17회수학 가형 정답

1	④	2	①	3	②	4	②	5	⑤
6	④	7	⑤	8	①	9	①	10	③
11	③	12	①	13	③	14	①	15	③
16	③	17	①	18	②	19	①	20	④
21	⑤	22	84	23	576	24	16	25	4
26	12	27	53	28	35	29	60	30	40

해 설

1. 답 ④

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\dfrac{x}{\tan x}\cdot 2=2$

2.정답 ①

포물선 $y^2=4(x-a)$의 초점은

$(a+1,\ 0)$이고, 포물선 $y^2=-8x$의 초점은

$(-2,\ 0)$이다. $\therefore a=-3$

3. 정답 ②

[출제의도] 모평균을 알고 신뢰구간 구하기

신뢰구간의 길이는 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값이 가장 큰

경우이므로

$n=36,\ \sigma=9$일 때이다.

4. 정답 ②

[출제의도] 배각공식을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\tan\dfrac{\theta_n}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\tan\theta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2\tan\frac{\theta_n}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta_n}{2}}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$$

5.정답 ⑤

[출제의도] 위치와 속도의 관계 및 속도의 부호의 의미를 이해하여 두 점이 서로 반대 방향으로 움직인 시각을 구한다.

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_{P}, v_{Q}라 하면

$v_{\mathrm{P}}=\dfrac{dx_{\mathrm{P}}}{dt}=2t-a$

$v_{\mathrm{Q}}=\dfrac{dx_{\mathrm{Q}}}{dt}=\dfrac{2t-1}{t^2-t+1}$

두 점 P, Q가 움직이는 방향이 서로 반대 방향이 되려면 $v_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{Q}}<0$이어야 한다.

$v_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{Q}}=\dfrac{(2t-a)(2t-1)}{t^2-t+1}<0$

$\therefore\ (2t-a)(2t-1)<0\cdots$ ㉠

$(\because t^2-t+1>0)$

㉠의 해가 $\dfrac{1}{2}<t<2$이므로 $\dfrac{a}{2}=2$

$\therefore\ a=4$

6. 답 ④

[공간도형]

점 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$을 지나고 직선 l에 수직인 평면 α의

방정식은

$1\cdot(x-1)-2(y-2)+3(z-3)=0$

$\therefore\ \therefore\ x-2y+3z=6\ \cdots\cdots$ ㉠

직선 m의 방정식에서

$x-2=y=\dfrac{z-6}{5}=t$로 놓으면

$x=t+2,\ y=t,\ z=5t+6$이므로

점 $\mathrm{B}(t+2,\ t,\ 5t+6)$으로 놓고 ㉠에 대입하면

$(t+2)-2t+3(5t+6)=6\quad\therefore\ t=-1$

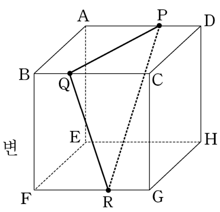
따라서 $\mathrm{B}(1,\ -1,\ 1)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(1-1)^2+\{(2-(-1)\}^2+(1-3)^2}$

$=\sqrt{13}$

7.답 ⑤

[정사영]



$\overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{AP}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{10}$,

$\overline{\mathrm{PR}}=3\sqrt{2}$

삼각형 PQR에서 밑변을 PR

이라 하면 높이는

$(\text{높이})=\sqrt{10-\dfrac{9}{2}}=\dfrac{\sqrt{22}}{2}$

그래서

$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{22}}{2}=\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$

한편, 삼각형 PQR의 평면 CGHD 위로의 정사영은

삼각형 CGD이므로 정사영의 기본성질에 의해

$\triangle\mathrm{CGD}=\triangle\mathrm{PQR}\cos\theta\ \Leftrightarrow\ \dfrac{9}{2}=\dfrac{3\sqrt{11}}{2}\cos\theta$

그러므로 $\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$

8. 답 ① 점 (a,b)는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점이므로 $\dfrac{a^2}{5}-\dfrac{b^2}{4}=1\ \cdots$ ㉠

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표는

F(3, 0), F'(−3, 0)이다.

이 때, 사각형 F'QFP의 넓이는 합동인 두 삼각형 F'QF, FPF'의 넓이와 같으므로

$\square F'QFP=2\times\triangle FPF'\ =2\times\dfrac{1}{2}\times\overline{FF'}\times|b|$

$=6|b|=24$

$\therefore\ |b|=4\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=25$이므로 $|a|=5$

$\therefore\ |a|+|b|=5+4=9$

9.정답 ①

B의 개수에 따라 분류하면

i) B가 2개 쓰일 때

$A,\ B,\ B,\ C,\ C$를 설치

$\to\dfrac{5\,!}{2\,!\,2\,!}=30$

ii) B가 3개 쓰일 때

$A,\ B,\ B,\ B,\ C$를 설치 $\to\dfrac{5\,!}{3\,!}=20$

iii) B가 4개 쓰일 때

$A,\ B,\ B,\ B,\ B$를 설치 $\to\dfrac{5\,!}{4\,!}=5$

i), ii), iii)에서

$30+20+5=55$가지

10.답 ③벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,\ b)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(c,d)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(a+3,\ b+1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=(c+3,d+1)$

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(a,b)-(a+3,b+1)=(-3,-1)$

이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$ (참)

ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=(a+3,b+1)-(c+3,d+1)$

$=(a-c,b-d)$

이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$

$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|$ (참)

ㄷ. (반례)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1,2)$일 때,

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=1\cdot\ 1+1\cdot\ 2=3$이다.

그런데, $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(4,2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=(4,5)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\cdot\ \overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=4\cdot\ 4+2\cdot\ 5=26$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\neq\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\cdot\ \overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11. 정답 ③

철수가 받은 두 점수의 합이 70인 경우는

다음과 같다.

관람객 투표	$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\mathrm{B}\left(\frac{1}{3}\right)$	$\mathrm{C}\left(\frac{1}{6}\right)$
심사위원	$\mathrm{C}\left(\frac{1}{6}\right)$	$\mathrm{B}\left(\frac{1}{3}\right)$	$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}\right)$
확률	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{18}$

12. **[출제의도] 함수의 연속성 추론하기**

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 1-0}g(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)g(x)=2$ (참)

ㄴ. $f(3)g(3)=1\times 2=2$,

$\lim\limits_{x\to 3-0}f(x)g(x)=3,\ \lim\limits_{x\to 3+0}f(x)g(x)=3$에서

$\lim\limits_{x\to 3}f(x)g(x)=3$

$\lim\limits_{x\to 3}f(x)g(x)\neq f(3)g(3)$ (거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)g(x)=4$

ㄱ에 의하여 $\lim_{x \to 1-0} f(x)g(x) = 2$

$\lim_{x \to 1-0} f(x)g(x) \neq \lim_{x \to 1+0} f(x)g(x)$이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

ㄴ에 의해 $x=3$에서도 불연속이므로

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 불연속이다. (거짓)

13. [출제의도] 수열의 성질을 이해하고 수열의 극한값을 구한다.

$y=\frac{2n}{x}$에 $y=-\frac{x}{n}+3$를 대입하면

$\frac{2n}{x}=-\frac{x}{n}+3$

$2n^2=-x^2+3nx$

$x^2-3nx+2n^2=0$

$(x-n)(x-2n)=0$

$\therefore$ $x=n$ 또는 $x=2n$

즉, $A_n(n, 2)$, $B_n(2n, 1)$

$\therefore$ $l_n=\sqrt{(2n-n)^2+(1-2)^2}=\sqrt{n^2+1}$

$\lim_{n\to\infty}(l_{n+1}-l_n)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$

$=1$

14.[출제의도] 정적분을 이해하고 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

곡선 $y=\frac{2n}{x}$과 직선 $y=-\frac{x}{n}+3$의 교점이

$A_n(n, 2)$, $B_n(2n, 1)$

이고, $n\le x\le 2n$에서 $\frac{2n}{x}\le-\frac{x}{n}+3$이므로

$S_n=\int_n^{2n}\left\{\left(-\frac{x}{n}+3\right)-\frac{2n}{x}\right\}dx$

$=\left[-\frac{1}{2n}x^2+3x-2n\ln|x|\right]_n^{2n}$

$=(-2n+6n-2n\ln 2n)-\left(-\frac{1}{2}n+3n-2n\ln n\right)$

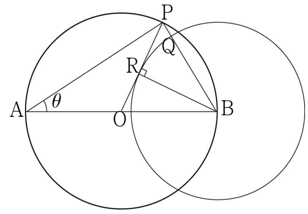
$=n\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)$

$\therefore$ $S_{n+1}-S_n=\frac{3}{2}-2\ln 2$

15.정답 ③

[출제의도] 삼각함수의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

원 C_2와 선분 OP의 접점을 점 R라 하자.



$\overline{BP}=2\sin\theta$,

$\angle ROB=2\theta$이므로, $\overline{BR}=\sin 2\theta=\overline{BQ}$

$\overline{PQ}=\overline{PB}-\overline{BQ}=2\sin\theta-\sin 2\theta$

$=2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta=2\sin\theta(1-\cos\theta)$

$\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{PQ}}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{2\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}$

$=\lim_{\theta\to+0}2\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$

$=2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=1$

16.답 ③

[벡터]

선분 AB의 중점을 M,

M에서 평면에 내린 수선의 발을 M'으로 놓으면

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=2|\overrightarrow{PM}|\ge 2|\overrightarrow{MM'}|$

그런데 M의 좌표는 $(2, -1, 0)$이므로

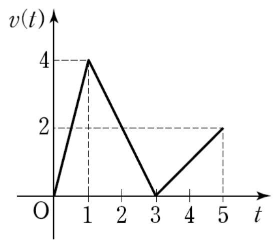
점 M과 평면 사이의 거리는 선분 MM'의 길이므로

$\frac{|2+1+0|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

따라서 구하는 최소값은

$2|\overrightarrow{MM'}|=2\sqrt{3}$이다.

17 정답 ①



시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리를 l_1 시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리를 l_2

시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리를 l_3이라 하자.

ㄱ. $x=1$인 경우

$l_1=2$, $l_2=4$, $l_3=2$이므로

$f(1)=2$ $\therefore$ 참

ㄴ. $x=2$인 경우

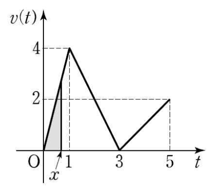
$l_1=5$, $l_2=\frac{3}{2}$, $l_3=\frac{3}{2}$이므로 $f(2)=\frac{3}{2}$

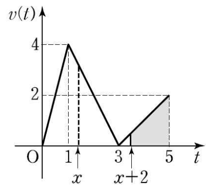
따라서 $f(2)-f(1)=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$

$\int_1^2 v(t)dt=\int_1^2(-2t+6)dt=3$

$\therefore$ $f(2)-f(1)\neq\int_1^2 v(t)dt$ $\therefore$ 거짓

ㄷ. h가 충분히 작은 양수일 때 그림에서 보는 것처럼





$1-h<x<1$에서

$f(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 4x=2x^2\to f'(x)=4x$

$\xrightarrow{x\to1-0}4$

$1<x<1+h$에서

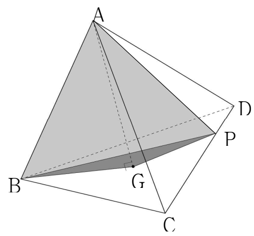
$f(x)=2-\frac{1}{2}((x+2)-3)^2\to f'(x)=-x+1$

$\xrightarrow{x\to1+0}0$

따라서 $f'(x)$의 $x=1$에서의 좌우 미분계수가 다르므로 미분불능

$\therefore$ 거짓

18.정답 ②



정사면체 ABCD의 모서리의 길이를 $4a$라 하면, 코사인법칙에 의하여

$\overline{AP}=\overline{BP}=\sqrt{(4a)^2+a^2-4a^2}=\sqrt{13}a$

삼각형 ABP의 넓이는 $6a^2$이다.

점 A에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 G라 하면, 점 G는 삼각형 BCD의 무게중심이다.

삼각형 BGP의 넓이는 삼각형 BCD의 넓이의 $\frac{1}{6}$이므로 삼각형 BGP의 넓이는

$\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$

$6a^2\cos\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

19정답 ①

[출제의도] 정규분포의 뜻과 그 성질을 이해하기

$\mathrm{P}(\mathrm{X} < 500) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 0) = 0.5$

$\mathrm{P}(500 \leq \mathrm{X} < 550) = \mathrm{P}(0 \leq \mathrm{Z} < 1) = 0.34$

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 550) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \geq 1) = 0.16$

$(1000 \times 0.5 + 1100 \times 0.34 + 1200 \times 0.16) = 1066$

20. 정답 ④

[출제의도] 함수의 미분법을 이용하여 넓이의 순간변화율을 구한다.

네 점 A, B, C, D의 좌표는

$\mathrm{A}(\log_4 a,\ a)$, $\mathrm{B}(\log_2 a,\ a)$,

$\mathrm{C}(\log_2 a,\ a^2)$, $\mathrm{D}(2\log_2 a,\ a^2)$

이다.

$\overline{\mathrm{CD}} = \log_2 a$, $\overline{\mathrm{BC}} = a^2 - a$이므로

삼각형 ADC의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a) = \dfrac{1}{2}(a^2 - a) \cdot \log_2 a$

$\therefore\ S'(a) = \dfrac{1}{2}(2a-1)\log_2 a + \dfrac{1}{2}(a^2-a)\dfrac{1}{a\ln 2}$

$\quad = \dfrac{1}{2}(2a-1)\log_2 a + \dfrac{1}{2\ln 2}(a-1)$

$\therefore\ S'(4) = 7 + \dfrac{3}{2\ln 2}$

이때 $\dfrac{dS}{dt} = S'(a)\dfrac{da}{dt}$이고 $\dfrac{da}{dt} = 1$이므로

구하는 순간변화율은

$\left(7 + \dfrac{3}{2\ln 2}\right) \times 1 = 7 + \dfrac{3}{2\ln 2}$

[다른 풀이]

점 P가 점 $(0, 2)$를 출발한 지 t초 후의 점 P의 좌표는 $(0, 2+t)$이므로 삼각형 ADC의 넓이는

$S(t) = \dfrac{1}{2}(t^2 + 3t + 2) \cdot \log_2(t+2)$

$\therefore\ S'(t) = \dfrac{1}{2}(2t+3)\log_2(t+2)$

$\quad + \dfrac{1}{2}(t^2 + 3t + 2)\dfrac{1}{(t+2)\ln 2}$

$\quad = \dfrac{1}{2}(2t+3)\log_2(t+2) + \dfrac{1}{2\ln 2}(t+1)$

점 P가 점 $(0,4)$를 지나는 순간은 $t = 2$일 때이므로 구하는 순간변화율은

$\therefore$

$S'(2) = \dfrac{1}{2}(2 \times 2 + 3)\log_2(2+2) + \dfrac{1}{2\ln 2}(2+1)$

$\quad = 7 + \dfrac{3}{2\ln 2}$

21. 정답 ⑤

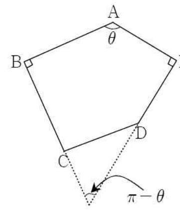
ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$은 평행하다. (참)

ㄴ. (참)

$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{E} = 90°$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$가 이루는 각을 θ라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$가 이루는 각은 $\pi - \theta$이다.

따라서

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AE}}|\cos\theta$



$\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ED}} = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{ED}}|\cos(\pi - \theta) = -|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{ED}}|\cos\theta$

이때, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{ED}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}} = -\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ED}}$ (참)

ㄷ. $|\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ED}} + |\overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

이때, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{ED}}$이고 'ㄴ'에 의해

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}} = -\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ED}}$이 성립하므로

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{ED}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BE}}|$이 성립한다. (참)

22. 정답 84

x의 계수는 ${}_7\mathrm{C}_1 \times \mathrm{a} = 14$이므로 $a = 2$

따라서, x^2의 계수는

${}_7\mathrm{C}_2 \cdot \mathrm{a}^2 = \dfrac{7 \times 6}{2} \times 2^2 = 84$

23. 정답 576

$$\frac{\mathrm{P}(2)}{\mathrm{P}(9)} = \frac{{}_{10}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^8}{{}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{3}\right)^9\left(\frac{2}{3}\right)} = 576$$

24. $f(x) = x^3$의 그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동시키면

$g(x) = (x-a)^3 + b$의 그래프가 된다.

$g(0) = -a^3 + b = 0$이므로 $b = a^3$ … ㉠ 한편, 그래프의 평행 이동에 의해

$\displaystyle\int_a^b g(x)dx = \int_{a-c}^{b-c} g(x+c)dx$가

성립 $\displaystyle\int_a^{3a} g(x)dx = \int_a^{3a}\{(x-a)^3 + b\}dx$

$\displaystyle = \int_0^{2a}(x^3 + b)dx$

$\displaystyle\therefore \int_0^{2a}(x^3+b)dx - \int_0^{2a}x^3dx = \int_0^{2a}bdx$

$= 2ab = 32$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $2ab = 2a^4 = 32$이므로 $a^4 = 16$

답 16

25. [출제의도] 위치와 속도의 관계 및 속도의 부호의 의미를 이해하여 두 점이 서로 반대 방향으로 움직인 시각을 구한다.

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_{P}, v_{Q}라 하면

$v_{\mathrm{P}} = \dfrac{dx_{\mathrm{P}}}{dt} = 2t - a$

$v_{\mathrm{Q}} = \dfrac{dx_{\mathrm{Q}}}{dt} = \dfrac{2t-1}{t^2 - t + 1}$

두 점 P, Q가 움직이는 방향이 서로 반대 방향이 되려면 $v_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{Q}} < 0$이어야 한다.

$v_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{Q}} = \dfrac{(2t-a)(2t-1)}{t^2 - t + 1} < 0$

$\therefore\ (2t-a)(2t-1) < 0$ … ㉠ $(\because t^2 - t + 1 > 0)$

㉠의 해가 $\dfrac{1}{2} < t < 2$이므로 $\dfrac{a}{2} = 2$

$\therefore\ a = 4$

26.답 12

[공간도형]

중심 $\mathrm{C}(0,\ 1,\ 1)$에서 직선 $\dfrac{x}{2} = y = -z$에 내린 수선의

발을 $\mathrm{H}(2t,\ t,\ -t)$로 놓으면 직선의 방향벡터는

$\vec{u} = (2,\ 1,\ -1)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \vec{u} = (2t,\ t-1,\ -t-1) \cdot (2,\ 1,\ -1)$

$\quad = 4t + t - 1 + t + 1 = 6t = 0 = 0$

$\therefore\ t = 0$

$\therefore\ \mathrm{H}(0,\ 0,\ 0)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CH}} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$

따라서 삼각형 CAB의 넓이 S는

$S = \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{CH}} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$

$\therefore\ S^2 = 12$

27. 정답 53

[출제의도] 삼각방정식 해의 존재조건 구하기

$\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2}$을 이용하면

주어진 방정식은

$3\cos^2 x - 2\cos x = 4k - 7$이다.

이 방정식의 해는 두 함수

$y = 3\cos^2 x - 2\cos x$와

$y = 4k - 7$의 그래프의 교점의 x좌표이다.

$\cos x = t$로 치환하면

$y = 3t^2 - 2t(-1 \leq t \leq 1)$이고,

$-\dfrac{1}{3} \leq y \leq 5$이므로 $-\dfrac{1}{3} \leq 4k - 7 \leq 5$이다.

28. 정답 35

투입된 공이 A, B, C, D에 도달할 확률은 각각 $\frac{1}{2^2}$이다.

네 곳 모두 켜지려면 한 곳은 세 번, 세 곳은 각각 한 번씩 공이 도달해야 한다. 여섯 개의 공이 A에 세 개 B, C, D에 각각 한 개씩 도달하는 경우의 수는 A, A, A, B, C, D를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{6!}{3!}$이고 이 중 네 개의 공이 A, B, C, D에 각각 한 개씩 도달하여 네 번째 공 만에 게임이 끝나는 경우인 $4!$가지가 제외되어야 한다.
B, C, D에 세 개의 공이 도달하는 경우도 마찬가지이므로 구하는 확률은

$$4\left(\frac{6!}{3!}-4!\right)\times\left(\frac{1}{2^2}\right)^6=\frac{3}{32}$$

29. 정답 60

[출제의도] 확률변수의 평균을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다. 모든 관광코스와 그 요금은 다음과 같다.

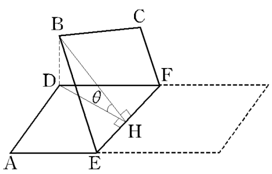
A→B→C→D→E : 70,000원
A→B→D→E : 56,000
A→B→E : 42,000
A→C→B→E : 56,000
A→C→B→D→E : 70,000
A→C→D→B→E : 70,000
A→C→D→E : 56,000

$$E(X)=70000\cdot\frac{3}{7}+56000\cdot\frac{3}{7}+42000\cdot\frac{1}{7}$$

$=60000$이므로 $E\left(\frac{X}{1000}\right)=\frac{60000}{1000}=60$

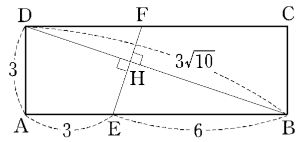
30. 정답 40

B에서 $\overline{EF}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의해 $\overline{DH}\perp\overline{EF}$
두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각 θ는 두 평면의 교선 $\overline{EF}$ 수직인 $\overline{BH}$와 $\overline{DH}$가 이루는 각과 같다.



$$\cos\theta=\frac{\overline{DH}}{\overline{BH}}$$

이제 종이를 다시 펼치면 그림과 같다.



$\triangle BDA \sim \triangle BEH$이므로

$\overline{EB}$: $\overline{HB}=\overline{DB}$: $\overline{AB}$

$$\overline{HB}=\frac{9\cdot 6}{3\sqrt{10}}=\frac{18}{\sqrt{10}}$$

$$\overline{DH}=\overline{DB}-\overline{BH}=3\sqrt{10}-\frac{18}{\sqrt{10}}=\frac{12}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overline{DH}}{\overline{BH}}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ 60\cos\theta=60\times\frac{2}{3}=40$$