13회수학 가형 정답

1	⑤	*2*	①	*3*	③	*4*	⑤	*5*	③
6	③	*7*	③	*8*	①	*9*	③	*10*	⑤
11	④	*12*	②	*13*	②	*14*	③	*15*	②
16	⑤	*17*	②	*18*	②	*19*	①	*20*	⑤
21	③	*22*	17	*23*	3	*24*	53	*25*	14
26	14	*27*	17	*28*	20	*29*	103	*30*	34

해 설

1. 정답 ⑤

[출제의도] 삼각함수의 배각의 공식 이해하기

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{4}{5}\,(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2})$

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$

따라서 $\sin2\theta=\frac{24}{25}$

2. 정답 ①
[출제의도]함수의 극한값 구하기

$$\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)}{3(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{-1}{3(x+1)}=-\frac{1}{9}$$

3. 정답 ③

[출제의도] 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{13}{25}$$

4. 정답 ⑤

[출제의도] 정적분 이해하기

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2x(\sin x+1)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\cos x(\sin x+1)dx$$

$\sin x=t$로 치환하면 $\cos x\,dx=dt$

$x=0$일 때 $t=0$이고, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^1(2t^2+2t)dt=\left[\frac{2t^3}{3}+t^2\right]_0^1=\frac{5}{3}$$

5. 정답 ③

[출제의도] 확률분포표에서 평균을 구할 수 있는가?

주어진 확률분포표에서 확률의 합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+b=1,\quad a+b=\frac{3}{4}$ ---㉠

또 확률변수 X의 평균 $E(X)=5$이므로

$1\times a+3\times\frac{1}{4}+7\times b=5,\quad a+7b=\frac{17}{4}$ ---㉡

㉡−㉠ 을 계산하면

$6b=\frac{14}{4}\qquad\therefore\ b=\frac{7}{12}$

6. 정답 ③

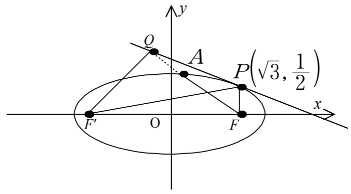
$\overline{QF}$ 와 타원의 교점을 A 라 하면 $\overline{QF}+\overline{QF'}$

$=\overline{QA}+\overline{AF}+\overline{QF'}=(\overline{QA}+\overline{QF'})+\overline{AF}$

$\geq\overline{AF'}+\overline{AF}=\overline{PF'}+\overline{PF}=4$

따라서 $P\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$에서 최소값 4를 갖는다.

$$\therefore\alpha\beta\gamma=\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times4=2\sqrt{3}$$



7. 정답 ③

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하기

주어진 식의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=5(1-2\sin\theta\cos\theta)$

$1+\sin2\theta=5(1-\sin2\theta)$

$\therefore\ \sin2\theta=\frac{2}{3}$

8.정답 ①

출제의도 : 함수의 극한 - 극한값의 계산

준식)$=\lim_{x\to1}\frac{f(f(x))}{(2x-1)(x+1)}$

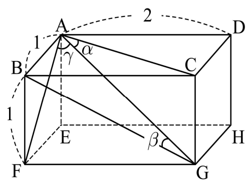
$=\lim_{x\to1}\left(\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x-1}\cdot\frac{1}{2x-1}\right)$(

$f(x)=t$ 라 하면)

$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}\times\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{2x+1}$

$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

9. 정답 ③



$\overline{AB}=\overline{BF}=1$,$\overline{AD}=2$ 이므로

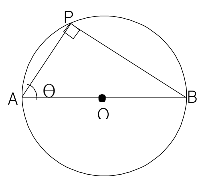
$\overline{AF}=\sqrt{2}$, $\overline{BG}=\sqrt{5}$

$\overline{AC}=\sqrt{5}$, $\overline{AG}=\sqrt{6}$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$,$\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$,

$\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\quad\therefore\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$

10. 정답 ⑤



$\overline{\mathrm{AB}}$ 가 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$ 에서

$10^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+8^2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}=6$

또, $\overline{\mathrm{AB}}$ 와 $\overline{\mathrm{AP}}$ 가 이루는 각을 Θ 라고 하면

$\cos\Theta=\frac{6}{10}$ 따라서,

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=10\cdot6\cdot\cos\theta=36$

11. 정답 ④

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-P(A\cup B)$

$P(A\cap B)\leqq P(B)$

$\therefore\ \frac{5}{12}\leqq P(A\cap B)\leqq\frac{2}{3}$

12. 정답 ②

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수를 미분하기

$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-2\cos\theta\sin\theta$ 이고

$x=1$ 일 때, $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

(접선의 기울기)$=\dfrac{-2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}}{\sec^2\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}$

13. 정답 ②

(회전체의부피)$=\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2)dx-\pi\int_{-1}^{1}(x^2)^2dx$

$=2\pi\int_0^1(2-x^2)dx-2\pi\int_0^1(x^2)^2dx$

$=2\pi\left[2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-2\pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{44}{15}\pi$

14. 정답 ③

[출제의도] 삼각함수의 배각의 공식 활용하기

호 AD 에 대한 원주각이 α 이므로 $\angle\mathrm{AOD}=2\alpha$ 이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$,

$\overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$ 이므로 $\tan2\alpha=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=2$ 이다.

$\tan\alpha=t\,(t>0)$ 라 하면 $\tan2\alpha=\frac{2t}{1-t^2}=2$ 이다.

$\therefore\ t^2+t+1=0$ 에서 $\tan\alpha=t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

15. 정답 ②

ㄱ. $f(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이므로

함수 $\{f(x)\}^2$, $(f\circ f)(x)$ 는 모두 폐구간 $[0,\ 5]$ 에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

$\lim_{x\to3-0}g(x)=\lim_{x\to3-0}\{f(x)\}^2=1^2=1$

$\lim_{x\to3+0}g(x)=\lim_{x\to3+0}(f\circ f)(x)$

$= \lim_{t \to 1-0} f(t) = 2$

$\therefore \lim_{x \to 3-0} g(x) \neq \lim_{x \to 3+0} g(x)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이므로 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이 아니다.

ㄴ. $f(x)$는 폐구간 $[0,\ 3]$에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$는 폐구간 $[0,\ 3]$에서 연속이다.

한편, 함수 $f(x)$는 $x \neq 4$인 모든 x에서 연속이므로 합성함수 $(f \circ f)(x)$는 $x \neq 4$이고 $f(x) \neq 4$인 x에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 $x=4$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

(i) $x=3$에서의 연속성

$\lim_{x \to 3-0} g(x) = \lim_{x \to 3-0} \{f(x)\}^2 = 2^2 = 4$

$\lim_{x \to 3+0} g(x) = \lim_{x \to 3+0} (f \circ f)(x)$

$= \lim_{t \to 2-0} f(t) = 4$

$g(3) = \{f(3)\}^2 = 2^2 = 4$

$\therefore \lim_{x \to 3-0} g(x) = \lim_{x \to 3+0} g(x) = g(3)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $x=4$에서의 연속성

$\lim_{x \to 4-0} g(x) = \lim_{x \to 4-0} (f \circ f)(x)$

$= \lim_{t \to +0} f(t) = 3$

$\lim_{x \to 4+0} g(x) = \lim_{x \to 4+0} (f \circ f)(x)$

$= \lim_{t \to 1+0} f(t) = 3$

$g(4) = f(f(4)) = f(0) = 3$

$\therefore \lim_{x \to 4-0} g(x) = \lim_{x \to 4+0} g(x) = g(4)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)$는 폐구간 $[0,\ 3]$에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$는 폐구간 $[0,\ 3]$에서 연속이다.

한편, 함수 $f(x)$는 $x \neq 4$인 모든 x에서 연속이므로 합성함수 $(f \circ f)(x)$는 $x \neq 4$이고 $f(x) \neq 4$인 x에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 $x=4$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

(i) $x=3$에서의 연속성

$\lim_{x \to 3-0} g(x) = \lim_{x \to 3-0} \{f(x)\}^2 = 2^2 = 4$

$\lim_{x \to 3+0} g(x) = \lim_{x \to 3+0} (f \circ f)(x)$

$= \lim_{t \to 2-0} f(t) = 4$

$g(3) = \{f(3)\}^2 = 2^2 = 4$

$\therefore \lim_{x \to 3-0} g(x) = \lim_{x \to 3+0} g(x) = g(3)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $x=4$에서의 연속성

$\lim_{x \to 4-0} g(x) = \lim_{x \to 4-0} (f \circ f)(x)$

$= \lim_{t \to +0} f(t) = 2$

$\lim_{x \to 4+0} g(x) = \lim_{x \to 4+0} (f \circ f)(x)$

$= \lim_{t \to 1+0} f(t) = 3$

$\therefore \lim_{x \to 4-0} g(x) \neq \lim_{x \to 4+0} g(x)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 불연속이므로 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이 아니다.

이상에서 함수 $g(x)$가 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$의 그래프는 ㄴ이다.

16. 정답 ⑤

ㄱ. $|\overrightarrow{\mathrm{CB}} - \overrightarrow{\mathrm{CP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로

선분 PB 의 길이는 점 P 가 점 A와 일치할 때 최소이다.

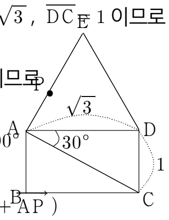
따라서, 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB}} = 1$ 이다. (참)

ㄴ. $\triangle \mathrm{ACD}$ 에서 $\overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{DC}} = 1$ 이므로

$\angle \mathrm{CAD} = 30°$

$\triangle \mathrm{EAD}$ 가 정삼각형이므로

$\angle \mathrm{EAD} = 60°$



$\therefore \angle \mathrm{EAC} = \angle \mathrm{PAC} = 90°$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{CA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{CA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} \bullet (\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}})$

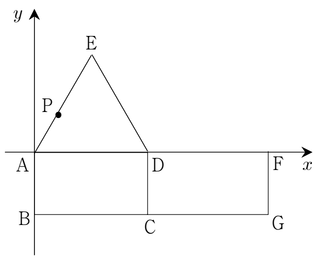
$= \overrightarrow{\mathrm{CA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$= |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2 + 0$

$= 2^2 = 4$ (참)

ㄷ. 점 A를 원점, 직선 AD를 x축으로 하는 좌표평면에 주어진

도형을 나타내면 그림과 같다.



$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{DF}}$ 인 x축 위의 점을 F 라 하고

직사각형 DCGF 를 그리면

$\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{GC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{GP}}$

이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|$의 최솟값은 점 $\mathrm{G}(2\sqrt{3},\ -1)$ 에서

직선 AE 에 이르는 거리와 같다.

직선 AE 의 방정식은 $y = \sqrt{3}x$ 즉, $\sqrt{3}x - y = 0$ 이므로

구하는 최솟값은 $\dfrac{|\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} - (-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \dfrac{7}{2}$ (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17. 정답 ②

$A(0,\ 4)$, $B(0,\ 8)$ 라 하자.

OA를 한 변으로 하는 사각형은 $(4,\ 0)$ 또는 $(8,\ 0)$을 한 꼭짓점으로 하고 나머지 한 꼭짓점을 $(4,\ 4)$, $(4,\ 8)$, $(8,\ 4)$, $(8,\ 8)$로 하면 되므로 8가지,

OB를 한 변으로 하는 사각형은 $(4,\ 0)$ 또는 $(8,\ 0)$을 한 꼭짓점으로 하고 나머지 한 꼭짓점을 $(4,\ 4)$, $(4,\ 8)$, $(8,\ 4)$, $(8,\ 8)$로 하면 되는데, 그 중 $(8,\ 0)$, $(4,\ 4)$을 꼭짓점으로 하면 삼각형이 되므로 그 경우를 제외하면 7가지이다.

따라서 전체 경우는 $8 + 7 = 15$가지이다.

18. [정답] ②

[해설]

집에서 시장까지의 거리를 확률변수 X라 하면

X는 정규분포 $N(1740,\ 500^2)$을 따른다.

따라서, $\mathrm{P}(X \geq 2000)$

$= \mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{2000 - 1740}{500}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \geq 0.52) = 0.3$

여기에서 집에서 시장까지의 거리와 자가용 이용에 관한 표를 만들면

	자가용 이용	자가용 이용 안 함	계
$2000m$ 미만	0.05×0.7	0.95×0.7	0.7
$2000m$ 이상	0.15×0.3	0.85×0.3	0.3
계			1

따라서, $\dfrac{0.05 \times 0.7}{0.05 \times 0.7 + 0.15 \times 0.3} = \dfrac{35}{80} = \dfrac{7}{16}$

19. [정답] : ①

$P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$

에서

$\dfrac{-a+2}{10} + \dfrac{2}{10} + \dfrac{a+2}{10} + \dfrac{2a+2}{10} = 1$

$\dfrac{2a+8}{10} = 1 \qquad \therefore a = 1$

$E(X) = -1 \times \dfrac{1}{10} + 0 \times \dfrac{2}{10} + 1 \times \dfrac{3}{10} + 2 \times \dfrac{4}{10} = 1$

$E(X^2) = (-1)^2 \times \dfrac{1}{10} + 0^2 \times \dfrac{2}{10} + 1^2 \times \dfrac{3}{10} + 2^2 \times \dfrac{4}{10} = 2$

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 1$

$\therefore V(3X+2) = 3^2 \cdot V(X) = 9$

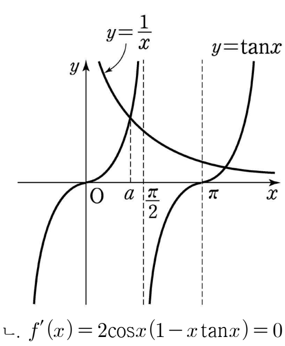
20. 정답 ⑤

ㄱ. $f(x) = 2x\cos x$ 에서

$f'(x) = 2\cos x - 2x\sin x$

$f'(a) = 2\cos a - 2a\sin a = 0$

$\therefore \tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a} = \dfrac{\sin a}{a\sin a} = \dfrac{1}{a}$ (참)



ㄴ. $f'(x) = 2\cos x(1 - x\tan x) = 0$ 에서

$\cos x = 0$ 또는 $\tan x = \dfrac{1}{x}$

$\tan x = \dfrac{1}{x}$ 의 근을 a 라 하면 $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$

증감표를 그려보면

	0		a		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x$	2	$+$	0	$-$	0	$-$	-2
$f(x)$	0	↗	$2a\cos$	↘	0	↘	-2π

$\therefore\ f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 가진다.

구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $y=\frac{1}{x}$ 은 감소함수, $y=\tan x$ 는 증가함수이므로

$g(x)=\tan x-\frac{1}{x}$ 은 증가함수 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{4}{\pi}<0,$

$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{3}{\pi}>0$ 이므로

중간값 정리에 의해 $\frac{\pi}{4}<a<\frac{\pi}{3}$ $\therefore$ (참)

ㄷ. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{1}{2}>1$ 이므로 $f(a)>1$

$\therefore$ 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 $f(x)=1$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

21. 정답] ③

[해설]주어진 조건 (가), (나), (다)에 의하여 구간 $(0,1)$ 에서 $f(x)=e^x$ 임을 알 수 있다.

그런데 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속이다.

따라서 구간 $1\le x<2$에서 $f(e)=1,\ f'(1)=e$ 이고 (나) 조건에 의하여

$f'(x)$는 증가하는 함수이므로 $e=f'(1)\le f'(x)$ 이다.

이 때, $1\le x<2$인 구간에서 이 식의 야변을 적분하면

$\int_1^x e\,dx\le\int_1^x f'(x)dx$ 즉 $ex\le f(x)$이므로 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_1^2 e\,xdx\le\int_1^2 f(x)dx$$

$$\therefore\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$

$$\ge\int_0^1 e^x dx+\frac{3e}{2}=\frac{5e}{2}-1$$

딸서 구하는 최솟값은 $\frac{5e}{2}-1$이다

22. 정답 17

$\vec{a}\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=(1,-2)\cdot(5,-6)$
$=5+12=17$

23. 정답 3

[출제의도] 삼각방정식의 해 구하기

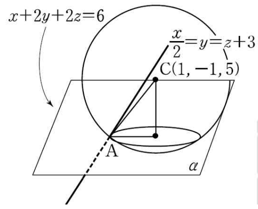
$\cos x=t(-1\le t\le 1)$라 하면

$\cos 2x-2\cos x=2t^2-2t-1$

$2t^2-2t-1=k$가 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위는 $-\frac{3}{2}\le k\le 3$이다.

따라서 k의 최댓값은 3

24.[정답] 53



$\frac{x}{2}=y=z+3=t$ 라 하면

$A=(2t,\ t,\ t-3)$ 이고 점 A 가 평면 α 위의 점이므로 $2t+2t+2(t-3)=6$, $6t=12$, $\therefore\ t=2$

$\therefore\ A(4,\ 2,\ -1)$

$\overline{AC}=\sqrt{(4-1)^2+(2+1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{54}$

한편 중심에서 $(1,\ -1,\ 5)$ 에서 평면까지의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|1-2+10-6|}{\sqrt{1+4+4}}=1$$

따라서 구와 평면이 만나서 생기는 원의 반지름 r 는

$r=\sqrt{\overline{AC}^2-d^2}=\sqrt{54-1}=\sqrt{53}$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면 $S=53\pi$

$\therefore\ k=53$

25.정답 14

$\frac{4}{7},\ a,\ b$가 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=\frac{4}{7}b$ ⋯①

또, 확률의 합은 1이므로

$\frac{4}{7}+a+b=1$ ⋯②

②에서 $b=\frac{3}{7}-a$를 ①에 대입하여 정리하면

$a^2=\frac{4}{7}\left(\frac{3}{7}-a\right)$

$49a^2+28a-12=0$

$(7a+6)(7a-2)=0$

$\therefore\ a=\frac{2}{7}$ ($\because\ a\ge 0$), $b=\frac{1}{7}$ ($\because$② 확률의 합이 1)

평균은

$k\cdot\frac{4}{7}+2k\cdot a+4k\cdot b=k\left(\frac{4}{7}+2\cdot\frac{2}{7}+4\cdot\frac{1}{7}\right)$

$=\frac{12k}{7}$

이 때, 평균이 24이므로

$\therefore\ k=14$

26. 정답 14

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 타원의 장축과 단축의 길이는 각각 $2(10-r)$, $2(6-r)$이므로 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{(10-r)^2}+\frac{y^2}{(6-r)^2}=1$ 이다. 타원의 두 초점사이의 거리가 $4\sqrt{10}$ 이므로

$(10-r)^2-(6-r)^2=(2\sqrt{10})^2$ $\therefore\ r=3$

따라서 타원의 장축의 길이는 $2(10-3)=14$이다.

27. [정답 17

$\angle QOB=\theta$이므로 (동위각)

$\overline{OR}=\overline{OB}cos\theta=\cos\theta$

$\overline{QR}=1-\overline{OQ}=1-\cos\theta$에서

$$\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\frac{\pi\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2}{\theta^4}$$

$\frac{1-\cos\theta}{2}=\sin^2\frac{\theta}{2}$ 이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\pi\sin^4\frac{\theta}{2}}{\theta^4}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\pi\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\right)^4=\frac{1}{16}\pi$$

$p+q=17$

28. 답 20

$y=k\cdot 3^x$

$P\cdot Q$의 x좌표를 각각 $\alpha,\ 2\alpha$라 놓으면

$3^{-\alpha}=k\cdot 3^{\alpha}$ …… ㉠

$-4\cdot 3^{2\alpha}+8=k\cdot 3^{2\alpha}$ …… ㉡

㉠에서 $k=3^{-2\alpha}$

㉡에 대입하면

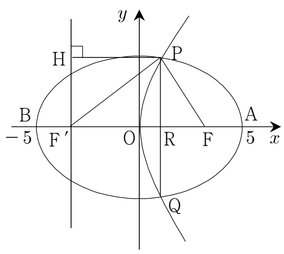
$-4\cdot 3^{2\alpha}+8=3^{-2\alpha}\cdot 3^{2\alpha}=1$

$\therefore\ 3^{2\alpha}=\frac{7}{4}$

$\therefore\ k=\frac{4}{7}$

$\therefore\ 35k=20$

29. **정답** 103



$\overline{\mathrm{PF'}}=m$, $\overline{\mathrm{PF}}=n$ 이라 하면

타원의 정의에 의해

$m+n=10$ ⋯ ㉠

선분 PQ와 x축의 교점을 R 라 하면

$\overline{\mathrm{PR}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{10}$

직각삼각형 PF′R 에서

$\overline{\mathrm{F'R}}=\sqrt{m^2-10}$

점 F′을 지나고 x축에 수직인 직선을 l 이라 하면 l 은 포물선의 준선이고,

점 P 에서 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 포물선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}$

이다.

$\overline{PF} = \overline{PH} = \overline{F'R} = \sqrt{m^2 - 10}$ 이므로

$n = \sqrt{m^2 - 10}$ 에서

$n^2 = m^2 - 10 \quad \cdots$ ㉡

㉠에서 $n = 10 - m$ 이므로 ㉡에 대입하면

$(10 - m)^2 = m^2 - 10$

$m^2 - 20m + 100 = m^2 - 10$

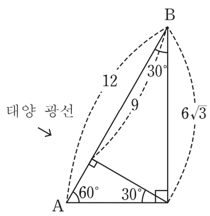
$20m = 110$, $m = \dfrac{11}{2}$

$n = 10 - m = \dfrac{9}{2}$

$\therefore\ mn = \dfrac{11}{2} \times \dfrac{9}{2} = \dfrac{99}{4}$

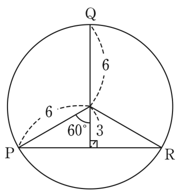
$\therefore\ p + q = 4 + 99 = 103$

30. **정답** 34



원관과 평면 α 와의 교점을 A, 원관과 평면 β 와의 교점을 B라 하면 평면 β 위에 그림자가 생기는 원관의 부분은

활꼴 PQR이다.



활꼴 PQR의 넓이는

$$36\pi \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \sin 120° = 24\pi + 9\sqrt{3}$$

$$S \cdot \cos 30° = 24\pi + 9\sqrt{3} \qquad \Rightarrow$$

$$S = 18 + 16\sqrt{3}\,\pi$$

따라서, $a = 18$, $b = 16$

$\therefore\ a + b = 34$