SEOL:NAME
설레임 모의고사팀 2024

2025 SUNEUNG

총평 및
문항 해설

"저 넓은 세상에서
큰 꿈을 펼쳐라"

I. 전체적 시험 구성

총평

[팀원 H] 22수능과 유사하게 2컷 이하는 싹 쓸려 나가고, 1컷 언저리는 타임어택 심했을 것 같고 상위권들은 널널했을만한 시험인데 21번에 정수 조건이라던지 22번 문제라던지 실수할만한 요소가 군데군데 있었음.
미적은 N축이나 함수 찢어서 보는게 유리할만한 문항이 두 문항 나와서 (27, 30) 조금 당황한 감이 없지 않아 있었지만 기존 합성함수 기출에 비해 난이도가 특별히 어렵지는 않은 문제였음. 주목할만한 점은 최근 기출과 마찬가지로 함수 개형 추론이 빡세게 들어간 문항이 없었음. 계산력만 괜찮았다면 무난무난하게 풀었을 듯.

[팀원 S] 공통은 9모보단 어렵지만 작수와 비슷하게 쉽게 나왔네요. 되려 작수는 22번이 어려웠지만 이번엔 22도 쉽고.. 물론 의문사 당해버리긴 했지만.. 계산량 너무 많음.

[팀원 W] 미적 어려워요. 공통은 쉬움ㅇㅇ 22번이 쉬워 보이는데 단순 노동형 문제라 의문사 많은 듯, 왜 내 답은 31이 나온거지.. 공통 앞부분이 다 쉽다보니 대충 풀다가 22에서 다 같이 전사한 듯

[팀원 K] 일단 결론은 꽤 어려움. 정확히는 낚시당할만한 구석이 많이 보임.
확실히 최근 트렌드 맞게 계산량으로 변별하려는 시도가 느껴짐. 쉬운 문제는 확실히 쉬운데, 어려운 문제는 또 엄청 어렵고. 만점 받기가 생각보다 어려운 시험지이지만, 막상 의대 증원 이슈도 있고 해서 앞으로 행방은 두고 봐야할 것. 1~2등급 라인이 좀 많이 요동칠 듯한 느낌임.

[팀원 M] 아직 푸는 중 (ing)

예상 등급컷

- 확률과 통계　[1컷] 계산 중
- 미적분　[1컷] 83~84
- 기하　[1컷] 계산 중

(※ 다음 페이지에 문항별 간단한 분석 및 해설이 있습니다.)

특이 문항 분석

12번 시그마 공식 써도 되긴 하는데, 제5항까지만 구하는거면 그냥 대입해서 계산하는 게 더 빠를 수도

13번 함수 식 세우는 것만 추가로 시켰지 사실상 뭐 없음. 중간에 계산 실수만 안 했으면 무난하게 맞출 듯

14번 사람마다 편차는 있겠지만, 아마 마지막에 '넓이의 최댓값'이 언제 생기는 지 모르는 학생들이 변별되었을 것으로 예상함.

맨날 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$ 이것만 외우니까 $\frac{1}{2}$×(밑변)×(높이) 이거 까먹은 사람들 높은 확률로 틀렸을 것.

9평 때 이렇게 높이 가지고 낸 삼각함수 활용 문제가 있었기에 기출 복습 잘 했으면 맞힐 가능성 높음.

15번 객관적으로는 어려운 문제가 맞지만, 사설 단골 소재라 정답률 높을 듯. 계산량이 좀 '엄'이지만 우직하게 잘 계산하면 됨.

근과 계수의 관계에서 두 근의 '차' 공식을 잘 써먹으면 계산이 좀 깔끔해짐. 케이스는 약간 예측하기 쉬운 편.

20번 굉장히 신기하게 생긴 유형. 이걸 뭐 역함수 취하기도 애매하고 이리저리 많이 꼬였을거임.

결국 $f(???)=???$로 주어진 식을 $f(x)=???$의 형태로 바꿔주면 되는 문제로, 고1 심화 문제에서 많이 사용된 패턴임.

낯설기도 하고, 구하는 값도 충분히 당황시킬만해서 오답률이 상당히 높을 것으로 생각됨.

14, 20, 21 모두 고1 개념이 상당히 짙게 드러나는 문제라 할 수 있겠음.

21번 $f(-1)=0$인 거 찾는 것까지는 상위권이면 무난하게 했을 것임.

다만, 판별식이 $D<0$인지, $D\leq 0$인지를 확실하게 구분해야 됨. 이거 실수 외에도 정수 조건 무시하고 푼 학생들 많을 듯.

22번 케이스 개수 죽어나가서 상당히 많이 틀릴 듯. 물론 검토 시간이 넉넉하긴 했겠지만,

검토 해도 틀린 사람들 많을 것으로 생각됨. 상당한 오답률 예상

[미적분]

27번 얘가 생각보다 까다로움. 계산량도 조금 있는 편인데, "변곡점" 생각하는 게 중위권 학생들에게는 어려울 것으로 사료됨. 물론 상위권은 항상 보던 유형이라 그렇게 어렵다고 느끼진 않을 듯 (1컷 -1점)

28번 그저 "계산을 잘 해봅시다" 유형. 그냥 어떻게 하면 깔끔하게 계산할까 N번 고민하다보면 식 정리되고 "그나마 참을법한" 식으로 정리됨. $f'(x)$가 적분 안 되는 애라는 걸 깨달은 직후 바로 '부분적분'으로 아이디어가 연결되었으면 잘 풀었을 거임. 처음에 못 풀고 검토하면서 푼 사람들이 꽤 있을 것으로 생각.

물론 계산이 복잡해서 오답률이 높긴 할 것

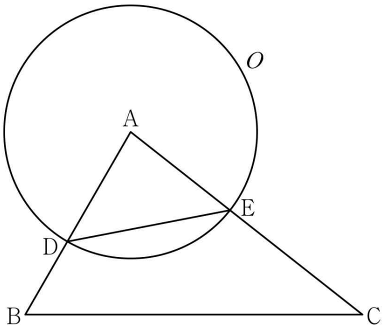
29번 $\{a_n\}$ 찾는 건 어렵지 않은데, 아래 시그마 식 계산하는게 상당히 빡침. 마찬가지로 계산 파티

30번 비주얼이나 실제로나 굉장히 어려운 문제임. 사인함수랑 일차함수 위치 관계 생각하고, 함수 증감까지 일일이 다 생각해야 하는데, 이게 상당히 빡셈. $f(x)$나 $f'(x)$의 그래프를 전부 그리기보다는 속함수의 증감에 집중해서 풀면 되는 문제임.

중상위권까지는 그냥 썰려나갈 거고, 상위권 중에서도 푼 사람이 그리 많진 않을 것 같음.

공통과목

14. 그림과 같이 삼각형 ABC 에서 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:2$ 인 점 D 를 잡고, 점 A 를 중심으로 하고 점 D 를 지나는 원을 O, 원 O 와 선분 AC 가 만나는 점을 E 라 하자.
$\sin A:\sin C=8:5$ 이고, 삼각형 ADE 와 삼각형 ABC 의 넓이의 비가 $9:35$ 이다. 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이가 7 일 때, 원 O 위의 점 P 에 대하여 삼각형 PBC 의 넓이의 최댓값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{AC}}$) [4점]



① $18+15\sqrt{3}$
② $24+20\sqrt{3}$
③ $30+25\sqrt{3}$
④ $36+30\sqrt{3}$
⑤ $42+35\sqrt{3}$

정답 ④

포인트

- 삼각형의 넓이 공식 2가지를 확실하게 알고 있는가?
- 사인법칙을 길이비로 연계시킬 수 있는가?
- 원 위의 점과 직선 사이의 거리가 최대가 될 때의 조건을 이해하고 있는가?

해설

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:2$ 에서
$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=3k$, $\overline{\mathrm{DB}}=2k$ 라 하자.

$$\sin A:\sin C=8:5 \Rightarrow \overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{AB}}=8:5$$

곧, $\overline{\mathrm{BC}}=5k$ 이다.

$$\triangle\mathrm{ADE}:\triangle\mathrm{ABC}=9:35$$
$$\Rightarrow \overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=9:35$$

길이들을 대입하면 $\overline{\mathrm{AC}}=7k$ 이다.
삼각형 ABC 가 결정되었다.

$$\cos A=\frac{(5k)^2+(7k)^2-(8k)^2}{2\times5k\times7k}=\frac{1}{7}$$
$$\Rightarrow \sin A=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름이 7 이므로

$$\frac{8k}{\sin A}=14(=2R) \Rightarrow k=\sqrt{3}$$

이다. 삼각형 PBC 의 넓이의 최댓값을 구하자.
$\overline{\mathrm{BC}}$ 를 밑변으로 보면 점 P 와 직선 BC 사이의 거리가 최대가 되어야 한다.
그 거리는

(점 A 와 직선 BC 사이의 거리)+(O 의 반지름)

이다. …… ㉠
원 O 의 반지름의 길이는 $3k=3\sqrt{3}$ 이다.
점 A 와 직선 BC 사이의 거리$(=h)$를 구하기 위해 삼각형 ABC 의 넓이를 우선 구하자.

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin A=\frac{1}{2}\times5\sqrt{3}\times7\sqrt{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}$$
$$=30\sqrt{3}$$

이 값은 다시 말해,

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times h=30\sqrt{3} \Rightarrow h=\frac{15}{2}$$

곧, ㉠의 값은 $\frac{15}{2}+3\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 PBC 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times㉠=\frac{1}{2}\times8\sqrt{3}\times\left(\frac{15}{2}+3\sqrt{3}\right)$$
$$=36+30\sqrt{3}$$

15. 상수 $a\,(a \neq 3\sqrt{5})$ 와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+15x+7 & (x \le 0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) x 에 대한 방정식 $g'(x) \times g'(x-4)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4 이다.

$g(-2)+g(2)$ 의 값은? [4점]

① 30
② 32
③ 34
④ 36
⑤ 38

정답 ②

포인트

- 미분가능성 조건을 이용해 $f(x)$ 의 식을 세울 수 있는가?
- 조건 (나)를 만족시키는 실근의 위치들을 잡을 수 있는가?
- 근과 계수의 관계를 이용하여 미지수 a 의 값을 구할 수 있는가?

해설

미분가능성 조건에 의해

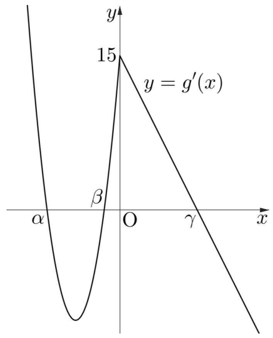
$f(0)=7$, $f'(0)=15$ ······ ㉠

이다.

$$g'(x)=\begin{cases} 3x^2+2ax+15 & (x \le 0) \\ f'(x) & (x>0) \end{cases}$$

임에 주목하자.

$a \neq 3\sqrt{5}$ 에서 $\dfrac{D}{4}=a^2-45 \neq 0$ 이므로 함수 $g'(x)$ 의 그래프는 다음과 같이 대강 그려진다.



$x<0$ 에서 두 실근을 갖는 이유는 조건 (나)에 의한 것이다.
만일 실근을 갖지 않는다면 방정식 $g'(x) \times g'(x-4)=0$ 은 서로 다른 두 실근만을 가지므로 조건 (나)를 만족시키지 않기 때문이다.
그러면 위의 그림에서

α, $\alpha+4$, β, $\beta+4$, γ, $\gamma+4$

중 두 쌍이 겹쳐야 하는 것이다.
이것이 가능한 경우는

$\alpha+4=\beta$, $\beta+4=\gamma$ ······ ㉡

인 경우가 유일하다.
즉, $\beta-\alpha=4$ 임을 이용할 수 있다. $x<0$ 에서

$g'(x)=3x^2+2ax+15$

이므로 $3x^2+2ax+15=0$ 의 서로 다른 두 실근의 차는

$$\frac{\sqrt{D}}{a}=\frac{\sqrt{4a^2-180}}{3}=4 \Rightarrow a=\pm 9$$

이때, $g'(x)=0$ 의 두 실근이 모두 음수이므로 근과 계수의 계수를 이용했을 때, $a>0 \Rightarrow a=9$
곧, $g'(x)=3x^2+18x+15=3(x+1)(x+5)=0$ 이며,

$\alpha=-5$, $\beta=-1$

이다. ㉡을 만족시키려면 $\gamma=\beta+4=3$ 이다.
㉠에서 $f(x)=px^2+15x+7$ 이라 두면,

$$f'(3)=0 \Rightarrow 6p+15=0 \Rightarrow p=-\frac{5}{2}$$

위의 내용들을 정리하면

$$g(x)=\begin{cases} x^3+9x^2+15x+7 & (x \le 0) \\ -\dfrac{5}{2}x^2+15x+7 & (x>0) \end{cases}$$

이므로 $g(-2)+g(2)=5+27=32$ 이다.

20. 곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 과 직선 $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 k 라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x>k$ 인 모든 실수 x 에 대하여
> $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 이고 $f(f(x))=3x$ 이다.

$f\left(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}}\right)$ 의 값을 구하시오. [4점]

정답 36

포인트

- 합성함수 형태로 제시된 함수에서 $f(x)=???$ 의 형태로 식을 정리할 수 있는가?
- 지수함수와 로그함수의 식 변환을 원활하게 수행할 수 있는가?
- 등식의 성질을 이용해 식을 조작할 수 있는가?

해설

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3}=k \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이며, $x>k$인 모든 실수 x에 대하여

$$f\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}\right)=3x$$

$x=3+\log_{\frac{1}{5}}t$ 를 대입하면

$$f(t)=9-3\log_5 t$$

여기서 $x>k$이므로

$$3+\log_{\frac{1}{5}}t>k \Rightarrow t<\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3}=k$$

따라서

$$f\left(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}}\right)=f\left(\frac{1}{k^3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{3k}\right)$$
$$=f\left(\frac{1}{k^3}\times\left(k\times 5^{-3}\right)^3\right)$$
$$=f\left(5^{-9}\right)$$

위에서 구한 $f(t)$ 의 식에 대입하면

$$f\left(5^{-9}\right)=9-3\times(-9)=36$$

21. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b 에 대하여 $f(1)$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

> 모든 실수 α 에 대하여 $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$ 의 값이 존재한다.

정답 16

포인트

- 극한값이 존재하려면 (분모)$\to 0$ 일 때, (분자)$\to 0$ 임을 고려할 수 있는가?
- 방정식의 해의 존재성이 연쇄적임을 활용하여 $\alpha=-1$ 임을 도출할 수 있는가?

해설

$f(\alpha)\neq 0$ 일 때는 항상 극한값이 존재한다.
$f(\alpha)=0$ 일 때는 극한값의 존재 조건에 의해 $f(2\alpha+1)=0$ 이다.
여기서 방정식 $2x+1=x$ 의 실근이 $x=-1$ 임을 고려하자.

$\alpha>-1$ 이면 : $f(\alpha)=0$ 이면 $f(2\alpha+1)=0$
$f(2\alpha+1)=0$ 이면 $f(4\alpha+3)=0$
$\cdots$

이 되어 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 무수히 많이 존재하게 된다.
같은 방식으로 $\alpha<-1$ 인 경우도 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 무수히 많이 존재하게 된다.
따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 $x=-1$ 만을 실근으로 가져야 한다.

$$f(x)=(x+1)\left(x^2+kx+4\right)$$

로 식을 세울 수 있다. 그러면

$$a=k+1,\ b=k+4$$

이며, a, b가 정수이므로 k가 정수이다.
방정식 $f(x)=0$ 이 $x=-1$ 을 제외한 실근을 가지지 않으려면
방정식 $x^2+kx+4=0$ 의 <u>판별식이 0보다 작다.</u>

$$D=k^2-16<0 \Rightarrow -3\le k\le 3$$

이때, $f(1)=10+2k$ 이므로 $f(1)$ 의 최댓값은 $k=3$ 일 때 16 이다.

22. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & (|a_n|\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n = 0 \text{ 또는 } |a_n|\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
> 이다.
> (나) $|a_m| = |a_{m+2}|$인 자연수 m의 최솟값은 3이다.

정답 64

포인트

- 무식하게 잘 나열해서 계산할 수 있는가?
- 식을 실수 없이, 케이스를 놓치거나 불가능한 케이스를 잘 쳐낼 수 있는가?

해설

a_3부터 a_5까지를 나열하면

a_3	a_4	a_5
k	$k-3$	㉠ $k-6$
		㉡ $\frac{k-3}{2}$
	$\frac{k}{2}$	㉢ $\frac{k}{2}-3$
		㉣ $\frac{k}{4}$

- ㉠이면서 $|a_3| = |a_5|$를 만족하려면 $k=3$
  $\Rightarrow$ $a_3 = 3$이면 $a_4 = 0$, $a_5 = 0$이 되므로 NO
- ㉡이면서 $|a_3| = |a_5|$를 만족하려면 $k=-3$ 또는 1
  $\Rightarrow$ $a_3 = -3$이면 $a_4 = -6$, $a_5 = -3$이 되므로 OK ⋯ ①
  $\Rightarrow$ $a_3 = 1$이면 $a_4 = -2$, $a_5 = -1$이 되므로 OK ⋯ ②
- ㉢이면서 $|a_3| = |a_5|$를 만족하려면 $k=-6$ 또는 2
  $\Rightarrow$ $a_3 = -6$이면 $a_4 = -3$, $a_5 = -6$이 되므로 OK ⋯ ③
  $\Rightarrow$ $a_3 = 2$이면 $a_4 = 1$, $a_5 = -2$이 되므로 OK ⋯ ④
- ㉣이면서 $|a_3| = |a_5|$를 만족하려면 $k=0$
  $\Rightarrow$ $a_3 = 0$이면 $a_4 = a_5 = 0$이므로 OK ⋯ ⑤

① : $a_2 = -6$인데, 그러면 $|a_2| = |a_4|$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
② : $a_2 = 2$인데, 그러면 $|a_2| = |a_4|$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
③ : $a_2 = -3$이면 $|a_2| = |a_4|$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않고, $a_2 = -12$이면 $a_1 = -9$ 또는 $a_1 = -24$이다.
④ : $a_2 = 4$이면 $a_1 = 7$ 또는 $a_1 = 8$
$a_2 = 5$이면 $a_1 = 10$이다.
⑤ : $a_2 = 0$이면 $|a_2| = |a_4|$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않고, $a_2 = 3$이며, $a_1 = 6$이다.

이상에서 모든 $|a_1|$의 값의 합은

$$9+24+7+8+10+6=64$$

27. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(e^x)+e^x$$

이라 하자. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선이 x축이고 함수 $g(x)$가 역함수 $h(x)$를 가질 때, $h'(8)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{36}$
② $\frac{1}{18}$
③ $\frac{1}{12}$
④ $\frac{1}{9}$
⑤ $\frac{5}{36}$

정답 ①

포인트

- $f'(x)=0$임에도 극값이 아닐 조건을 파악하였는가?
- 합성함수의 미분법을 원활하게 수행할 수 있는가?

해설

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선이 x축이려면

$$g(0)=0,\quad g'(0)=0$$

이어야 한다.

$$g(0)=f(1)+1=0 \ \Rightarrow\ f(1)=-1$$
$$g'(x)=e^x f'(e^x)+e^x \ \Rightarrow\ g'(0)=f'(1)+1=0$$
$$\Rightarrow\ g'(0)=-1$$

한편, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 $g'(x)=0$임에도 불구하고 역함수를 가진다.
다시 말해, $x=0$에서 극값을 가지면 안 되는 것이다.
$g'(0)=0$임에도 $x=0$에서 극대 또는 극소가 아니려면 $g''(0)=0$ 곧, 변곡점이면 된다.

$$g''(x)=\frac{d}{dx}g'(x)=e^x f''(e^x)+e^x f'(e^x)+e^x$$

이므로

$$g''(0)=f''(1)+f'(1)+1=0$$

이때, $f'(1)=-1$이므로 $f''(1)=0$

$$f(x)=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$$

라고 두면,

$f(1)=-1$에서 $c=-1$,
$f'(1)=-1$에서 $b=-1$,
$f''(1)=0$에서 $a=0$

곧, $f(x)=(x-1)^3-(x-1)-1=(x-1)^3-x$이다.

한편, $h'(8)=\frac{1}{g'(h(8))}$에서 $h(8)$의 값을 우선 찾자.

$$f(e^x)+e^x=(e^x-1)^3$$

이므로 $g(x)=8$이면 $x=\ln 3$,

곧, $h'(8)=\frac{1}{g'(\ln 3)}=\frac{1}{3f'(3)+3}$이고,

$f'(x)=3(x-1)^2-1$이므로 $f'(3)=11$이다.

따라서 $h'(8)=\frac{1}{36}$이다.

28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x) = -x + e^{1-x^2}$$

이다. 양수 t 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선과 곡선 $y = f(x)$ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$ 라 하자. $g(1) + g'(1)$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}$

② $\frac{1}{2}e + \frac{2}{3}$

③ $\frac{1}{2}e + \frac{5}{6}$

④ $\frac{2}{3}e + \frac{1}{2}$

⑤ $\frac{2}{3}e + \frac{2}{3}$

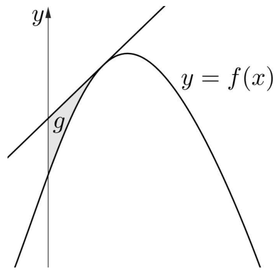
정답 ②

포인트

- 복잡한 식을 간단하게 바꿀 수 있는가?
- 부분적분법을 이용하여 적분식을 변형하고 이를 계산할 수 있는가?
- 식이 길어도 빡치지 않고 계산할 수 있는가?

해설

함수 $f(x)$ 의 개형은 대강 다음과 같다.



곧, $g(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t \{f'(t)(x-t) + f(t) - f(x)\}dx \\ &= \left[f'(t)\frac{(x-t)^2}{2} + xf(t) - \int f(x)dx \right]_0^t \\ &= -\frac{t^2 f'(t)}{2} + tf(t) - \int_0^t f(x)dx \quad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

여기서

$$\int_0^t f(x)dx = [xf(x)]_0^t - \int_0^t xf'(x)dx$$

이므로 위의 식은

$$㉠ = -\frac{t^2 f'(t)}{2} + \int_0^t xf'(x)dx$$

이다. 이를 이용해 $g(t) + g'(t)$ 의 식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & g(t) + g'(t) \\ &= \left\{ -\frac{t^2 f'(t)}{2} + \int_0^t xf'(x)dx \right\} + \left\{ -tf'(t) - \frac{t^2 f''(t)}{2} + tf'(t) \right\} \\ &= \int_0^t xf'(x)dx - \frac{t^2 f''(t)}{2} \end{aligned}$$

$f''(t) = -1 - 2xe^{1-x^2}$ 임을 감안하여 $t = 1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} & g(1) + g'(1) \\ &= \int_0^1 \left(-x^2 + xe^{1-x^2}\right)dx - \frac{-3}{2} \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{e^{1-x^2}}{2} \right]_0^1 + \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}e + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

29. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{40}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{20}{3}$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$

을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오.

정답 25

포인트

- 주어진 시그마 식의 의미를 해석할 수 있는가?
- 아래쪽 극한식 시그마 안의 식의 규칙성을 찾을 수 있는가?

해설

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{40}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{20}{3}$$

두 식을 연립하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=10, \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{10}{3}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n>0$이려면 $a_1>0$이므로 위의 두 식은 각각

$$\frac{a_1}{1-|r|}=10, \quad \frac{a_1}{1-r}=\frac{10}{3}$$

으로 쓸 수 있다. 두 식을 연립하면 $a_1=5$, $r=-\frac{1}{2}$이다.

한편, $(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$는 $k=1, 2, 3, \cdots$을 대입했을 때

$$-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, \cdots$$

가 반복된다. 다시 말해,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)$$
$$=-a_{m+1}-a_{m+2}+a_{m+3}+a_{m+4}-\cdots$$

인 것이다. 항을 두 개씩 묶어서 생각해보자.

$$-a_{m+1}-a_{m+2}=-5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m-5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$
$$=-\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m$$
$$a_{m+3}+a_{m+4}=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+2}+5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+3}$$
$$=\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+2}$$
$$\cdots$$

이렇게 두 개씩 항을 묶어서 위의 합을 관찰하면

첫째항이 $-\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m$이고, 공비가 $-\frac{1}{4}$인 무한등비급수의 합과 같음을 알 수 있다.

곧, 주어진 식의 값은

$$\frac{-\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m>\frac{1}{700}$$

이 되는 것이다. 이 식이 양수가 되기 위해 m은 홀수여야 하며,

$$m=1, 3, 5, 7, 9$$

까지 대입했을 때 부등식이 성립하므로 모든 m의 합은 25이다.

30. 두 상수 $a\,(1 \le a \le 2)$, b에 대하여 함수
$f(x) = \sin(ax + b + \sin x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 2\pi a + b$
> (나) $f'(0) = f'(t)$인 양수 t의 최솟값은 4π이다.

함수 $f(x)$가 $x = \alpha$에서 극대인 α의 값 중 열린구간 $(0, 4\pi)$에 속하는 모든 값의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소의 개수를 n, 집합 A의 원소 중 가장 작은 값을 α_1이라 하면, $n\alpha_1 - ab = \frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

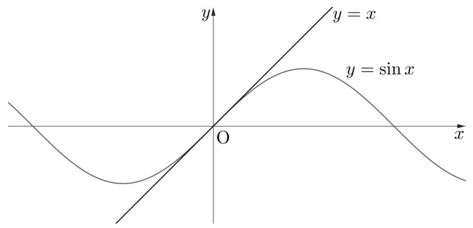
정답 17

포인트

- 삼각함수와 직선의 위치 관계를 찾을 수 있는가?
- 함수의 일대일대응 성질을 이용하여 해의 유일성을 보장할 수 있는가?
- 함수의 증감을 파악하여 합성함수의 진행적 성질을 추론할 수 있는가?
- 정수 조건과 부호 조건을 이용해 미지수를 구할 수 있는가?

해설

$f(0) = 0$에서 $\sin b = 0 \Rightarrow b = m\pi$ (m은 정수)
$f(2\pi) = 2\pi a + b$에서 $\sin(2\pi a + b) = 2\pi a + b$
이때, 곡선 $y = \sin x$와 직선 $y = x$는 그림과 같이 $x = 0$에서만 만난다는 점에 주목하자.



곧, $2\pi a + b = 0$이다.
이때, $b = m\pi$이므로 $2\pi a + b = 0$이려면 $2a$가 정수, 곧, a는 $\frac{(\text{정수})}{2}$의 꼴로 나타낼 수 있는 실수이다.
$1 \le a \le 2$이므로 a로 가능한 후보는

$$1,\ \frac{3}{2},\ 2$$

이다. 조건 (나)에 주목하자.

$$f'(x) = (a + \cos x)\cos(ax + b + \sin x)$$

에서

$$f'(0) = (a+1)\cos b,$$
$$f'(4\pi) = (a+1)\cos(4\pi a + b)$$

인데, 위의 후보들을 모두 대입하면 $f'(0) = f'(4\pi)$는 성립한다.
다만, 4π가 $f'(0) = f'(t)$인 양수 t의 최솟값인지는 고려해 볼 필요가 있다.
$a = 1$ 또는 $a = 2$인 경우 $f'(0) = f'(2\pi)$가 되어 조건을 만족시키지 않기 때문이다.
따라서 남은 후보는 $a = \frac{3}{2}$이며, $2\pi a + b = 0$에서 $b = -3\pi$이다.
이를 대입하면

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2} + \cos x\right)\cos\left(\frac{3}{2}x - 3\pi + \sin x\right)$$
$$= -\left(\frac{3}{2} + \cos x\right)\cos\left(\frac{3}{2}x + \sin x\right)$$

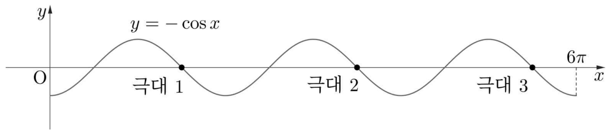
임을 얻는다.
$f(x)$가 $x = \alpha$에서 극대이면 $f'(x)$의 부호가 $(+)$에서 $(-)$로 변해야 한다.
위의 식에서 $\frac{3}{2} + \cos x$는 항상 양수이므로 $-\cos\left(\frac{3}{2}x + \sin x\right)$의 부호만 살펴보면 된다.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x + \sin x\right) = \frac{3}{2} + \cos x > 0$$

이므로 $\frac{3}{2}x + \sin x$는 증가함수이다. …… ㉠

$$x = 0 \text{일 때 } \frac{3}{2}x + \sin x = 0$$
$$x = 4\pi \text{일 때 } \frac{3}{2}x + \sin x = 6\pi \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

임을 고려하자. 결국 n의 값은
열린구간 $(0, 4\pi)$에서 $-\cos\left(\frac{3}{2}x + \sin x\right)$의 값이 $(+)$에서 $(-)$로 변하는 지점의 개수이다.
이 값은 ㉠, ㉡을 참조했을 때 열린구간 $(0, 6\pi)$에서 $-\cos x$의 값이 $(+)$에서 $(-)$로 변하는 지점의 개수와 같다.
따라서 아래의 그림을 참조하면 $n = 3$이다.



위의 그림을 참조했을 때, α_1은 열린구간 $(0, 4\pi)$에서
$-\cos\left(\frac{3}{2}x + \sin x\right) = 0$이 되는 "두 번째" 지점이다.
"첫 번째" 지점은

$$\frac{3}{2}x + \sin x = \frac{\pi}{2}$$

가 될 때이며, "두 번째" 지점은

$$\frac{3}{2}x + \sin x = \frac{3}{2}\pi$$

일 때이다. 이 방정식은 $x = \pi$를 대입했을 때 성립하고,
함수 $\frac{3}{2}x + \sin x$는 증가함수(일대일대응)이므로 $\alpha_1 = \pi$임을 확정할 수 있다.
이상에서 구한 값들을 정리하면

$$a = \frac{3}{2},\ b = -3\pi,\ n = 3,\ \alpha_1 = \pi$$

이므로

$$n\alpha_1 - ab = 3 \times \pi - \frac{3}{2} \times (-3\pi)$$
$$= \frac{15}{2}\pi$$

곧, $p + q = 2 + 15 = 17$이다.