작성자 : 박수칠 @ orbi. kr

<2017학년도 9월 모평 나형>.

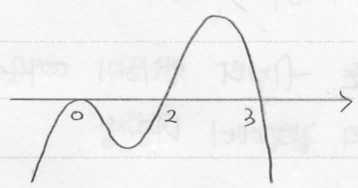
#21.

$f(x)$의 최고차항 계수가 음수.

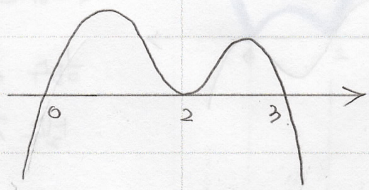
(가)에 의해 $f(x)$의 x절편이 $0, 2, 3$이므로

$f(x)$의 그래프 개형은 아래 셋 중 하나다

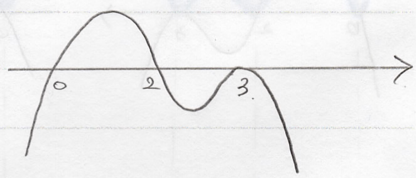
<그림 ①>



<그림 ②>



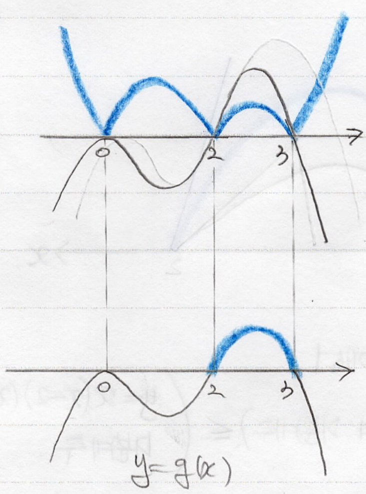
<그림 ③>



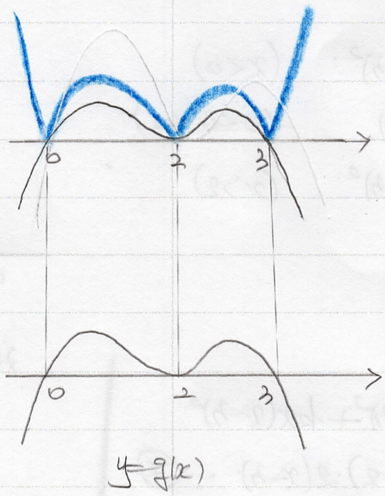
세 개형을 함수 $y=|x(x-2)(x-3)|$과 합쳐서 그린 다음,

함수 $g(x)$의 개형을 찾아내면 다음과 같다.

<그림 ④>



<그림 ⑤>



<그림 ⑥>

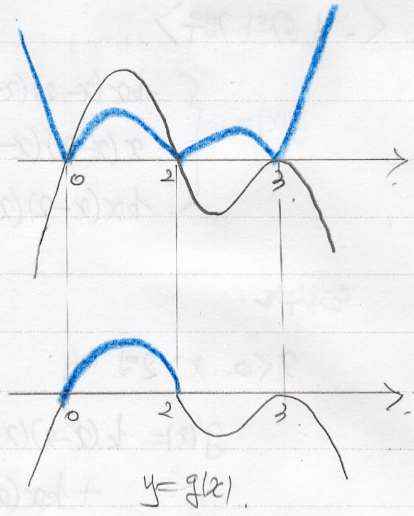


그림 ④~⑥에서 알 수 있듯이 그림 ①~③에 있는 함수 $f(x)$의

개형 모두 조건 (가), (나)를 만족시키는 것이 가능해 보이지만,

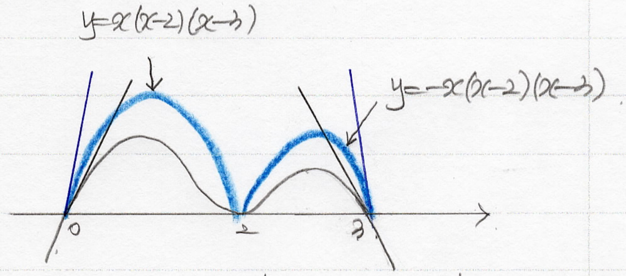
$f(1)$이 최대이려면 $f(x)$의 그래프 개형이 그림 ②, ③과

같아야 한다.

이때, 그림 ②에서는 $f(x)=kx(x-2)^2(x-3)$

그림 ③에서는 $f(x)=kx(x-2)(x-3)^2$ 으로 둘 수 있다.

ⅰ) 그림 ⓐ, ⓑ의 경우.



$f(x)$의 그래프가 $y=|x(x-2)(x-3)|$의

아래쪽에 있어야 하므로.

점 $(0,0)$에서.

$$\left(f(x)\text{의 미분계수}\right) \le \left(\begin{array}{l} y=x(x-2)(x-3)\text{의} \\ \text{미분계수} \end{array}\right)$$

$f'(x)=k(x-2)^2(x-3)+kx\cdot 2(x-2)(x-3)+kx(x-2)^2$

$y'=(x-2)(x-3)+x(x-3)+x(x-2)$

$-12k \le 6$

$k \ge -\frac{1}{2}$

점 $(3,0)$에서.

$$\left(f(x)\text{의 미분계수}\right) \ge \left(\begin{array}{l} y=-x(x-2)(x-3)\text{의} \\ \text{미분계수} \end{array}\right)$$

$y'=-(x-2)(x-3)-x(x-3)-x(x-2)$

$3k \ge -3$

$k \ge -1$

따라서 $k \ge -\frac{1}{2}$이다.

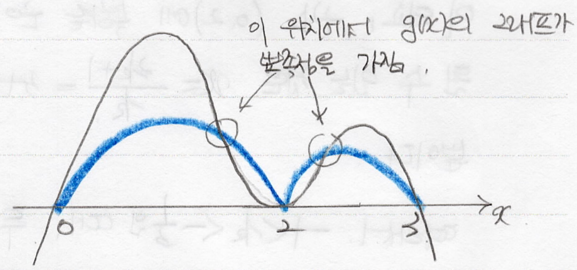
이때 $f(1)=-2k \le 1$이므로

$f(1)$의 최댓값은 1이다.

*만일 ⓐ, ⓑ에서 $f(x)$, $y=|x(x-2)(x-3)|$의

그래프가 다음과 같이 그려진다면 함수 $g(x)$에

미분불가능한 점이 생긴다.



ii) 그림 ⓐ, ⓑ의 경우.

그림 ⓑ에서는 구간 $(0, 2)$에서 $f(x)$의 그래프가 $y=|x(x-2)(x-3)|$보다 위쪽에 있도록 그렸지만, 반대의 경우도 고려해야 한다.

그림 ⓑ

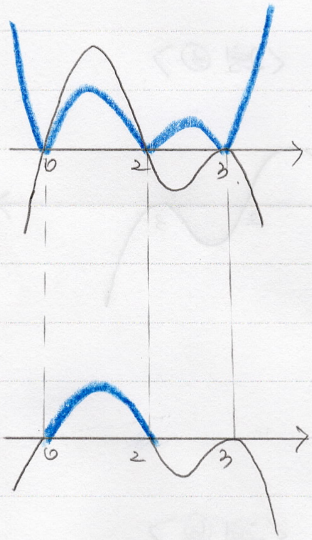
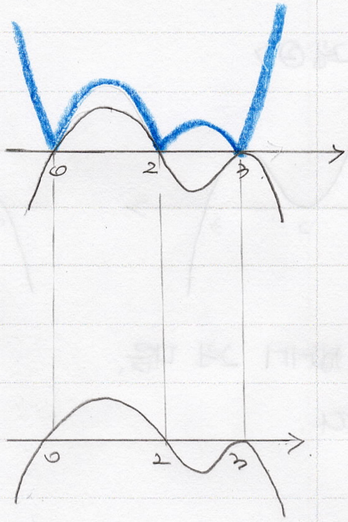


그림 ⓑ-1



<그림 ⓑ의 경우>

$$g(x)=\begin{cases} kx(x-2)(x-3)^2 & (x<0) \\ x(x-2)(x-3) & (0\le x\le 2) \\ kx(x-2)(x-3)^2 & (x>2) \end{cases}$$

도함수는

$x<0$, $x>2$일 때

$$g'(x)=k(x-2)(x-3)^2+kx(x-3)^2+kx(x-2)\cdot 2(x-3) \cdots ㉮$$

$0<x<2$일 때

$$g'(x)=(x-2)(x-3)+x(x-3)+x(x-2) \cdots ㉯$$

$x=0$에서 미분가능하려면

(㉮이 $x=0$일 때) = (㉯이 $x=0$일 때)

$-18k=6$,

$k=-\frac{1}{3}$

$x=2$에서 미분가능하려면

(㉮이 $x=2$일 때) = (㉯이 $x=2$일 때)

$2k=-2$,

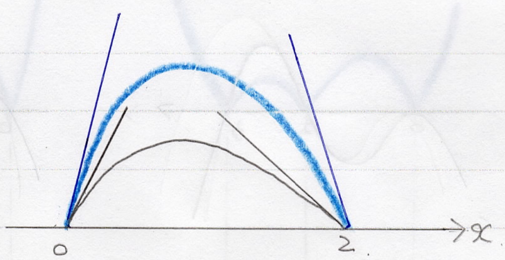
$k=-1$.

∴ $x=0$과 $x=2$에서 동시에 미분가능하도록 만드는 값은 불가능.

<그림 ⓑ-1의 경우>

함수 $g(x)$는 $f(x)$와 일치하기 때문에 실수 전체의 집합에서 미분가능.

따라서 구간 $(0, 2)$에서 $f(x)$의 그래프가 $y=|x(x-2)(x-3)|$ 아래쪽에 있도록 하는 k값만 구하면 되고, 접선 기울기로 접근할 수 있다.



점 $(0, 0)$에서

($f(x)$의 미분계수) $\le$ ($y=x(x-2)(x-3)$의 미분계수)

$-18k\le 6$.

$k\ge -\frac{1}{3}$

점 $(2, 0)$에서

($f(x)$의 미분계수) $\ge$ ($y=x(x-2)(x-3)$의 미분계수)

$2k\ge -2$

$k\ge -1$

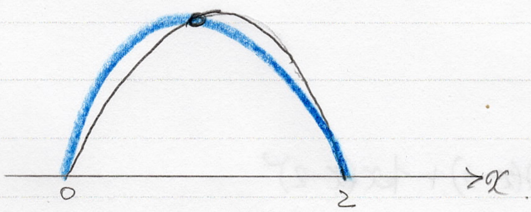
따라서 $k\ge -\frac{1}{3}$이다.

이때, $f(1) = -4k \le \frac{4}{3}$ 이므로,

$f(1)$의 최댓값은 $\frac{4}{3}$이다.

※ 그림 ⑥과 ⑥-1의 중간, 즉, 구간 $(0, 2)$에서 $f(x)$의 그래프와 $y = |x(x-2)(x-3)|$의 그래프가 만날 때도 있지 않을까?

확인해보자.



위 그림과 같이 두 그래프가 구간 $(0, 2)$에서 만나고, 교점에서 공통접선을 가지면 문제의 조건 (나)를 만족시킬 수 있을 것 같지만… 불가능하다.

왜냐하면 구간 $(0, 2)$에서의 교점을 구하기 위해 연립방정식

$$\begin{cases} y = kx(x-2)(x-3)^2 \\ y = x(x-2)(x-3) \end{cases}$$

을 정리하면

$$kx(x-2)(x-3)^2 = x(x-2)(x-3)$$

$$x(x-2)(x-3)(kx-3k-1) = 0$$

이 되고, 구간 $(0, 2)$에 속하는 근이 될 수 있는 것은 $x = \frac{3k+1}{k} = 3 + \frac{1}{k}$ 뿐이다.

따라서 $-1 < k < -\frac{1}{3}$인 때, 두 그래프가 구간 $(0, 2)$에서 만나는 것은 가능하지만, 중근이 아니므로 교점에서 공통접선을 가질 수 없고, 조건 (나)를 만족시키지 못한다.