12회수학 가형 정답

1	④	2	⑤	3	④	4	⑤	5	①
6	②	7	⑤	8	④	9	④	10	③
11	①	12	④	13	②	14	④	15	④
16	⑤	17	①	18	④	19	③	20	②
21	④	22	25	23	79	24	12	25	12
26	10	27	17	28	20	29	40	30	54

해 설

1. 정답 ④

[출제의도] 삼각함수의 성질을 알고 계산하기

$\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 = \dfrac{1}{8}$

2. 정답 ⑤

[출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f(x) = x\ln x$의 도함수는 $f'(x) = \ln x + 1$이다.

$\therefore\ f'(e) = \ln e + 1 = 2$

3. 정답 ④

[출제의도] 독립사건과 확률의 덧셈정리를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

두 사건

$A,\ B$가 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} + \mathrm{P}(B) - \dfrac{1}{3}\mathrm{P}(B) \qquad \therefore\ \mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}$

4. 정답 ⑤

[출제의도] 정적분의 정리 이해하기

조건Ⅰ의 식을 미분하면

$f(x) = 2f(x)f'(x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2} \qquad \therefore f(x) = \dfrac{1}{2}x + C$

조건Ⅱ의 식에 대입하여 풀면 $C = 25$

따라서 $f(0) = 25$

5. 정답 ①

O에서 직선 AB에 수선을 그어 만나는 점을 N이라 하자.

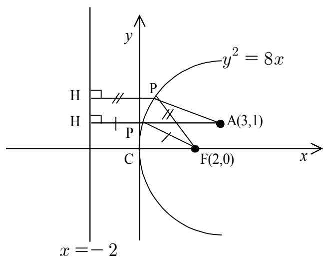
$\overline{PO}\perp xy$평면, $\overline{ON}\perp\overline{AB}$ ⇒ 삼수선의 정리에 의해 $\overline{PN}\perp\overline{AB}$

점 P에서 직선 AB에 이르는 거리 $l = \overline{PN}$이다.

$\overline{PN} = \sqrt{\overline{PO}^2 + \overline{ON}^2} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

($\overline{ON}\cdot\overline{AB} = \overline{OA}\cdot\overline{OB} \Rightarrow \overline{ON}\cdot 2 = 1\cdot\sqrt{3}$)

6.정답 ②



그림에서 $\overline{FP} = \overline{PH}$

$\overline{AP} + \overline{FP} = \overline{AP} + \overline{PH} \geq \overline{P'A} + \overline{H'P'} = \overline{H'A}$

$= |3-(-2)| = 5$

$\therefore m^2 = 25$

7. 정답 ⑤

[출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 문제해결하기

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2\sin 2x}{1-\cos x} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x\cos x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\cos x(1+\cos x)\frac{x}{\sin x} = 4$$

8.정답 ④

[출제의도] 확률변수의 평균과 분산을 구할 수 있는 가를 묻는 문제이다.

$a + \dfrac{1}{3} + b = 1$에서 $a + b = \dfrac{2}{3}$

$E(X) = -a + b,\ E(X^2) = a + b = \dfrac{2}{3}$이므로

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

$= \dfrac{2}{3} - (-a+b)^2 = \dfrac{5}{12}$

$\therefore\ (a-b)^2 = \dfrac{1}{4}$

9. 정답 ④

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이해하기

$y = \dfrac{\pi}{3} - x$이므로

(준식) $= \sqrt{3}\cos x + 2\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$

$= 2\sqrt{3}\cos x - \sin x$

$= \sqrt{13}\sin(\alpha - x)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{39}}{13},\ \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{13}}{13}\right)$

따라서 최댓값은 $\sqrt{13}$

10. 정답 ③

[출제의도] 조건부 확률 이해하기

투표 전 \ 투표 결과	갑에게 투표	을에게 투표
갑 지지	0.28	0.42
을 지지	0.15	0.15
계	0.43	0.57

을에게 투표한 학생이 선택된 사건을 C, 투표 전과 후에 지지했던 후보를 바꾸지 않은 학생이 선택된 사건을 D라 하면, 구하고자 하는 확률은

$\mathrm{P}(D|C) = \dfrac{\mathrm{P}(C\cap D)}{\mathrm{P}(C)} = \dfrac{0.15}{0.42+0.15} = \dfrac{5}{19}$

11. 정답 ①

[출제의도] 도함수를 이용하여 함수의 증가와 감소 이해하기

조건 (나)에 의하여 $f(x) = ax^2 + b$ 라 하면

$f(0) = -2$ 이므로 $b = -2$

$f(x) = ax^2 - 2$, $f'(x) = 2ax$

$f(f'(x)) = f'(f(x))$ 이므로 $a = \dfrac{1}{2}$ 이다.

따라서 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2$ 이다.

$F(x)$ 가 감소하는 구간은 부등식 $F'(x) < 0$

즉, $f(x) < 0$ 을 만족하는 구간이므로

$\dfrac{1}{2}x^2 - 2 < 0$, $-2 < x < 2$

$\therefore$ 감소하는 구간의 길이는 4

12. 정답 ④

$ABED$ 와 면 $ACFD$ 가 이루는 이면각의 크기를 θ라 하면,

$\theta = \angle\mathrm{BAC}$ 이다. $\cos\theta = \dfrac{7^2+7^2-4^2}{2\cdot 7\cdot 7} = \dfrac{41}{49}$

따라서, 정사영의 넓이는

$\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AD}}\cdot\cos\theta = 7\cdot 14\cdot\dfrac{41}{49} = 82$

13. 정답 ②

두 변 OA, OB가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 6\cos\theta = 2$ 에서

$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ (넓이)$= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = 4\sqrt{2}$

14. 정답 ④

$f_n(x) = \left(nx - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = (nx - S_n)^2$

ㄱ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$라 하면 $f_n(1) - f_n(0) = -n^3$ 에서

$(n - S_n)^2 - S_n^2 = -n^3,\ \ S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (참)

ㄴ. $n = 2$일 때, $f_2(x) = (2x-3)^2$

$\therefore\ f_2(2) = 1$ (거짓)

ㄷ. $f_n(x) = \left\{nx - \dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$는 $x = \dfrac{n+1}{2}$에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^{n+1} f_n(x)dx = 2\int_0^{\frac{n+1}{2}} f_n(x)dx \text{ (참)}$$

15. 정답 ④

$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=10$이므로 $a=5$이다.
$y^2=4\times 14(x+c)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=14$이다.
$\overline{\mathrm{AF'}}:\overline{\mathrm{FF'}}=1:6$이므로 $\overline{\mathrm{AF'}}=2,\ \overline{\mathrm{FF'}}=12$ 이다.

$$\frac{c^2}{a^2-b^2}=\frac{64}{25-11}=\frac{32}{7}$$

16. 정답 ⑤

$$E(T)=E\left(\frac{a(X-m)}{\sigma}+b\right)=\frac{aE(X)}{\sigma}-\frac{am}{\sigma}+b$$
$$=\frac{am}{\sigma}-\frac{am}{\sigma}+b=b=100$$
$$\sigma(T)=\sigma\left(\frac{a(X-m)}{\sigma}+b\right)=\frac{|a|\sigma(X)}{\sigma}$$
$$=\frac{|a|\sigma}{\sigma}=|a|=20$$

$\therefore\ a=20\ (\because a>0)\quad \therefore\ a+b=120$

17. 정답 ①

[출제의도] 벡터의 내적에 관한 성질을 알고 선분의 길이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\frac{x}{2}=-y=-\frac{z}{2}=t$로 놓고 평면의 방정식에 대입하면
$t=-1$ $\therefore$ $\mathrm{A}(-4,2,4)$
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$이다.
따라서 점 P는 선분 OA를 지름으로 하는 구 위의 점이고, 이 구의 중심의 좌표는 $(-2,1,2)$, 반지름의 길이는 3이므로 구하는 최댓값은

$$\frac{|-2+1+2-2|}{\sqrt{3}}+3=3+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

18. 정답 ④

한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정육각형에 내접하는 원의 반지름의 길이는 3 이므로 t 초후의 반지름의 길이는 $3=2t$ 이다.
따라서 원의 넓이를 S 라 하면 $S(t)=\pi(3+2t)^2$

$$\frac{dS}{dt}=2\pi((3+2t)\times 2=4\pi(3+2t)$$

따라서 4 초후의 넓이의 증가율은 44π 이다

19. 정답 ③

ㄱ. (참) a_3 은 선택된 4 개의 수 중에서 3 보다 작은 수가 한 개이고, 3 보다 큰 수가 2 개인 경우의 수이므로 $a_3={}_2C_1\times{}_{97}C_2$

ㄴ. (거짓) $a_{10}={}_9C_1\times{}_{90}C_2$, $a_{90}={}_{89}C_1\times{}_{10}C_2$ 이므로 $a_{10}\neq a_{90}$

ㄷ. (참) $\sum_{k=2}^{98}a_k=a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{98}$ 은 1 부터 100 까지의 자연수 중에서 4 개의 수를 뽑는 모든 경우의 수의 합이므로 결국 ${}_{100}C_4$ 와 같게 된다.

20. 정답 ②

삼각형 ABC 의 무게중심 (1, 1, 3) 을 G 라 하자.
D 에서 평면 ABC 에 내린 수선의 발은 삼각형 ABC 의 무게중심 G(1, 1, 3) 이므로
$\overrightarrow{\mathrm{DG}}\perp$(평면 ABC)에서 $\overrightarrow{\mathrm{DG}}\,/\!/\,(2,\ -1,\ 1)$
$\therefore$ D$(1+2t,\ 1-t,\ 3+t)$
D 가 평면 $x+y+z=3$ 위에 있으므로
$1+2t+1-t+3+t=3,\ t=-1$
$\therefore$ D$(-1,\ 2,\ 2)$
D 에서 평면 ABC 까지의 거리는

$$\overline{\mathrm{DG}}=\frac{|-2-2+2-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

정사면체의 한 변의 길이를 a 라 하면

$$\overline{\mathrm{DG}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a=\sqrt{6}$$

$\therefore\ a=3$

21. 정답 ④

[출제의도]정적분과 미분의 관계를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

조건(나)에서

$$\cos x\int_0^x f(t)\,dt=-\sin x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\,dt$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$-\sin x\int_0^x f(t)\,dt+\cos x\cdot f(x)$$
$$=-\cos x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\,dt-\sin x\cdot f(x)$$

등식의 양변에 $x=\frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(t)\,dt+\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}f(t)\,dt-\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(t)\,dt+\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1\ (\because \text{조건(가)})$$
$$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

22.정답 25

[출제의도] 함수의 극한의 정의를 이용하여 주어진 함수의 계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)}{h}=5$ 에서 $f(0)=0$이고 $2f'(0)=5$이므로
$b=0,\ a=\frac{5}{2}$ 이다.

23. 정답 79

[출제의도] 여사건의 확률을 이용하여 문제해결하기

꺼낸 3 개 동전 금액의 합이 250 원 미만일 경우의 수는 50 원짜리 동전 3 개일 경우 1 가지, 50 원짜리 동전 2 개와 100 원짜리 동전 1 개일 경우 ${}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1=9$ 가지이다.
따라서 구하는 확률은

$1-\frac{10}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{37}{42}$ 이므로 $p+q=79$ 이다.

24.[정답 12

[출제의도] 벡터의 내적을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{ED}}$
이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2=4$
따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2=4$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=12$

25.정답 12

함수 $(g\circ f)(x)$가 모든 실수에서 연속이 되기 위하여 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x\to 1+0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 1-0}(g\circ f)(x)$$
$$=(g\circ f)(1)$$

따라서 $|15-a|=|9-a|$를 만족하는 a의 값을 구하면 $a=12$이다.

26. 정답 10

$c\sum_{k=1}^{n}k=1$ 에서 $c=\frac{2}{n(n+1)}$
X의 표준편차가 $\sqrt{6}$ 이므로 X 의 분산 $V(X)$ 는

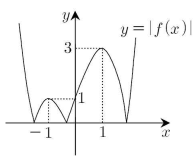
$$V(X)=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot(c\,k)-\left(\sum_{k=1}^{n}k\cdot c\,k\right)^2=6\text{에서}$$
$$c\sum_{k=1}^{n}k^3-\left(\sum_{k=1}^{n}c\,k^2\right)^2=6$$

위 식에 $c=\frac{2}{n(n+1)}$ 를 대입하여 정리하면

$$\frac{2}{n(n+1)}\times\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\left\{\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}^2=6$$
$$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(2n+1)^2}{9}=6,\ n^2+n-110=0$$
$$(n+11)(n-10)=0\ \therefore\ n=10$$

27. 정답 17

$f(x)=x^3-3x-1$에서 $f'(x)=3x^2-3$
따라서 $f'(x)=0$이 되는 x의 값은 ± 1이다.
이때, $f(1)=-3,\ f(-1)=1$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.
따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



[그림2]

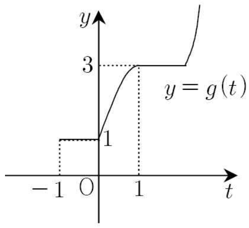
따라서 $-1\leq x\leq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값 $g(t)$는 구간 $[-1,1]$에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g(t)=\begin{cases}1 & (-1\leq t\leq 0)\\ -t^3+3t+1 & (0\leq t\leq 1)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

$\therefore$

$$\int_{-1}^{1}g(t)\,dt=\int_{-1}^{0}g(t)dt+\int_0^1(-t^3+3t+1)dt$$
$$=\int_{-1}^{0}1dt+\int_0^1(-t^3+3t+1)dt$$
$$=[t]_{-1}^{0}+[-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+t]_0^1$$



[그림3]

$$=1+\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+1\right)=\frac{13}{4}$$

$\therefore\ p+q=4+13=17$

28. 답 20

$y=k\cdot 3^x$

$P\cdot Q$의 x좌표를 각각 α, 2α라 놓으면

$3^{-\alpha}=k\cdot 3^{\alpha}$ …… ㉠

$-4\cdot 3^{2\alpha}+8=k\cdot 3^{2\alpha}$ …… ㉡

㉠에서 $k=3^{-2\alpha}$

㉡에 대입하면

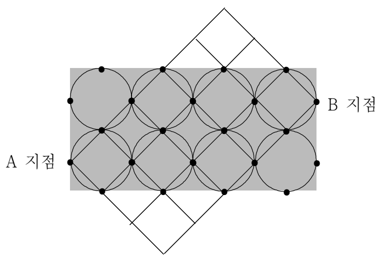
$-4\cdot 3^{2\alpha}+8=3^{-2\alpha}\cdot 3^{2\alpha}=1$

$\therefore\ 3^{2\alpha}=\frac{7}{4}$

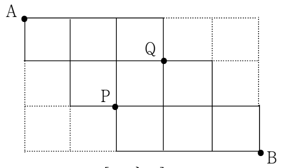
$\therefore\ k=\frac{4}{7}$

$\therefore\ 35k=20$

29. 정답 40



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]에서 A 지점에서 출발하여 산책로를 따라 최단 거리로 B 지점에 도착하는 경우의 수는 [그림 2]에서 A 지점에서 출발하여 실선을 따라 최단 거리로 B 지점에 도착하는 경우의 수와 같다.

(1) A → P → B의 경우

$$\left(\frac{4!}{2!\,2!}-1\right)\times\frac{4!}{3!}=5\times4=20\text{(가지)}$$

(2) A → Q → B의 경우

$$\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{4!}{2!\,2!}-1\right)=4\times5=20\text{(가지)}$$

따라서 구하는 경우의 수는

$20+20=40$(가지)

30. 정답 54

삼각형의 중점연결 정리에 의하여 선분 HG **와** EF **의 길이는 선분** BC **길이의** $\frac{1}{2}$**로 같다. 그리고** BC//HG, BC//EF **이므로 사각형** EFGH **는 평행사변형이다. 그리고** BC **위의 한 점** I **에서** HG **에 수선을 내린 점을** J , EF **에 수선을 내린 점을** K **라 하면 삼수선의 정리에 의하여** BC **와** JK **는 서로 수직이므로** JK **와** EF **는 서로 수직이 된다.**

제 2 **코사인법칙을 이용하면** $\cos\angle ABC=\frac{5}{7}$ **이므로**

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin\angle ABC=6\sqrt{6}$ **이다.**

따라서, $\triangle ABC$ **의 높이는** $2\sqrt{6}$ **이다.**

삼각형 ABC **와 삼각형** DCB **는 서로 합동이므로**

$IJ=IK=$ **삼각형** ABC **의 높이**$\times\frac{1}{2}=\sqrt{6}$ **이 되고 두 삼각형이 이루는 각이** 60° **이므로** IJK **는 정삼각형이다. 사각형** EFGH **는 평행사변형이므로 그 넓이는** EF **의 길이**$\times JK=3\sqrt{6}$ **이 되고 사잇각이** 60° **이므로 구하고자 하는 정사영의 넓이는**

$S=3\sqrt{6}\times\cos 60^\circ=\frac{3}{2}\sqrt{6}$ **이다. 따라서**

$\therefore\ 4S^2=54$