18회수학 가형 정답

1	③	2	②	3	①	4	②	5	①
6	②	7	⑤	8	⑤	9	④	10	④
11	④	12	③	13	③	14	①	15	②
16	④	17	②	18	②	19	⑤	20	④
21	⑤	22	16	23	11	24	15	25	27
26	9	27	225	28	30	29	24	30	27

해 설

1. 정답 ③

$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{6x}}$

$=\lim_{x\to 0}((1+3x)^{\frac{1}{3x}})^{\frac{1}{2}}$

$=e^{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{e}$

2.정답 ②

[출제의도] 확률변수와 확률분포의 뜻알기

(준식)$=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

3. 정답 ①

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 에서

(주어진 식)$=(2+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})(2-\sqrt{3})$

$=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

$=2^2-(\sqrt{3})^2=4-3=1$

4. 정답 ②

점 P$(a,\ b)$가 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$b^2=4a$ …… ㉠

또, 점 P에서의 접선은 $by=2(x+a)$이므로

이 접선이 x축과 만나는 점 Q의 좌표는 Q$(-a,\ 0)$

이때, $\overline{\mathrm{PQ}}=4\sqrt{5}$ 에서 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=80$

$4a^2+b^2=80$, $4a^2+4a=80$ ($\because$ ㉠)

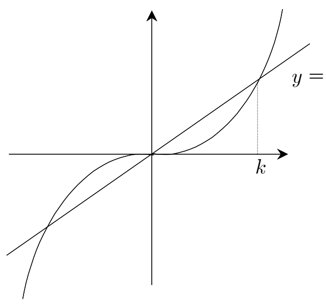
$a^2+a-20=0$, $(a-4)(a+5)=0$

$\therefore\ a=4$ ($\because\ a>0$)

㉠에서 $b^2=16$

$\therefore\ a^2+b^2=16+16=32$

5. 정답 ①



$y=\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$, $y=\frac{2}{3}x$ 는 모두 기함수이므로, $x\geq 0$에서 두 곡선으로 둘러싸인 넓이의 두 배가 구하고자 하는 넓이가 된다. 두 곡선의 교점을 구해보면,

$\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}=\frac{2}{3}x$

$\Rightarrow 3xe^{x^2}=2xe^{x^2}+2x$

$\Rightarrow xe^{x^2}=2x$

$\therefore x=0, e^{x^2}=2$

$e^{x^2}=2\Rightarrow x^2=\ln 2$ 인 x 의 값을 k 라고 하면

$k^2=\ln 2\ \cdots$ ①

넓이 S를 구하면

$S=2(\frac{1}{2}\frac{2}{3}k^2-\int_0^k\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx)$

위 식에서 $\int_0^k\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx$ 을 치환적분을 이용하여

$x^2=t$로 치환하면 $\begin{cases}x=0\text{ 이면 }t=0\\x=k\text{이면 }t=\ln 2\end{cases}$ 이고,

$2x\,dx=dt$ 이므로

$\int_0^k\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}\frac{e^t}{e^t+1}dt$

$=\frac{1}{2}[\ln(e^t+1)]_0^{\ln 2}=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 2)$ 임을 알 수 있다.

따라서 $S=\frac{5}{3}\ln 2-\ln 3$

6.답 ②

점 P의 좌표를 $(3,\ t,\ 1)$(t는 실수)로 놓으면

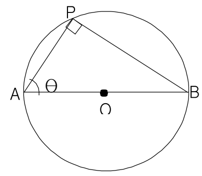
$\overline{OP}=\sqrt{3^2+t^2+1^2}=\sqrt{t^2+10}$ 이므로

$t=0$일 때, $\overline{OP}$의 최소값은 $\sqrt{10}$ 이다.

7. 정답 ⑤

ㄴ. $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$
$=P(B)\cdot P(A|B)$

8.정답 ⑤



$\overline{\mathrm{AB}}$ 가 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$ 에서

$10^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+8^2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}=6$

또, $\overline{\mathrm{AB}}$ 와 $\overline{\mathrm{AP}}$ 가 이루는 각을 Θ 라고 하면

$\cos\Theta=\frac{6}{10}$ 따라서,

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=10\cdot 6\cdot\cos\Theta=36$

9. 정답 ④

A가 2개의 동전을 던져서 앞면이 한 개 나오고, B가 동전을 한 번 던져서 앞면이 한 번 나올 확률은

$\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

A가 2개의 동전을 던져서 앞면이 두 개 나오고, B가 동전을 두 번 던져서 앞면이 한 번 나올 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\frac{1}{3}$

10.정답 ④

$\int_0^2 xf(tx)dx=4t^2$에서

$tx=y$로 놓으면

$t=\frac{dy}{dx}$ 에서 $dx=\frac{dy}{t}$

$x=0$일 때, $y=0$

$x=2$일 때, $y=2t$

이므로

$\int_0^2 xf(tx)dx=\int_0^{2t}\frac{y}{t}f(y)\frac{dy}{t}$

$=\frac{1}{t^2}\int_0^{2t}yf(y)dy=4t^2$

$\therefore\ \int_0^{2t}yf(y)dy=4t^4$

양변을 t에 관하여 미분하면

$2tf(2t)\times(2t)'=16t^3$

$\therefore f(2t)=4t^2$, $\therefore\ f(2)=4$

11. 답 ④

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)=1$이므로

확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	2	계
$\mathrm{P}(X)$	a	b	1

$E(X)=2b$이고 $E(X^2)=2^2b=4b$ 이므로

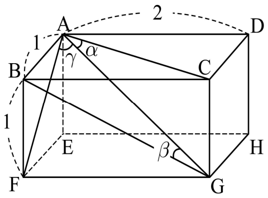
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=4b-4b^2$

따라서 $\{E(X)\}^2=2V(X)$ 에서

$4b^2=2\times(4b-4b^2)$, $b=2-2b$

$\therefore\ P(X=2)=b=\dfrac{2}{3}$

12. 정답 ③



$\overline{AB}=\overline{BF}=1$, $\overline{AD}=2$ 이므로

$\overline{AF}=\sqrt{2}$, $\overline{BG}=\sqrt{5}$, $\overline{AC}=\sqrt{5}$, $\overline{AG}=\sqrt{6}$

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt5}{\sqrt6}$, $\cos\beta=\dfrac{\sqrt5}{\sqrt6}$,

$\cos\gamma=\dfrac{\sqrt2}{\sqrt6}$ $\quad\therefore\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$

13. 답 ③

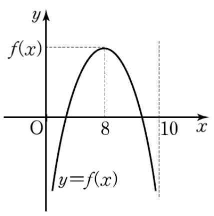
$f'(x)=\dfrac{4}{x}+\dfrac{-1}{10-x}=\dfrac{-5(x-8)}{x(10-x)}$

진수 조건에서 $0<x<10$이므로

$f(x)$는 $x=8$에서 극대이고 최대이다.

또, $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to10-0}f(x)=-\infty$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



ㄱ. 최대값은 $f(8)=13\ln2$ (참)

ㄴ. 위 그래프에서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두

실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $f(x)=\ln x^4(10-x)$이므로

$y=e^{f(x)}=x^4(10-x)=10x^4-x^5$

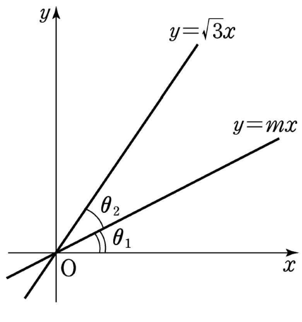
$y'=40x^3-5x^4$, $y''=120x^2-20x^3$

$\therefore\ y''=20x^2(6-x)$

따라서 $0<x<6$에서 $y''>0$이므로

$y=e^{f(x)}$는 아래로 볼록하다. (거짓)

14.정답 ①



$\tan(\theta_1+\theta_2)=\sqrt3$

$\therefore\ \theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{3}$

$\tan\theta_1=m$ 이므로

$\therefore\ 3\sin\theta_1+4\sin\theta_2=3\sin\theta_1+4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta_1\right)$

$=3\sin\theta_1+4\left(\dfrac{\sqrt3}{2}\cos\theta_1-\dfrac{1}{2}\sin\theta_1\right)$

$=\sin\theta_1+2\sqrt3\,\theta_1$

$=\sqrt{13}\sin(\theta_1+\alpha)$

$\left(\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{13}},\ \sin\alpha=\dfrac{2\sqrt3}{\sqrt{13}}\right)$

최대가 되는 θ_1 은 $\theta_1=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 이므로

$m=\tan\theta_1=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$

$=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{2\sqrt3}=\dfrac{\sqrt3}{6}$

15. 정답 ②

$P(X\geqq x)=P\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\geqq\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$

$=P\left(Z\geqq\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$

$P(Y\geqq y)=P\left(\dfrac{Y-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\geqq\dfrac{y-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right)$ 이므로

$=P\left(Z\geqq\dfrac{y-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right)$

(가)에서 $-\dfrac{m}{\sigma}=-\dfrac{am}{\sqrt{b}\,\sigma}$ $\quad\therefore\ a=\sqrt{b}$ ....①

(나)에서 $1=P(X\leqq1)+P(Y\geqq2)$

$=P\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\leqq\dfrac{1-m}{\sigma}\right)+P\left(\dfrac{Y-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\geqq\dfrac{2-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right)$

$=P\left(Z\leqq\dfrac{1-m}{\sigma}\right)+P\left(Z\geqq\dfrac{2-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right)$

이므로 $\dfrac{1-m}{\sigma}=\dfrac{2-am}{\sqrt{b}\,\sigma}$ ....②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$ 이다

16. 답 ④

$f(x)=\displaystyle\int_a^x\{2+\sin(t^2)\}dt$에서

$f'(x)=2+\sin x^2$이고

$f''(x)=\cos x^2(2x)=2x\cos x^2$이다.

이때 $f''(a)=2a\cos a^2=\sqrt3\,a$에서

$\cos a^2=\dfrac{\sqrt3}{2}$

$\therefore\ a^2=\dfrac{\pi}{6}$

한편, $f^{-1}(0)=b$로 놓으면

$f(b)=\displaystyle\int_a^b\{2+\sin(t^2)\}dt=0$에서 $b=a$이다.

이때 $f'(b)=f'(a)=2+\sin a^2$

$=2+\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5}{2}$ 이므로

$(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(b)}=\dfrac{2}{5}$

17. 정답 ②

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$의

일반항은 ${}_n\mathrm{C}_r\,x^{n-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_n\mathrm{C}_r\,x^{n-2r}$이므로

$n-2r=2$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$에서

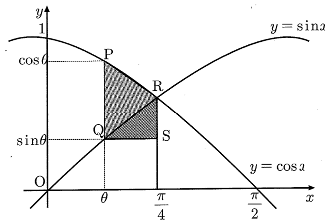
$n=3,\ 5$일 때, $n-2r=2$를 만족하는 정수 r의 값이 존재하지 않으므로 x^2항은 존재하지 않는다.

$n=2,\ 4,\ 6$일 때, $n-2r=2$를 만족하는 r의 값은 각각 $0,\ 1,\ 2$이므로, x^2 항의 계수는

${}_2\mathrm{C}_0+{}_4\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2=1+4+15=20$이다.

18. 정답 ②

초월함수의 극한값 의 활용하기



$\triangle PQR=\dfrac{1}{2}(\cos\theta-\sin\theta)\times\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=f(\theta)$

$\triangle QSR=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)\times\left(\dfrac{1}{\sqrt2}-\sin\theta\right)=g(\theta)$

$\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{f(\theta)}{g(\theta)}=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot(\cos\theta-\sin\theta)\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt2}-\sin\theta\right)}$

$=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\theta-\frac{1}{\sqrt2}}$

$=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt2\sin\theta-1}$

$\theta-\dfrac{\pi}{4}=t$라 하면

$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{2\sin t}{\sqrt2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-1}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{2\sin t}{\sin t+\cos t-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{2}{1+\dfrac{\cos t-1}{\sin t}}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{2}{1+\dfrac{-\sin^2t}{\sin t(\cos t+1)}}=2$

19. 답 ⑤

$y=g(x)$가 $f(x)$의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선이므로

$g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$

또, $g(x)$가 점 $B(b,\ f(b))$에서 $f(x)$에 접하므로

$f'(a)=g'(b)=f'(b)$

$h(x)=f(x)-g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

ㄱ. $h'(b)=f'(b)-g'(b)=0$

ㄴ. $h(a)=h(b)=0$이고 $h(x)$가 미분가능하므로

로올의 정리에 의하여, $h'(c)=0$인 c가 개구간 $(a,\ b)$

에 적어도 하나 존재한다.

∴ $h'(a)=h'(b)=h'(c)=0$이므로

$h'(x)=0$은 적어도 3개의 실근을 갖는다.

ㄷ. $h''(x)=f''(x)$이고, $h''(a)=f''(a)=0$이다.

또한, 점 $(a,\ f(a))$는 $y=f(x)$의 변곡점이므로

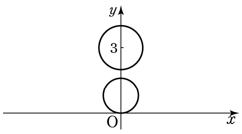
$f''(x)$는 $x=a$의 좌우에서 부호가 반대이다.

따라서, $h''(x)$도 같으므로

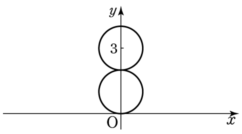
$(a,\ h(a))$는 $h(x)$의 변곡점이다.

20. 답 ④

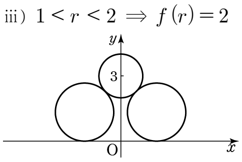
i) $0<r<1 \Rightarrow f(r)=0$



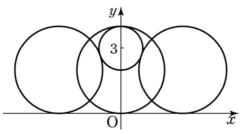
ii) $r=1 \Rightarrow f(r)=1$



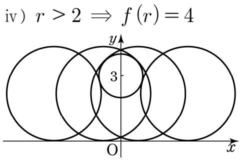
iii) $1<r<2 \Rightarrow f(r)=2$



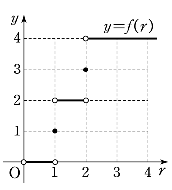
iv) $r=2 \Rightarrow f(r)=3$



iv) $r>2 \Rightarrow f(r)=4$



$$f(r)=\begin{cases}0 & (0<r<1)\\ 1 & (r=1)\\ 2 & (1<r<2)\\ 3 & (r=2)\\ 4 & (r>2)\end{cases}$$



그래프에서

ㄱ. $f(2)=3$

ㄴ. $\lim_{r\to 1+0} f(r)=2\neq f(1)=1$

ㄷ. 그래프에서, 구간 (0, 4)에서 불연속점은 2개 ($r=1,\ 2$일 때)

21. 정답 ⑤

ㄱ. $\overline{AB}$의 원의 지름이고, ∠APB = 90°이므로 내적은 0이다. (참)

ㄴ. △ABC에서 $\overline{AN}$은 ∠CAB의 이등분선이므로 $\overline{BA} : \overline{AC} = \overline{BN} : \overline{NC} = 3 : 1$이다.

따라서 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$이다. (참)

ㄷ. $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$라 하자.

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BQ}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}\cdot(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB})=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}\cdot(t\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB})=0$

$\Leftrightarrow$

$\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)\cdot\left\{t\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\vec{b}\right\}=0$

$\Leftrightarrow (2t-3)(\vec{b}\cdot\vec{c}+3)=0$

$\vec{b}\cdot\vec{c}>0$이므로, $t=\frac{3}{2}$이다.

따라서, $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AM}$이다. (참)

22. 답 16

양변에 $x=1$을 대입하면 $1-2a+a=0$

∴ $a=1$

양변을 미분하면 $f(x)=3x^2-4x+1$

∴ $f(3)=16$

23. 정답 11

$2\sin x\cos x+2\sin^2 x=0$

$2\sin x(\sin x+\cos x)=0$

$2\sqrt{2}\sin x\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$0\le x\le\pi$ 이므로

$x=0,\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi$ ∴모든 실근의 합은 $\frac{7}{4}\pi$

$p+q=11$

24.답 15

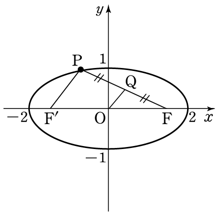
$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=1$에서, $\overline{FP}$의 중점을 Q라고 하면

$\left|\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}}{2}\right|=|\overrightarrow{OQ}|=\frac{1}{2}$

한편, $\overrightarrow{F'P}\,//\,\overrightarrow{OQ}$이므로 $|\overrightarrow{F'P}|=\overline{PF'}=1$이다.

$\overline{PF'}+\overline{PF}=4$이므로, $\overline{PF}=k=3$

∴ $5k=15$



25. 답 27

포물선 $y^2=12x$에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은 $y=x+3$이므로 $a=3$

포물선 $y^2=12x$와 직선 $y=x+3$의 접점의 x좌표를

구하면 $(x+3)^2=12x$에서 $x^2-6x+9=0$,

$(x-3)^2=0$ ∴ $x=3$

따라서 구하는 회전체의 부피는

$\pi\int_0^3(x+3)^2dx-\pi\int_0^3 12x\,dx$

$=\pi\int_0^3(x^2-6x+9)dx$

$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_0^3=9\pi$

∴ $b=9$

∴ $ab=3\cdot 9=27$

26. 정답 9

[출제의도] 매개변수로 표시된 곡선의 길이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\frac{dx}{dt}=-9\sin t+9\sin 9t,\ \frac{dy}{dt}=9\cos t-9\cos 9t$

이므로

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=18\sqrt{\frac{1-\cos 8t}{2}}=18\sin 4t$

따라서

$s=\int_0^{\frac{\pi}{8}}18\sin 4t\,dt=\frac{9}{2}$, ∴ $2a=9$

27. 답 225

모비율 p에 대한 신뢰구간

$\left[\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}},\ \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}}\right]$

이 때, 주어진 신뢰구간이 [0.701, 0.799] 이므로

신뢰구간의 양끝 값을 더하면

$2\hat{p}=0.701+0.799$

∴ $\hat{p}=0.75$

300명의 학생 중에서 오전 8시 이전에 등교한 학생수

를 X라 하면 $\hat{p}=\frac{X}{300}$이므로 $\frac{X}{300}=0.75$

∴ $X=225$

28. 정답 30

네 학생 A, B, C, D의 수학책을 각각 a, b, c, d라 하면 D가 먼저 A의 교과서 a를 선택하였으므로 A, B, C가 남은 교과서 b, c, d를 선택하는 모든 경우의 수는 ${}_3P_3 = 3!$

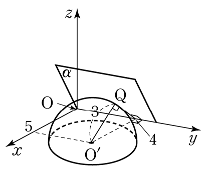
이 때 아무도 자신의 교과서를 선택하지 못할 경우의 수는

(A, B, C) : (b, c, d), (c, d, b), (d, c, b)

로 모두 3 가지이므로 $\frac{q}{p} = \frac{3}{3!} = \frac{1}{2}$

$\therefore 10(p+q) = 10(2+1) = 30$

29. 정답 24



반구의 중심을 O′ 이라 하고, O′ 에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 H(0,4,0) 이므로 $\overline{\mathrm{O'H}}=5$ … ㉠

이 때, y축을 포함하는 평면α와 반구의 접점을 Q 라 하면 $\overline{\mathrm{O'Q}}=3$ … ㉡

또한,$\overline{\mathrm{O'Q}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{O'H}} \perp \overline{\mathrm{OH}}$ 이므로 삼수선의 정리에 의해

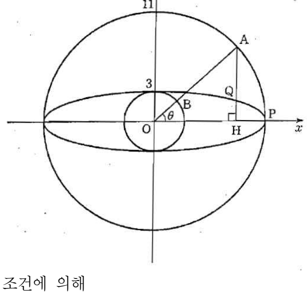
$\overline{\mathrm{OH}} \perp \overline{\mathrm{QH}}$ 이다. $\therefore$ $\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ … ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 α와 xy평면이 이루는 각이 $\Theta=\angle \mathrm{QHO'}$

이므로 $\cos\Theta=\frac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{O'H}}}=\frac{4}{5}$ $\therefore$

$30\cos\Theta=24$

30. 정답 27



조건에 의해

$A(11\cos\theta, 11\sin\theta)$, $B(3\cos\theta, 3\sin\theta)$, $P(11, 0)$, $Q(11\cos\theta, 3\sin\theta)$, $H(11\cos\theta, 0)$ 로 놓을 수 있다.

$\overline{AQ}=8\sin\theta$, $\overline{BQ}=8\cos\theta$, $\overline{PH}=11(1-\cos\theta)$

$\triangle ABQ=S_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{AQ}\cdot\overline{BQ}$

$=\frac{1}{2}\cdot 8\sin\theta\cdot 8\cos\theta=16\sin2\theta$

$\triangle APQ=S_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{AQ}\cdot\overline{PH}$

$=\frac{1}{2}\cdot 8\sin\theta\cdot 11(1-\cos\theta)$

$=44\sin\theta(1-\cos\theta)$

$$\lim_{\theta\to0}\frac{S_2}{\theta^2\cdot S_1}=\frac{44\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^2\cdot16\sin2\theta}$$

$$=\frac{11}{16}\cdot\frac{2(1-\cos\theta)}{\theta^2}\cdot\frac{\frac{\sin\theta}{\theta}}{\frac{\sin2\theta}{2\theta}}=\frac{11}{16}$$

$\therefore$ $p+q=16+11=27$