03 함수

수학II 교과서 Review

문제 1

두 함수 f, g가 일대일 대응이고,
$f(2)=4$, $g(1)=5$, $(g \circ f)(2)=7$, $(g \circ f)(3)=5$ 일 때,
$f(3)+f(4)$의 값을 구하여라.

문제 2

집합 $X=\{2,\ 4,\ 8\}$에 대하여 X에서 X로의 세 함수 f, g, h가 $f(2)=g(4)=h(8)$, $f(2)f(4)=f(8)$을 만족시킨다. 세 함수 f, g, h가 각각 일대일 대응, 항등함수, 상수함수일 때, $f(4)+g(8)+h(2)$의 값을 구하여라.

문제 3

실수 전체의 집합 R에 대하여 함수 $f: R \to R$를
$f(x)=|x|+ax+1$ 로 정의할 때, 함수 f가 일대일 대응이 되도록 실수 a값의 범위를 구하여라.

문제 4

집합 $X=\{x|x \ge a\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=x^2+2x-6$이 일대일 대응일 때, a의 값을 구하여라.

03 함수

수학Ⅱ 교과서 Review

문제 5

함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$에 대하여 다음을 만족하는 함수 $g(x)$와 $h(x)$를 구하여라.

(1) $(f\circ g)(x)=1-x$

(2) $(h\circ f)(x)=\dfrac{x+1}{x}$

문제 6

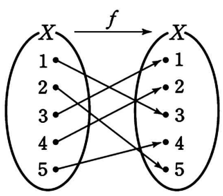
자연수 n에 대하여 $f(n)$을 n보다 작거나 같고 n과의 최대공약수가 1인 자연수의 개수라고 하자. 예를 들어 $f(1)=1$, $f(3)=2$, $f(5)=4$이다. 이때,

$$f(15)+(f\circ f)(15)+(f\circ f\circ f)(15)+(f\circ f\circ f\circ f)(15)$$

의 값을 구하여라.

문제 7

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f: X\to X$ 가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) $f^2(x)=x$, $f^3(x)=x$가 되는 x의 값을 각각 구하여라.
(단, $f^2(x)=(f\circ f)(x)$, $f^3(x)=(f\circ f\circ f)(x)$)

(2) $f^{2014}(a)+f^{2015}(b)=8$이 되는 모든 순서쌍 (a, b)를 구하여라. (단, $f^n\circ f=f^{n+1}$, n은 자연수)

문제 8

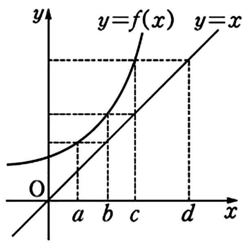
실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수
$f(x)=3x-4$, $g(x)=x+6$에 대하여 합성함수
$h(x)=(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(x)$일 때, $h(3)+h^{-1}(2)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하여라.

03 함수

수학II 교과서 Review

문제 9

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음을 구하여라. (단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



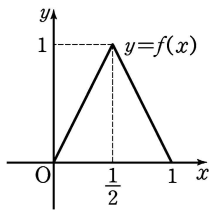
(1) $(f \circ f)(a)$

(2) $f^{-1}(b)$

(3) $(f \circ f)^{-1}(d)$

문제 10

$0 \le x \le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x))=\frac{1}{2}$의 실근의 개수를 구하여라.



문제 11

실수 전체의 집합 R에서 정의된 함수 f가 $f(x)=|x-1|$ 일 때, $(f \circ f)(x)=f(x)$를 만족하는 모든 x의 값을 구하여라.

문제 12

함수 $f(x)=x|x|+k$ (k는 상수)의 역함수를 f^{-1}라고 하자. $f^{-1}(1)=2$일 때, $(f^{-1} \circ f)(1)$의 값을 구하여라.

03 함수

수학Ⅱ 교과서 Review

문제 13

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}(x \geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하는 풀이 과정과 답을 써라.

문제 14

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+a & (x \geq a) \\ -x^2+a & (x<0) \end{cases}$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 상수 a의 값의 범위를 구하여라.

문제 15

함수 $f(x)=x+1-\left|\frac{1}{2}x-1\right|$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

03 함수

〈정답 및 해설〉 수학 II - 3단원. 함수

1) $(g \circ f)(3)=5$에서 $f(3)=g^{-1}(5)$
$g(1)=5$에서 $g^{-1}(5)=1$이므로
$f(3)=1$
$(g \circ f)(2)=7$에서 $g(f(2))=7$
$f(2)=4$이므로 $g(4)=7$
따라서 $f(3)+g(4)=8$

2) 14

3) $a>1$ 또는 $a<-1$

4) 2
$f(x)=x^2+2x-6=(x+1)^2-7$
함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되려면 축을 기준으로 한쪽 부분만 생각해야 한다.
그런데 함수 $f(x)$의 정의역이 $X=\{x|x \geq a\}$이므로
$a \geq -1$ …… ①
또, 함수 $f(x)$의 정의역과 공역(치역)이 같으므로 $f(a)=a$이어야 한다. 즉,
$a^2+2a-6=a,\quad a^2+a-6=0$
$(a-2)(a+3)=0$
$a=2$ 또는 $a=-3$ …… ②
따라서 ①, ②에서 $a=2$

5) (1) $(f \circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{g(x)}{g(x)-1}=1-x$이므로 $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$
[다른 풀이]
$(f \circ g)(x)=1-x$이므로 $g(x)=f^{-1}(1-x)$
이때 $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-1}$이므로
$g(x)=f^{-1}(1-x)=\dfrac{1-x}{(1-x)-1}=\dfrac{x-1}{x}$
(2) $(h \circ f)(x)=h(f(x))=h\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{x+1}{x}$
$\dfrac{x}{x-1}=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t}{t-1}$
따라서 $h(t)=\dfrac{\dfrac{t}{t-1}+1}{\dfrac{t}{t-1}}=\dfrac{2t-1}{t}$
이므로 $h(x)=\dfrac{2x-1}{x}$

6) 15보다 작거나 같고 15와의 최대공약수가 1인
자연수는 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14의 8개이므로
$f(15)=8$
8보다 작거나 같고 8과의 최대공약수가 1인
자연수는 1, 3, 5, 7의 4개이므로
$(f \circ f)(15)=f(f(15))=f(8)=4$
4보다 작거나 같고 4와의 최대공약수가 1인 자연수는 1, 3의 2개이므로
$(f \circ f \circ f)(15)=f(f(f(15)))=f(4)=2$
2보다 작거나 같고 2와의 최대공약수가 1인 자연수는 1의 1개이므로
$(f \circ f \circ f \circ f)(15)=f(f(f(f(15))))=f(2)=1$
따라서
$f(15)+(f \circ f)(15)+(f \circ f \circ f)(15)+(f \circ f \circ f \circ f)(15)$
$=8+4+2+1=15$

7) (1) $f^2(x)=x$ 가 되는 x의 값은 1, 3

$f^3(x)=x$ 가 되는 x의 값은 2, 4, 5

(2) (2, 1), (3, 4), (5, 2)

8) 3
$h(x)=(f\circ(g\circ f)-1\circ f)(x)$
$=(f\circ(f^{-1}\circ g-^1)\circ f)(x)$
$=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(x)$
$=(g^{-1}\circ f)(x)$
이고, $g(x)=x+6$에서 $g^{-1}(x)=x-6$이므로
$h(x)=(g^{-1}\circ f)(x)=g^{-1}(f(x))$
$=g^{-1}1(3x-4)=(3x-4)-6$
$=3x-10$
이고, $h(3)=-1$이다.
한편 $h^{-1}(2)=a$로 놓으면
$h(a)=3a-10=2$에서 $a=4$이므로 $h^{-1}(2)=4$
따라서 $h(3)+h^{-1}(2)=3$이다.

9) (1) $(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=c$
(2) $f^{-1}(b)=k$라고 하면 $f(k)=b$이므로 $k=a$
$f^{-1}(b)=a$
(3) $f^{-1}(d)=m$이라고 하면 $f(m)=d$이므로 $m=c$
$f^{-1}(c)=n$이라고 하면 $f(n)=c$이므로 $n=b$
$(f\circ f)^{-1}(d)=(f^{-1}\circ f^{-1})(d)$
$=f^{-1}(f^{-1}(d))$
$=f^{-1}(c)=b$

10) 4개

11) $f(x)=|x-1|=\begin{cases}x-1 & (x\geq 1)\\ -x+1 & (x<1)\end{cases}$ 이므로
$(f\circ f)(x)=||x-1|-1|$
$=\begin{cases}x-2 & (x\geq 2)\\ -x+2 & (1\leq x<2)\\ x & (0\leq x<1)\\ -x & (x<0)\end{cases}$
$0\leq x<1$에서
$x=-x+1,\ x=\frac{1}{2}$
$1\leq x<2$에서
$-x+2=x-1,\ x=\frac{3}{2}$
따라서 구하는 모든 x의 값은
$\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}$

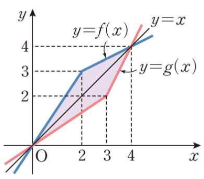
12) $f(x)=\begin{cases}x^2+k & (x\geq 0)\\ -x^2+k & (x<0)\end{cases}$이므로 함수 f는 일대일 대응이고 역함수가 존재한다.
$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로
$f(2)=2^2+k=1,\ k=-3$
$(f^{-1}\circ f^{-1})(1)=f^{-1}(f^{-1}(1))=f^{-1}(2)=a$로 놓으면
$f(a)=a|a|-3=2$
즉, $a|a|=5$이므로 $a=\sqrt{5}$

13) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}=x$에서 $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$, $x=1$ 또는 $x=2$
따라서 두 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$이므로 두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

14) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
(i) 곡선 $y=x^2+a$와 직선 $y=x$가 접할 때
$x^2+a=x$에서 $x^2-x=a=0$
이 이차방정식의 판별식 D는
$D=(-1)^2-4a=0$, $a=\frac{1}{4}$
(ii) 곡선 $y=-x^2+a$와 직선 $y=x$가 접할 때
$-x^2+a=x$에서 $x^2+x-a=0$
이 이차방정식의 판별식 D는
$D=1^2-4(-a)=0$, $a=-\frac{1}{4}$
(i), (ii)에 의하여 구하는 a의 값의 범위는
$$-\frac{1}{4}<a<\frac{1}{4}$$

15) 4
(i) $\frac{1}{2}x-1\geq 0$, 즉 $x\geq 2$일 때
$f(x)=x+1-\left|\frac{1}{2}x-1\right|=x+1-\frac{1}{2}x+1=\frac{1}{2}x+2$
(ii) $\frac{1}{2}x-1<0$, 즉 $x<2$일 때
$f(x)=x+1+\frac{1}{2}x-1=\frac{3}{2}x$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{1}{2}\times 1\times 2+\frac{1}{2}\times 1\times 2=2$ 이므로 구하는 넓이는 4이다.