11회수학 가형 정답

1	③	2	⑤	3	③	4	④	5	①
6	⑤	7	①	8	④	9	⑤	10	②
11	③	12	⑤	13	①	14	⑤	15	⑤
16	②	17	⑤	18	③	19	③	20	⑤
21	②	22	21	23	31	24	19	25	120
26	12	27	30	28	52	29	36	30	32

해 설

1. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt[3]{8} \div 2^{-2} = (2^3)^{\frac{1}{3}} \div 2^{-2} = 2^{1-(-2)} = 2^3 = 8$

2. [출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x^2+x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{(x+1)(\sqrt{2x+1}+1)} = 1$

3. [출제의도] 정적분 계산하기

$\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-2x+4)\,dx$

$= 2\int_0^1(-3x^2+4)\,dx = 2\left[-x^3+4x\right]_0^1 = 6$

4. [출제의도] 회전체의 부피를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\int_0^1 \pi x^2 dy = \int_0^1 \pi(1-y^2)^2 dy = \int_0^1 \pi(y^4-2y^2+1)dy$

$= \pi\left[\frac{1}{5}y^5 - \frac{2}{3}y^3 + y\right]_0^1 = \frac{8}{15}\pi$

5.[출제의도] 직선의 방정식을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$l : \frac{x-7}{2} = \frac{y-14}{3} = z$ 이고 방향벡터는 $\vec{d} = (2,\ 3,\ 1)$이므로 수선의 발 H를 $\mathrm{H}(2t+7, 3t+14,\ t)$라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}\cdot\vec{d} = 0$에서 $2(2t+7)+3(3t+14)+t=0$ $\therefore t=-4$

따라서 $\mathrm{H}(-1, 2, -4)$이므로 $a+b+c=-3$이다.

6. [출제의도] 이항정리 이해하기

${}_6\mathrm{C}_r\,(x^2)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_6\mathrm{C}_r\,x^{12-3r}$

$12-3r=3,\ r=3$

따라서 x^3의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$

7. [출제의도] 역함수의 미분법 이해하기

$f(x) = \sin 2x$ 이므로 $f(x)$의 역함수 $g(x)$는

$x = \sin 2y$

$\frac{dx}{dy} = 2\cos 2y,\ \frac{dx}{dy} = 2\sqrt{1-x^2}$

$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

따라서 $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

8. [출제의도] 신뢰구간의 길이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\hat{p} = 0.2$이므로 $2\times 2\times\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2\times 2\times\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{400}} = 0.08$

9. [출제의도] 두 항 사이의 관계를 이해하고 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

n칸의 계단을 오르는 방법의 수를 수열 $\{a_n\}$이라 하면 $\{a_n\}$: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, $\cdots$ $\therefore a_9 = 55$

10.. [출제의도] 삼각함수의 배각공식 이해하기

$\overline{\mathrm{AB}} = 3a,\ \overline{\mathrm{BC}} = 4a\ (a>0)$라 할 때

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{5}\,a,\ \overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{20}\,a,\ \overline{\mathrm{BQ}} = \sqrt{13}\,a$

코사인법칙에 의하여 $\cos\theta = \frac{3}{5}$

따라서 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = -\frac{7}{25}$

11. [출제의도] 상용로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$80 = 10\left(12+\log\frac{I}{1^2}\right) = 120 + 10\log I$ 에서 $\log I = -4$

$\therefore a = 10\left(12+\log\frac{I}{10^2}\right) = 120+10\log I - 20 = 60$

12. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이해하고 극한값을 구한다.

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\{1+f(2x)\}}{x} = 10$이고, $\lim_{x\to 0} x = 0$이므로

$\lim_{x\to 0}\ln\{1+f(2x)\} = 0$

$\lim_{x\to 0} f(2x) = 0$이므로 $t = f(2x)$로 놓으면

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\{1+f(2x)\}}{f(2x)} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}$

$= \lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = \ln e = 1$

따라서 $x = 2y$로 놓으면

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{f(2y)}{2y}$

$= \lim_{y\to 0}\frac{f(2y)}{\ln\{1+f(2y)\}}\cdot\frac{\ln\{1+f(2y)\}}{y}\cdot\frac{1}{2}$

$= 1\times 10\times\frac{1}{2} = 5$

13. 정답 ①

[출제의도] 도함수를 이용하여 함수의 증가와 감소 이해하기

조건 (나)에 의하여 $f(x) = ax^2 + b$ 라 하면

$f(0) = -2$ 이므로 $b = -2$

$f(x) = ax^2 - 2$, $f'(x) = 2ax$

$f(f'(x)) = f'(f(x))$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ 이다.

$F(x)$ 가 감소하는 구간은 부등식 $F'(x) < 0$

즉, $f(x) < 0$ 을 만족하는 구간이므로

$\frac{1}{2}x^2 - 2 < 0$, $-2 < x < 2$

$\therefore$ 감소하는 구간의 길이는 4

14. 정답 ⑤

X : 앞면이 나오는 개수

ㄱ. $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=0) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=1)$

$= {}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ …………참

ㄴ. $A\cap B$: 앞면이 0개

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=0) = {}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{8}$ …………참

ㄷ. $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=0) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=3) =$

$2\times{}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \frac{1}{8},\ \mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$\therefore A,\ B$는 독립…………참

15. [출제의도] 함수의 연속을 이해하고 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄴ. $\lim_{x\to +0} f(f(x)) = \lim_{t\to -1+0} f(t) = 0$이고

$\lim_{x\to -0} f(f(x)) = \lim_{t\to 1-0} f(t) = 0$이므로 $\lim_{x\to 0} f(f(x)) = 0$

$f(f(0)) = 0$이므로 $x = 0$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $a \neq 0$일 때, $\lim_{x\to a} f(x)f(-x) = -\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2$

$a = 0$일 때, $-\lim_{x\to +0}\{f(x)\}^2 = -\lim_{x\to -0}\{f(x)\}^2 = -1$

따라서 $-2 < a < 2$인 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)f(-x)$의 값이 존재한다. (참)

16. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 수학내적 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{AP}} = 2\cos\frac{\theta}{2}$ $\quad\therefore S(\theta) = 4\cos^2\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$

따라서 $\lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{\tan\theta} = 2$

17. [출제의도] 평균값의 정리를 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$g(x) = -\sin x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt + \cos x\cdot f(x)$

ㄱ. $g(0) = 0$ $(\because f(0) = 0)$ (참)

ㄴ. $g(-x) = -\sin(-x)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x} f(t)dt + \cos(-x)\cdot f(-x)$

$= \sin x\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x} f(t)dt + \int_{-x}^{x} f(t)dt\right) - \cos x\cdot f(x)$

$= \sin x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt - \cos x\cdot f(x) = -g(x)$ (참)

ㄷ. $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g(0)$이므로 평균값의 정리에 의해 $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에서 $g'(c) = 0$인 c가 적어도 하나 존재한다. 마찬가지로 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $g'(c) = 0$인 c가 적어도 하나 존재한다. (참)

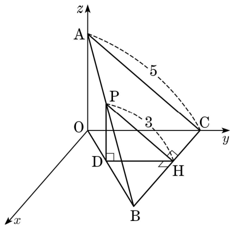
18. [출제의도] 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	2	3	4	6	9
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{10}{36}$

$\therefore \mathrm{E}(X) = \frac{1}{36}(2\times 3+3\times 5+4\times 3+6\times 15+9\times 10) = \frac{71}{12}$

19. [출제의도] 닮음 도형을 이용하여 정사영 문제를 해결한다.



$\overline{AC} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $\overline{AC} \perp \overline{BC}$
이므로 평면 ABC와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta = \frac{4}{5}$이다.
두 직각삼각형 ABC, PBH는 서로 닮은 도형이고
$\overline{BH} : \overline{BC} = \overline{PH} : \overline{AC} = 3 : 5$
$\overline{BH} = \frac{3}{5}\overline{BC} = 3$
$\therefore\ \triangle PBH = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$
따라서 삼각형 PBH의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 S라 하면
$S = \triangle PBH \cdot \cos\theta = \frac{9}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{18}{5}$

[다른 풀이]
점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 D라 하자.
$\overline{PD} \perp (xy\text{평면})$, $\overline{PH} \perp \overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{DH} \perp \overline{BC}$이다.
따라서 두 직각삼각형 ABC, PBH는 서로 닮은 도형이고
$\overline{AC} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $\overline{PH} = 3$
이므로
$\overline{BH} : \overline{BC} = \overline{PH} : \overline{AC} = 3 : 5$
$\therefore\ \overline{BH} = \frac{3}{5}\overline{BC} = 3$
또, 두 직각삼각형 OBC, DBH는 서로 닮은 도형이고
$\overline{OC} = 4$, $\overline{BH} = 3$
이므로
$\overline{DH} : \overline{OC} = \overline{BH} : \overline{BC} = 3 : 5$
$\therefore\ \overline{DH} = \frac{3}{5}\overline{OC} = \frac{12}{5}$
따라서 삼각형 PBH의 xy평면 위로의 정사영인 삼각형 DBH의 넓이는
$\frac{1}{2} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{DH} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$
이다.

20. [출제의도] 무한급수와 관련된 문제를 정적분의 정의를 이용하여 해결한다.

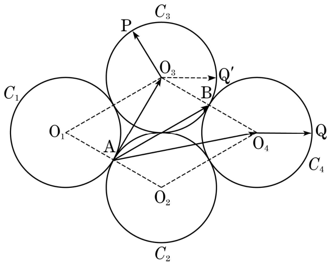
$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ f\left(\frac{2k}{n}\right) - f\left(\frac{2k-2}{n}\right) \right\} \frac{k}{n}$이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ f\left(\frac{2k}{n}\right) - f\left(\frac{2k-2}{n}\right) \right\} \frac{k}{n}$$
$$= \frac{1}{n}\left\{ f\left(\frac{2}{n}\right) - f(0) \right\} + \frac{2}{n}\left\{ f\left(\frac{4}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right) \right\}$$
$$+ \frac{3}{n}\left\{ f\left(\frac{6}{n}\right) - f\left(\frac{4}{n}\right) \right\} + \cdots$$
$$+ \frac{n-1}{n}\left\{ f\left(\frac{2n-2}{n}\right) - f\left(\frac{2n-4}{n}\right) \right\} + \frac{n}{n}\left\{ f\left(\frac{2n}{n}\right) - f\left(\frac{2n-2}{n}\right) \right\}$$
$$= -\frac{1}{n} f(0) - \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{4}{n}\right) - \cdots - \frac{1}{n} f\left(\frac{2n-2}{n}\right) + f(2)$$
$$= f(2) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k}{n}\right) \frac{1}{n}$$

$\frac{k}{n} = x_k$라 하면 $\frac{1}{n} = \Delta x$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k}{n}\right) \frac{1}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(2x_k)\Delta x = \int_0^1 f(2x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{8}$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left\{ f(2) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k}{n}\right) \frac{1}{n} \right\}$$
$$= f(2) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k}{n}\right) \frac{1}{n}$$
$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

21. [출제의도] 벡터와 관련된 문제를 도형을 이용하여 해결한다.



네 원 C_1, C_2, C_3, C_4의 중심을 각각
O_1, O_2, O_3, O_4
라 하고, 두 원 C_3, C_4의 접점을 B라 하자.
사각형 $O_1O_2O_4O_3$은 네 변의 길이가 모두 2인 마름모이고, 두 점 A, B는 각각 변 O_1O_2, 변 O_3O_4의 중점이다.
$\therefore\ \overrightarrow{AO_3} + \overrightarrow{AO_4} = 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{O_1O_3}$
한편, 벡터 $\overrightarrow{O_4Q}$를 시점이 O_3이 되도록 평행이동하였을 때, 그 종점을 Q′이라 하면
$\overrightarrow{O_3P} + \overrightarrow{O_4Q} = \overrightarrow{O_3P} + \overrightarrow{O_3Q'}$이므로
$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$
$= (\overrightarrow{AO_3} + \overrightarrow{O_3P}) + (\overrightarrow{AO_4} + \overrightarrow{O_4Q})$
$= (\overrightarrow{AO_3} + \overrightarrow{AO_4}) + (\overrightarrow{O_3P} + \overrightarrow{O_4Q})$
$= 2\overrightarrow{O_1O_3} + \overrightarrow{O_3P} + \overrightarrow{O_3Q'}$
이때, 벡터 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$의 크기가 최대가 되려면 $\overrightarrow{O_1O_3}$은 방향과 크기가 일정한 벡터이므로 두 벡터 $\overrightarrow{O_3P}$, $\overrightarrow{O_3Q'}$이 $\overrightarrow{O_1O_3}$과 방향이 같아야 한다.
$\therefore\ |\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}| \le 3|\overrightarrow{O_1O_3}| = 6$

22. [출제의도] 이항분포를 이해하고 확률변수의 평균을 구한다.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{7}\right)$을 따르므로
$\mathrm{E}(X) = \frac{n}{7} = 3$
$\therefore\ n = 21$

23. [출제의도] 조건부확률 계산하기

정팔각형의 꼭짓점 중 임의의 세 점을 택하여 만든 삼각형이 직각삼각형인 사건을 A, 이등변삼각형인 사건을 B라 할 때
$\frac{q}{p} = \mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$
$\mathrm{P}(A) = \frac{{}_4C_1 \times {}_6C_1}{{}_8C_3}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{{}_4C_1 \times {}_2C_1}{{}_8C_3}$
$p = 3, q = 1$
따라서 $10p + q = 31$

24. [출제의도] 이산확률분포를 이해한다.

$a + 2a + 3a + 4a = 1$에서 $a = \frac{1}{10}$
$\mathrm{P}(X = x) = \frac{1}{10}x$, $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{4} k \cdot \frac{k}{10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} = 3$
$\therefore\ \mathrm{E}(4X+7) = 4\mathrm{E}(X) + 7 = 12 + 7 = 19$

25. [출제의도] 함수의 연속성을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)$는 삼차항의 계수가 2인 삼차함수이고
$f(-1) = f(0) = f(1) = 0$이므로 $f(x) = 2x(x-1)(x+1)$
$\therefore f(4) = 120$

26. [출제의도] 공간에서의 벡터의 연산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

좌표공간에서 $\mathrm{B}(0, 0, 0)$, $\mathrm{D}(0, 6, 0)$, $\mathrm{C}(3\sqrt{3}, 3, 0)$이라 하면 $\mathrm{A}(\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{6})$, $\mathrm{E}(\sqrt{3}, 3, -2\sqrt{6})$이다.
$\overrightarrow{BA} = (\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{6})$, $\overrightarrow{DE} = (\sqrt{3}, -3, -2\sqrt{6})$
$\therefore |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE}|^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$

27. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결한다.

원의 중심을 O라 하면 $\angle POB = 2\theta$
직선 OP와 선분 AC가 만나는 점을 R, $\angle BAC = \alpha$라 하면 $\angle PRQ = \alpha + 2\theta$이고 $\tan\alpha = \frac{1}{3}$
$\angle QPR = \frac{\pi}{2}$, $\angle PQA = \frac{\pi}{4}$이므로 $\angle PRQ = \alpha + 2\theta = \frac{\pi}{4}$
$\tan 2\theta = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + 1 \cdot \tan\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$
따라서 $60\tan 2\theta = 30$

28. [출제의도] 평면과 구의 위치관계를 이용하여 벡터의 내적과 관련된 문제를 해결한다.

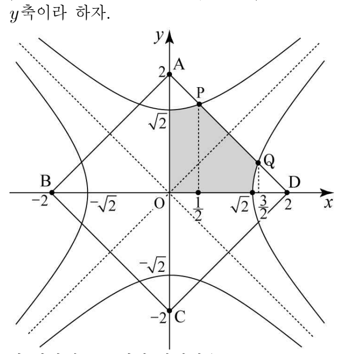
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CP}$
$= 6 \cdot 5 \cdot \frac{36 + 25 - 9}{2 \cdot 6 \cdot 5} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CP} = 26 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CP}$
그런데 최대일 때의 점 P를 $\mathrm{P_M}$, 최소일 때의 점 P를 $\mathrm{P_m}$이라 하면 $\overrightarrow{CP_M}$, $\overrightarrow{CP_m}$은 $\overrightarrow{BA}$와 평행하고 방향이 반대이므로 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CP_M} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CP_m} = 0$
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP}$의 최댓값과 최솟값의 합은 $26 + 26 = 52$

29. [출제의도] 도함수의 성질을 활용하여 수학내적문제 해결하기

t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이를 x_t, 그에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_t라 하면,
$r_t = \frac{\sqrt{3}}{6}x_t$, $x_t = 12\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\,t$이므로
$r_t = \frac{12 + 3t}{2}$
t초 후 정삼각형에 내접하는 원의 넓이는
$S(t) = \pi\left(\frac{12 + 3t}{2}\right)^2$이므로
$x_t = 24\sqrt{3}$일 때, $t = 4$
$S'(4) = 2\pi\left(\frac{12 + 3 \times 4}{2}\right) \times \frac{3}{2} = 36\pi$이다.
따라서 $a = 36$

30. [출제의도] 정적분을 활용하여 수학내적문제 해결하기

점 P, Q는 각각 두 정점 A, C와 두 정점 B, D로부터 거리의 차가 일정한 점이므로 점 P, Q가 나타내는 두 도형은 점 A, C와 점 B, D를 초점으로 하는 쌍곡선이다.
점 B, D를 지나는 직선을 x축, 점 A, C를 지나는 직선을 y축이라 하자.



점 P가 나타내는 도형의 방정식은
$x^2 - y^2 = -2$
점 Q가 나타내는 도형의 방정식은

$x^2 - y^2 = 2$
회전체의 부피는

$$2\pi\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}(x^2+2)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(2-x)^2dx\right.$$

$$\left.-\int_{\sqrt{2}}^{\frac{3}{2}}(x^2-2)dx\right\} = \frac{24-8\sqrt{2}}{3}\pi$$

$\therefore\ a = 24,\ b = -8$
따라서 $a - b = 32$