M의 최솟값도 216이다.

정답 216