## 15회수학 가형 정답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ③ | 2 | ⑤ | 3 | ⑤ | 4 | ① | 5 | ② |
| 6 | ③ | 7 | ② | 8 | ① | 9 | ② | 10 | ④ |
| 11 | ① | 12 | ⑤ | 13 | ④ | 14 | ⑤ | 15 | ② |
| 16 | ⑤ | 17 | ⑤ | 18 | ④ | 19 | ② | 20 | ③ |
| 21 | ④ | 22 | 3 | 23 | 78 | 24 | 18 | 25 | 12 |
| 26 | 76 | 27 | 17 | 28 | 150 | 29 | 7 | 30 | 7 |

## 해 설

**1. 정답 ③**

**[출제의도] 이항분포의 분산을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$V(X)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=20$

$\therefore\ n=90$

2. [출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{(x+1)(\sqrt{2x+1}+1)}=1$

**3.정답 ⑤**

**[출제의도] 삼각함수의 배각공식을 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.**

$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ 이므로

$\tan\theta=t$라 하면

$\frac{2t}{1-t^2}=\frac{3}{4}$

$8t=3-3t^2$

$3t^2+8t-3=0$

$(3t-1)(t+3)=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=-3$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $t>0$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{1}{3}$

**4. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건부확률을 계산한다.**

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ 이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\frac{9}{16}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{16}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{9}{16}}=\frac{1}{9}$

**5. [출제의도] 정규분포의 확률을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.**

물고기 한 마리의 무게를 확률변수 $X$라 하면

$\mathrm{P}(X\ge830)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{830-800}{50}\right)=\mathrm{P}(Z\ge0.6)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le0.6)=0.5-0.2257=0.2743$

**6. 정답 ③**

$|\vec{a}-\vec{b}|=1$의

양변을 제곱하면 $|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$이므로 $1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=1$ $\therefore$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$

따라서, $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$이므로

$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}}{1\cdot1}=\frac{1}{2}\quad\therefore\theta=\frac{\pi}{3}(\because\ 0\le\theta\le\pi)$

7. [출제의도] 정적분의 성질을 이해하고 함숫값을 구한다.

$\int_0^0 f(t)dt=0$이므로 주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$\cos0+a\times0^2+a=0$

$\therefore\ a=-1$

$\int_0^x f(t)dt=\cos2x-x^2-1$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면 $f(x)=-2\sin2x-2x$

$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\pi-\pi=-\pi$

**8.정답 ①**

양 끝에 흰색이 놓이면, 가운데 5 개는 흰색 깃발 3 개, 파란색 깃발 5 개를 일렬로 나열하는 방법의 수가 된다.

$\therefore\ \frac{8!}{3!5!}=56$

**9. [출제의도] 좌표로 표시된 벡터의 크기의 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.**

삼각형 ABC의 무게중심 G는 $\mathrm{G}(4,5,6)$이다.

$\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{3}\right|=|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$이다.

이때, $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$의 값이 최소이려면 점 G에서 $xy$평면에 내린 수선의 발이 점 P일 때이므로 $\mathrm{P}(4,5,0)$일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$의 최솟값은 6이다.

**10.정답 ④**

$ABED$ 와 면 $ACFD$ 가 이루는 이면각의 크기를 $\theta$ 라 하면,

$\theta=\angle\mathrm{BAC}$ 이다. $\cos\theta=\frac{7^2+7^2-4^2}{2\cdot7\cdot7}=\frac{41}{49}$

따라서, 정사영의 넓이는

$\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AD}}\cdot\cos\theta=7\cdot14\cdot\frac{41}{49}=82$

**11. 정답 ① 이차곡선**

$\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{40}=1$이므로

ⅰ. 주축길이는 3

ⅱ. 초점$F$의 좌표 $\left(\frac{13}{2},0\right)$

$\left(\because\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+40}=\sqrt{\frac{169}{4}}=\frac{13}{2}\right)$

ⅲ 원의 반지름 5 $\left(\because\frac{13}{2}-\frac{3}{2}=5\right)$

$\overline{FQ}=5(\because r=5)$

$\overline{F'Q}=5+3=8$(∵쌍곡선의 정의)

$\triangle PQF$은 직각삼각형 ($\because\overleftrightarrow{PQ}$는 접선)

$\therefore\overline{PF}=\sqrt{12^2+5^2}=13$

$\therefore\overline{PF'}=13-3=10$

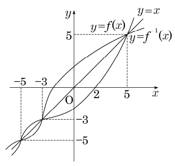
**12. 정답 ⑤**

$\tan\theta=-\sqrt{8}$ 이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{2}{3}$

**13. [출제의도] 분수부등식의 해를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.**




(ⅰ) $f(x)>0,\ f(x)\le f^{-1}(x)$에서 $2<x\le5$

(ⅱ) $f(x)<0,\ f(x)\ge f^{-1}(x)$에서 $-5\le x\le-3$

따라서 구하는 정수 $x$의 개수는 6이다.

14. [출제의도] 정적분의 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. $\int_0^1 f(x)dx=\left[e^x-x\right]_0^1=e-2$ (참)

ㄴ. $g(x)=f(x)-x$라 하자.

$x>0$에서 $g'(x)=e^x-1>0$이므로

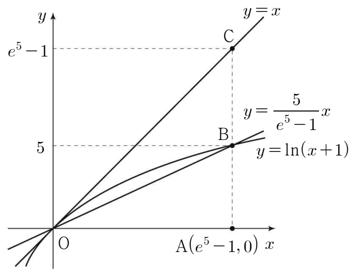
함수 $g(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 증가한다.

따라서 $g(0)=0$이므로 $x>0$에서 $f(x)>x$이다. (참)

ㄷ. $f^{-1}(x)=\ln(x+1)$이므로

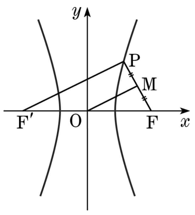
$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{5(e^5-1)}{2}<\int_0^{e^5-1}f^{-1}(x)dx$,

$\int_0^{e^5-1}f^{-1}(x)dx<\frac{(e^5-1)^2}{2}=\triangle\mathrm{OAC}$ (참)




따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

**15. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이해하고 선분의 길이를 구한다.**




쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ \ b>0)$이라 하면 점근선의 방정식이 $y=2x$, $y=-2x$이므로

$\frac{b}{a}=2,\ b=2a$

쌍곡선의 또 다른 초점을 점 F′이라 하면 삼각형 PF′F에서 점 O는 변 F′F의 중점이고 점 M은 변 PF의 중점이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=2\overline{\mathrm{OM}}=12$

$\overline{\mathrm{PF}}=2\overline{\mathrm{MF}}=6$

$|\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}|=12-6=6=2a$

$\therefore\ a=3,\ b=2a=6$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$

**16. 정답 ⑤**

ㄱ. $\mathrm{P}(E)=\frac{1}{2}$ 이므로

$I(E)=-\log_2\mathrm{P}(E)=-\log_2\frac{1}{2}=1$ (참)

ㄴ. 두 사건 $A, B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$

$\therefore\ I(A\cap B)=-\log_2\mathrm{P}(A\cap B)$

$=-\log_2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=-\{\log_2\mathrm{P}(A)+\log_2\mathrm{P}(B)\}$

$=-\log_2\mathrm{P}(A)-\log_2\mathrm{P}(B)$

$=I(A)+I(B)$ (참)

ㄷ. $2I(A\cup B)=-2\log_2\mathrm{P}(A\cup B)$

$=-\log_2\{\mathrm{P}(A\cup B)\}^2$

$I(A)+I(B)=-\log_2\mathrm{P}(A)-\log_2\mathrm{P}(B)$

$=-\log_2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cup B)\geq\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(A\cup B)\geq\mathrm{P}(B)>0$ 이므로

$\{\mathrm{P}(A\cup B)\}^2\geq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\therefore\ \log_2\{\mathrm{P}(A\cup B)\}^2\geq\log_2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$-\log_2\{\mathrm{P}(A\cup B)\}^2\leq-\log_2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\therefore\ 2I(A\cup B)\leq I(A)+I(B)$ (참)

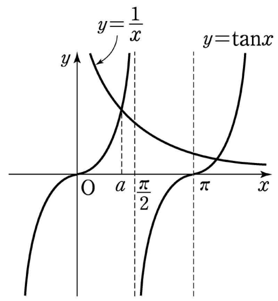
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

**17. 정답 ⑤**

ㄱ. $f(x)=2x\cos x$ 에서 $f'(x)=2\cos x-2x\sin x$

$f'(a)=2\cos a-2a\sin a=0$

$\therefore\ \tan a=\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\sin a}{a\sin a}=\frac{1}{a}$ (참)

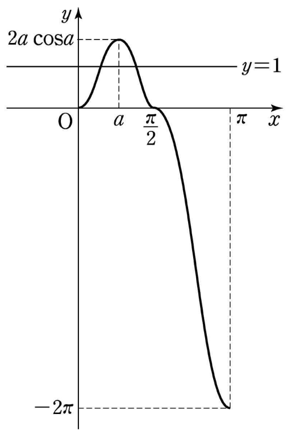



ㄴ. $f'(x)=2\cos x(1-x\tan x)=0$ 에서

$\cos x=0$ 또는 $\tan x=\frac{1}{x}$

$\tan x=\frac{1}{x}$ 의 근을 $a$ 라 하면 $0<a<\frac{\pi}{2}$

증감표를 그려보면




| | 0 | | $a$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x$ | 2 | + | 0 | − | 0 | − | −2 |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $2a\cos$ | ↘ | 0 | ↘ | $-2\pi$ |

$\therefore\ f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 가진다.

구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $y=\frac{1}{x}$ 은 감소함수, $y=\tan x$ 는 증가함수이므로

$g(x)=\tan x-\frac{1}{x}$ 은 증가함수 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{4}{\pi}<0$,

$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{3}{\pi}>0$ 이므로

중간값 정리에 의해 $\frac{\pi}{4}<a<\frac{\pi}{3}$ $\therefore$ (참)

ㄷ. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{1}{2}>1$ 이므로 $f(a)>1$

$\therefore$ 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 $f(x)=1$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

**18. [출제의도] 미분과 적분을 이용하여 속도, 가속도, 운동거리를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2},\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)$

$t=1$일 때 $\vec{v}\cdot\vec{p}=\frac{e^2-e^{-2}}{2}\neq0$ (거짓)

ㄴ. $\vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2},\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)=\vec{p}$ (참)

ㄷ. $\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=\int_0^1\sqrt{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}}\,dt\geq\int_0^1 1dt=1$ (참)

**19. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 수학내적문제 해결하기**

$\overline{\mathrm{AP}}=2\cos\frac{\theta}{2}$ $\quad\therefore\ S(\theta)=4\cos^2\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$

따라서 $\lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\tan\theta}=2$

**20. 정답 ③**

A 고등학교에서 임의로 뽑은 9명의 학생의 몸무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면

$E(\overline{X})=60$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{6}{\sqrt{9}}=2$

이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $N(60,2^2)$ 을 따른다.

한편 경고음이 울리려면 $9\overline{X}\geq549$에서

$\overline{X}\geq\frac{549}{9}=61$

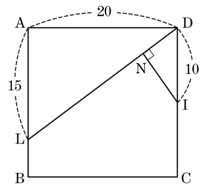
따라서 구하는 확률은

$P(\overline{X}\geq61)=P\left(Z\geq\frac{61-60}{2}\right)$

$=P(Z\geq0.5)=0.5-P(0\leq Z\leq0.5)$

$=0.5-0.1915=0.3085$

**21. [출제의도] 삼수선의 정리를 이해하고 선분의 길이를 구한다.**




점 M에서 모서리 CD에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의해서 $\overline{\mathrm{LD}}\perp\overline{\mathrm{NI}}$이다.

$\overline{\mathrm{AL}}=\frac{3}{4}\overline{\mathrm{AB}}=15$, $\overline{\mathrm{DI}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CD}}=10$,

$\overline{\mathrm{LD}}=\sqrt{20^2+15^2}=25$

이고, 두 삼각형 NDI, ALD는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{NI}}:\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DI}}:\overline{\mathrm{LD}}$

$\overline{\mathrm{NI}}=\frac{\overline{\mathrm{AD}}\cdot\overline{\mathrm{DI}}}{\overline{\mathrm{LD}}}=\frac{20\times10}{25}=8$

삼각형 MIN은 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{MN}}=\sqrt{20^2+8^2}=4\sqrt{29}$

**22. 정답 3**

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{p}{2}}{1-\frac{1}{2}}=p=3$$

**23. 정답 78**

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\cdot2x$$

$$=x-(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$$

곡선의 길이 $l$은

$$l=\int_0^6\sqrt{1+x^2(x^2+2)}$$
$$=\int_0^6(x^2+1)\,dx \quad =78$$

**24. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$F'(-3,0)$, $F(3,0)$이고 주축의 길이는 $4$이므로

$\overline{PF'}=a$, $\overline{PF}=b$라 하면 $a-b=4$

$\angle F'PA=\angle FPA$이므로 $a:b=2:1$

$\therefore\ a=8,\ b=4$

따라서 삼각형 $PFF'$의 둘레의 길이는 $8+4+6=18$이다.

**25. [출제의도] 벡터의 내적을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}$이므로 $|\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}|^2=4$

따라서 $|\overrightarrow{AD}|^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+|\overrightarrow{AE}|^2=4$ 이므로

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=12$

**26. 정답 76**

$$P(X=k)=P(x\leqq k)-P(x\leqq k-1)=ak^2-a($$

$$1=\sum_{k=1}^{5}P(X=k)=\sum_{k=1}^{5}a(2k-1)=a\times 25$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{25}$$

$$E(X)=\frac{1}{25}\sum_{k=1}^{5}\{k\cdot(2k-1)\}$$

$$=\frac{1}{25}\sum_{k=1}^{5}(2k^2-k)=\frac{19}{5}$$

$$\therefore\ 20E(X)=20\times\frac{19}{5}=76$$

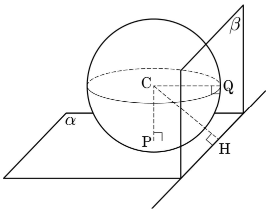
**27. [출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.**

$A(1,\ 0)$이고 $S_1=S_2$이므로

$$\int_0^1\{-(x+1)^3+8-k\}dx=0$$

$$\therefore\ 4k=4\times\frac{17}{4}=17$$

**28. [출제의도] 공간벡터의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.**




구의 중심 C에서 두 평면의 교선 $x=-y=z$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(t,\ -t,\ t)$이고 $\overrightarrow{CH}$는 교선의 방향벡터 $\vec{u}=(1,\ -1,\ 1)$과 수직이다. 따라서

$\overrightarrow{CH}\cdot\vec{u}=(t-1,\ -t-2,\ t-1)\cdot(1,\ -1,\ 1)$

$=(t-1)-(-t-2)+(t-1)$

$=3t=0$

$t=0$이므로 $\overrightarrow{CH}=(-1,\ -2,\ -1)$

$\overline{CH}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

직각삼각형 CQH에서 $\cos(\angle QCH)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \angle QCH=\frac{\pi}{4}$

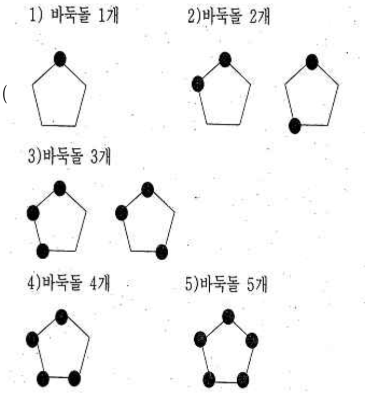
$\angle PCH=\angle QCH=\frac{\pi}{4}$이므로 $\angle QCP=\frac{\pi}{2}$가 되어 삼각형 CPQ는 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 직각이등변 삼각형이다.

$S=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 100S=150$

**29. 정답 7**

**[출제의도] 동전의 경우의 수의 개념과 배열의 개념 그리고 원순열의 개념을 이해하고 계산 할 수 있는가를 묻는 문제이다.**




따라서 경우의 수 $1+2+2+1+1=7$

**30. [출제의도] 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.**

선분 AN의 중점을 P라 하면 두 직선 CN, MP가 서로 평행하므로 두 직선 BM, CN이 이루는 각의 크기는 두 직선 BM, MP가 이루는 각의 크기와 같다.

이때, $\overline{AB}=4$라 하면 $\overline{BM}=2\sqrt{3}$, $\overline{MP}=\sqrt{3}$이고,

직각삼각형 BNP에서 $\overline{BP}=\sqrt{13}$이다.

따라서 삼각형 BMP에서 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta=\left|\frac{\overline{BM}^2+\overline{MP}^2-\overline{BP}^2}{2\overline{BM}\cdot\overline{MP}}\right|=\frac{1}{6}$$

$\therefore\ p+q=6+1=7$