19회수학 가형 정답

1	②	2	①	3	②	4	①	5	②
6	③	7	①	8	③	9	③	10	②
11	①	12	③	13	②	14	①	15	②
16	⑤	17	④	18	⑤	19	④	20	②
21	④	22	36	23	2	24	16	25	23
26	112	27	3	28	32	29	50	30	50

해 설

1. 정답 ②

$f(x) = \cos x - x + 1$ 로 놓으면 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이고 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ 이므로 중간값정리에 의해 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

2. 정답 ①

$\vec{a} + \vec{b} = (1,\ 4)$이므로

$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (-1,\ 3) \cdot (1,\ 4) = -1 + 12 = 11$

3. 정답 ②

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 이므로

준식은 $4(1-\sin^2 x) + 4\sin x = 5$이고

정리하여 고치면 $(2\sin x - 1)^2 = 0$이므로

$\sin x = \frac{1}{2}$

4. 정답 ①

x^4 의 계수는 $_7C_4 a^3 = 280,\ a^3 = 8 \quad \therefore\ a = 2$

따라서 x^5 의 계수는 $_7C_5 a^2 = 21 \times 2^2 = 84$

5. 정답 ②

$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^6} dt$ 이므로 $f'(x) = \frac{1}{1+x^6}$

$e^{f(x)} = t$ 로 치환하면

$\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6} dx = \int_1^{\sqrt{e}} 1\, dt = \sqrt{e} - 1$

$(\because\ e^{f(x)} f'(x) dx = dt)$

6. 답 ③

벡터 $\overrightarrow{OP} = (a,\ b)$, $\overrightarrow{OQ} = (c,\ d)$라 하면

$\overrightarrow{OP'} = (a+3,\ b+1)$, $\overrightarrow{OQ'} = (c+3,\ d+1)$

ㄱ. $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'} = (a,b) - (a+3, b+1) = (-3, -1)$ 이므로

$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ (참)

ㄴ. $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = (a,\ b) - (c,\ d) = (a-c,\ b-d)$

$\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OQ'} = (a+3,\ b+1) - (c+3,\ d+1) = (a-c,\ b-d)$이 므로

$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OQ'}$

$\therefore\ |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OQ'}|$ (참)

ㄷ. (반례)

$\overrightarrow{OP} = (1,1)$, $\overrightarrow{OQ} = (1,2)$일 때,

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1\cdot1 + 1\cdot2 = 3$이다.

그런데, $\overrightarrow{OP'} = (4,2)$, $\overrightarrow{OQ'} = (4,5)$이므로

$\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OQ'} = 4\cdot4 + 2\cdot5 = 26$

$\therefore\ \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \neq \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OQ'}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

7. 정답 ①

$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \frac{1}{3}$

$\cos\theta = \frac{1}{3}$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = -\frac{7}{9}$

8.정답 ③

$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$

$\lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{2}(e^{2x}-1)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 1$

$\lim_{x\to+0} \frac{\ln(1+x)}{x} \le \lim_{x\to+0} \frac{f(x)}{x} \le \lim_{x\to+0} \frac{e^{2x}-1}{2x}$

이므로 $\lim_{x\to+0} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to-0} \frac{\ln(1+x)}{x} \ge \lim_{x\to-0} \frac{f(x)}{x} \ge \lim_{x\to-0} \frac{e^{2x}-1}{2x}$

이므로 $\lim_{x\to-0} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\therefore \lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\therefore \lim_{x\to0} \frac{f(3x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{f(3x)}{3x} \times 3 = 3$

9. 답 ③

좌표공간은 xy평면, yz 평면, zx평면에 의해 다음과 같이 8개의 영역으로 나누어진다.

① $x>0,\ y>0,\ z>0$인 영역,
② $x>0,\ y>0,\ z<0$인 영역,
③ $x>0,\ y<0,\ z>0$인 영역,
④ $x>0,\ y<0,\ z<0$인 영역,
⑤ $x<0,\ y>0,\ z>0$인 영역,
⑥ $x<0,\ y>0,\ z<0$인 영역,
⑦ $x<0,\ y<0,\ z>0$인 영역,
⑧ $x<0,\ y<0,\ z<0$인 영역,

한편, 주어진 구

C : $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 24$

의 중심은 $(-2,\ 3,\ 4)$이므로

구 C의 중심은 ⑤의 영역에 있다.

따라서 구 C는 ⑤의 영역을 지난다.

또, 구의 반지름의 길이 r는 $r = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ 이고,

$|-2| < r,\ 3 < r,\ 4 < r$이므로

구 C는 yz 평면, zx평면, xy평면에 의하여 두 부분으로 나누어진다.

따라서 구 C는 ①, ⑦, ⑥의 영역을 지난다.

한편, $\sqrt{(-2)^2 + 3^2} < r$이므로 구 C는 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 ③의 영역을 지난다.

또, $\sqrt{(-2)^2 + 4^2} < r$이므로

구 C는 y축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 ②의 영역을 지난다.

하지만, $\sqrt{3^2 + 4^2} > r$이므로

구 C는 x축과 만나지 않는다.

따라서 ⑧의 영역을 지나지 않는다.

또, $\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 4^2} > r$이므로

원점의 구 C의 외부에 있다.

따라서 ④의 영역을 지나지 않는다.

따라서 구 C가 지나는 영역은 ①, ②, ③, ⑤, ⑥, ⑦의 6개이다.

10. 정답 ②

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면, 접선의 방정식은

$y_1 y = \frac{1}{2}(x + x_1)$

이 식에 $y=0$을 대입하면 $x = -x_1$이므로 교점 T의 좌표는 $(-x_1,\ 0)$이다.

$y^2 = 4\cdot\frac{1}{4}\cdot x$ 에서 초점 F의 좌표는 $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$이므로

$\overline{FT} = x_1 + \frac{1}{4}$

$\overline{FP} = \sqrt{\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)^2 + {y_1}^2}$

$= \sqrt{{x_1}^2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{16} + x_1}$ $(\because {y_1}^2 = x_1)$

$= \sqrt{{x_1}^2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{16}} = \sqrt{\left(x_1 + \frac{1}{4}\right)^2}$

$= x_1 + \frac{1}{4}$

11. 정답 ①

ⅰ) 흰공을 꺼낸 경우 $\frac{2}{4} \times {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ⅱ) 검은 공을 꺼낸 경우 $\frac{2}{4} \times {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$

ⅰ), ⅱ)에서 $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$

12. 정답 ③

[출제의도] 조합의 수 성질을 이용하여 문제해결하기

어두운 부분의 합은

$\sum_{n=2}^{10}\left({}_nC_{n-2}+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n\right)$

$=\sum_{n=2}^{10}\left({}_nC_2+{}_nC_1+1\right)$

$=\sum_{n=2}^{10}\left\{\frac{n(n-1)}{2}+n+1\right\}$

$=\sum_{n=2}^{10}\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1\right)$

$=228$

(별해) ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8={}_{11}C_8$

${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9={}_{11}C_9$이므로

${}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9={}_{11}C_9-{}_1C_0$

$1+{}_1C_1+{}_2C_2+{}_3C_3+\cdots+{}_{10}C_0={}_{11}C_{10}$이므로

${}_2C_2+{}_3C_3+\cdots+{}_{10}C_0={}_{11}C_{10}-1-{}_1C_1$

따라서 어두운 부분의 합은 228

13. 답 ②

크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는

정규분포 $\mathrm{N}\left(11,\left(\frac{2}{\sqrt{4}}\right)^2\right)$ 즉, $\mathrm{N}(11,1^2)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(10\le\overline{X}\le 14)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{10-11}{1}\le\frac{\overline{X}-11}{1}\le\frac{14-11}{1}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 3)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$

$=0.3413+0.4987=0.84$

이 때, A, B 두 사람이 각각 독립적인 표본을 임의추출하였으므로 두 사람이 뽑은 표본의 표본평균이 10 이상 14 이하일 확률은 모두 0.84로 같고, 두 사건은 서로 독립이다.

따라서 두 표본평균이 모두 10 이상 14 이하일 확률은

$0.84\times0.84=0.7056$이다.

14.정답 ①

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.

삼각형 ABD가 이등변삼각형이고, 삼각형의 한 외각은 이웃하지 않은 두 내각의 합과 같으므로

$\alpha-\theta=\theta+\beta$

$\therefore 2\theta=\alpha-\beta$

그런데, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$에서

$\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로

$\sin2\theta=\sin(\alpha-\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$

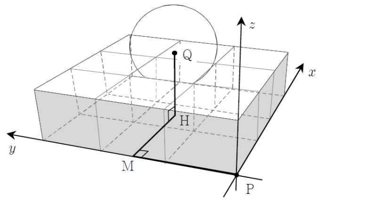
$=\frac{\sqrt{2}}{10}$

15. 정답 ②

[출제의도] 공간도형에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

아래 그림과 같이 P 를 원점으로 하는 공간좌표에 놓으면

$\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{MH}}=6$ 이고,

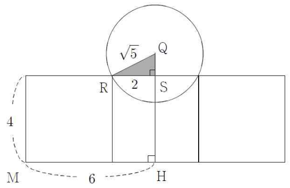


△QHM 을 지나는 평면으로 입체를 자른 단면은 아래 그림과 같이

$\overline{\mathrm{RQ}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{RS}}=2$ 이므로

$\overline{\mathrm{QS}}=\sqrt{\sqrt{5}^2-2^2}=1$ 이고,

$\overline{\mathrm{SH}}=4$ 이므로 $\overline{\mathrm{QH}}=5$ 이다.



$\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{MH}}=6$, $\overline{\mathrm{QH}}=5$ 이므로 Q(6, 6, 5)

$\therefore t^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2=6^2+6^2+5^2=97$

16. 답 ⑤

ㄱ. $f(x)>0$이므로 $\int_n^{n+1}f(x)dx$는 곡선 $y=f(x)$와

두 직선 $x=n$, $x=n+1$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의

넓이와 같다.

두 점 P_n, Q_n에서 x축에 내린 수선의 발을 각각

P'_n, Q'_n이라 하면 직사각형 $P_nP'_nQ'_nQ_n$의 넓이는

$(n+1-n)\times f(n)=f(n)$이다.

$\therefore \int_n^{n+1}f(x)dx=f(n)-(A_n-B_n)$ (참)

ㄴ. $A_n=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\{f(n)-f(n+1)\}$

$=\frac{1}{2}\left(e^{-n}-e^{-n-1}\right)=\frac{e^{-n-1}}{2}(e-1)$

$=\frac{e-1}{2}\cdot\frac{1}{e^{n+1}}$

따라서 수열 $\{A_n\}$은 첫째항이 $\frac{e-1}{2e^2}$, 공비가 $\frac{1}{e}$인

등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}A_n=\frac{\frac{e-1}{2e^2}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{2e}$ (참)

ㄷ.

$\int_n^{n+1}f(x)dx=\int_n^{n+1}e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_n^{n+1}$

$=-e^{-n-1}+e^{-n}=2A_n$

이므로 ㄱ에서 $B_n=f(n)-3A_n$

그런데,

$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}=\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}B_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)-3\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\frac{1}{e-1}-\frac{3}{2e}$

$=\frac{2e-3(e-1)}{2e(e-1)}=\frac{3-e}{2e(e-1)}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17. 답 ④

ㄱ. $n=100$, $\hat{p}=\frac{1}{5}$일 때, 비율 p를 신뢰도 95%로

추정하면 신뢰구간은

$\frac{1}{5}-1.96\sqrt{\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}\le p$

$\le\frac{1}{5}+1.96\sqrt{\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}$

$\therefore 0.1216\le p\le0.2784$ (참)

ㄴ. 표본의 크기가 n이고

$\mathrm{P}\left(\hat{\mathrm{p}}-\mathrm{k}\sqrt{\frac{\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}}}{\mathrm{n}}}\le\mathrm{p}\le\hat{\mathrm{p}}+\mathrm{k}\sqrt{\frac{\hat{\mathrm{p}}\hat{\mathrm{q}}}{\mathrm{n}}}\right)$인 경우에

신뢰도 $(a\times100)$%에 대한 최대 허용 표본오차는

$k\sqrt{\frac{1}{4n}}$ 이므로

신뢰도 95%일 때,

$n=400$인 경우 최대 허용 표본오차 l은

$l=1.96\sqrt{\frac{1}{1600}}=1.96\times\frac{1}{40}$

$n=100$인 경우 최대 허용 표본오차 l'는

$l'=1.96\sqrt{\frac{1}{400}}=1.96\times\frac{1}{20}$

따라서 l은 l'의 $\frac{1}{2}$이다. (거짓)

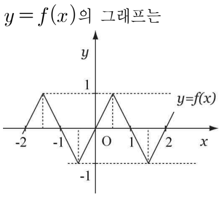
ㄷ. $n=50$인 표본을 100번 임의추출하여 비율 p의

신뢰도 95%의 신뢰구간 100개를 구해보

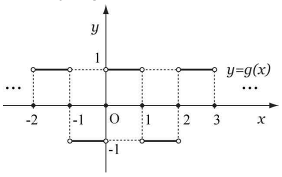
면
이 중 약 95개는 비율 p를 포함한다.
이는 신뢰구간의 의미를 설명하는 옳은 내용이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

18. 정답 ⑤

$y=f(x)$의 그래프는

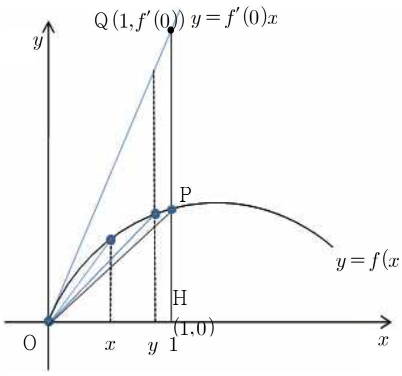


함수 $y=g(x)$는
1) x가 정수이면 $f(x)=0$이므로 $g(x)=0$
2) $2k-1<x<2k$ (k는 정수)이면
$0 \leqq 1+f(x)<1$이므로 $g(x)=-1$
3) $2k<x<2k+1$ (k는 정수)이면
$1<1+f(x) \leqq 2$이므로 $g(x)=1$
따라서 $y=g(x)$의 그래프는



$g(10\sqrt{2})-g(\sqrt{3})=1-(-1)=2$

19. 정답 ④



(나)에서 $0<xf(y)<yf(x)$의 각 변을 xy로 나누면
$0<\frac{f(y)}{y}<\frac{f(x)}{x}$이다.
(가)에서 $f(0)=0$이므로, (가), (나)로부터
함수 f는 위 그림과 같이 개구간 $(0,\ 1)$에서 위로 볼록한 함수임을 알 수 있다.
위 그래프를 이용하여 A, B, C를 표현하면

$A=f'(0)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot f'(0)\right)$
$=2(\triangle \mathrm{OHQ}$의 넓이$)$

$B=f(1)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot f(1)\right)$
$=2(\triangle \mathrm{OHP}$의 넓이$)$

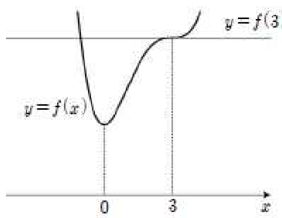
$C=2\int_0^1 f(x)dx=2\cdot$ (곡선OP, x축, 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이) 와 같다.
따라서 B < C < A이다.

20. 정답 ②

출제의도 : 이차곡선 - 타원의 접선

P$(k,\ 2)$에서 타원에 그은 기울기 m인 접선의 방정식은
$y=mx\pm\sqrt{m^2+2}$ 이다. 점P는 이 접선 위의 점이므로
$2=km\pm\sqrt{m^2+2}$
$(2-km)^2=m^2+2$
$(1-k^2)m^2+4km-2=0$ ⋯ ㉠
㉠에서 두 근을 m_1, m_2라 하면 근과 계수와의 관계에 의해
$m_1m_2=\frac{1}{3}=\frac{-2}{1-k^2}$ ∴ $k^2=7$

21. 정답 ④



최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $|f(x)-f(3)|$은 한 점에서만 미분가능하지 않고
$x=0$에서 극솟값을 가지므로 $f'(x)=4x(x-3)^2$
이것의 부정적분을 구하면
$f(x)=x^4-8x^3+18x^2+C$ (단, C는 적분상수)
조건 (나)에서 $f(0)=5$이므로 $C=5$ ∴
$f(1)=16$

22. 정답 36

[출제의도] 정적분의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

(준식)$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}k\right)^4$
$=\int_1^2 x^4\,dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2=\frac{31}{5}$
∴ 36

23. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}$
$=\lim_{x\to0}(1+\cos x)=2$

24. 답 16

$f(x)=x^3$의 그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동시키면
$g(x)=(x-a)^3+b$의 그래프가 된다.
$g(0)=-a^3+b=0$이므로 $b=a^3$ ⋯⋯ ㉠
한편, 그래프의 평행이동에 의해
$\int_a^b g(x)dx=\int_{a-c}^{b-c}g(x+c)dx$가 성립함을 이용하면
$\int_a^{3a}g(x)dx=\int_a^{3a}\{(x-a)^3+b\}dx$
$=\int_0^{2a}(x^3+b)dx$
∴ $\int_0^{2a}(x^3+b)dx-\int_0^{2a}x^3dx=\int_0^{2a}bdx$
$=2ab=32$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $2ab=2a^4=32$이므로 $a^4=16$

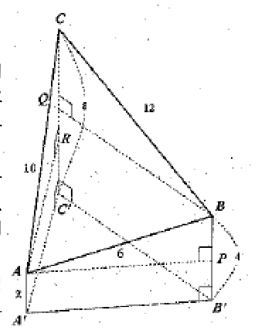
25. [출제의도] 부정적분 이해하기

$$f(x)=\begin{cases}2x^{\frac{3}{2}}+C_1 & (x>1)\\ x^2+C_2 & (x<1)\end{cases}$$
(단, C_1, C_2는 적분상수)
$f(4)=16+C_1=13$
$C_1=-3$
$x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to1-0}(x^2+C_2)=\lim_{x\to1+0}\left(2x^{\frac{3}{2}}-3\right)$
$1+C_2=-1$
$C_2=-2$
따라서 $f(-5)=25-2=23$

26.정답 112

전체적인 색칠의 경우는 ${}_9\mathrm{C}_3=84$(가지)
$P(X=1)=\frac{6}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{6}{84}=\frac{3}{42}$
$P(X=2)=\frac{16}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{16}{84}=\frac{8}{42}$
$P(X=3)=\frac{84-6-16}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{62}{84}=\frac{31}{42}$
$E(X)=\frac{3\times1+8\times2+31\times3}{42}=\frac{112}{42}$
∴ $E(42X)=42E(X)=112$

27.정답 3



[출제의도] 구의 내접 외접 성질과 코사인 제 2법칙을 이용하여 공간도형에서의 정사영 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 A, B, C를 평면 α 위로 정사영시킨 점을 각각 A′, B′, C′라 하자. 또한, 점 A를 선분 BB′, 선분 CC′ 위로 정사영시킨 점을 각각 P, R이라 하고, 점 B를 선분 CC′ 위로 정사영시킨 점을 Q라고 할 때, 세 개의 구가 서로 외접하므로
$AB=2+4=6$, $BC=4+8=12$, $CA=8+2=10$
이다. 세 구가 평면 α 위에 있으므로
$\mathrm{BP}=4-2=2$, $\mathrm{CQ}=8-4=4$, $\mathrm{CR}=8-2=6$
이다. 피타고라스 정리에 의해

$\mathrm{A'B'} = \mathrm{AP} = \sqrt{6^2-2^2} = 4\sqrt{2}$
$\mathrm{B'C'} = \mathrm{BQ} = \sqrt{12^2-4^2} = 8\sqrt{2}$
$\mathrm{C'A'} = \mathrm{RA} = \sqrt{10^2-6^2} = 8$
이다. 제 2 코사인 법칙에 의해

$$\cos \mathrm{B} = \frac{6^2+12^2-10^2}{2\cdot 6\cdot 12} = \frac{5}{9}$$

$$\cos \mathrm{B'} = \frac{(4\sqrt{2})^2+(8\sqrt{2})^2-8^2}{2\cdot(4\sqrt{2})\cdot(8\sqrt{2})} = \frac{3}{4}$$

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12\cdot\sqrt{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2} = 8\sqrt{14}$$

$\triangle \mathrm{A'B'C'}$

$$= \frac{1}{2}\cdot(4\sqrt{2})\cdot(8\sqrt{2})\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 8\sqrt{7}$$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{8\sqrt{7}}{8\sqrt{14}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

따라서 $a=1,\ b=2$ 이므로 $a+b=3$ 이다.

28. [출제의도] 무한급수와 정적분을 활용하여 문제 해결하기

삼각형 $\mathrm{OQ}_k\mathrm{B}$에서

$\angle \mathrm{OBQ}_k = \angle \mathrm{AOP}_k = \dfrac{k\pi}{2n}$ 이고 $\overline{\mathrm{OB}} = 8$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}_k} = 8\sin\dfrac{k\pi}{2n},\ \overline{\mathrm{BQ}_k} = 8\cos\dfrac{k\pi}{2n}$

$$S_k = \frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}_k}\times\overline{\mathrm{BQ}_k}$$

$$= \frac{1}{2}\times 8\sin\frac{k\pi}{2n}\times 8\cos\frac{k\pi}{2n} = 16\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k = 16\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$= 16\int_0^1 \sin\pi x\,dx = 16\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1 = \frac{32}{\pi}$$

따라서 $\alpha = 32$

29. 정답 50

재직연수가 10년 미만일 사건을 A, 조직 개편안에 찬성할 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A) = \frac{120}{360} = \frac{1}{3},\ \mathrm{P}(B) = \frac{150}{360} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}\times\frac{5}{12} = \frac{5}{36}$$

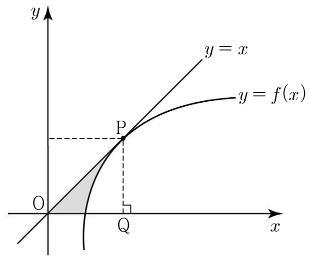
이 때, 두 사건 $A,\ B$는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{a}{360} = \frac{5}{36}\qquad\therefore\ a = 50$$

30. [출제의도] 정적분과 접선의 기울기를 활용하여 문제해결하기

$f(x) = k\ln x$라 하자.



접점의 좌표를 $\mathrm{P}(p,\ p)$라 하면

$f(p) = k\ln p = p$ ⋯ ㉠

$f'(x) = \dfrac{k}{x}$ 이므로 $f'(p) = \dfrac{k}{p} = 1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $p=e,\ k=e$

$f(x) = e\ln x$

구하고자 하는 넓이 S는

$$S = (\text{삼각형 OPQ의 넓이}) - \int_1^e f(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \int_1^e e\ln x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - e\left[x\ln x - x\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - e(e\ln e - e + 1)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - e$$

따라서 $a = \dfrac{1}{2},\ b=1$이므로

$100ab = 50$