

[문제 1번] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 서로 구분이 되지 않는 주사위 3개를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수  $a, b, c$  (단,  $a \geq b \geq c$ )에 대해 아래 식의 값이 자연수인 경우의 수를 구하시오.

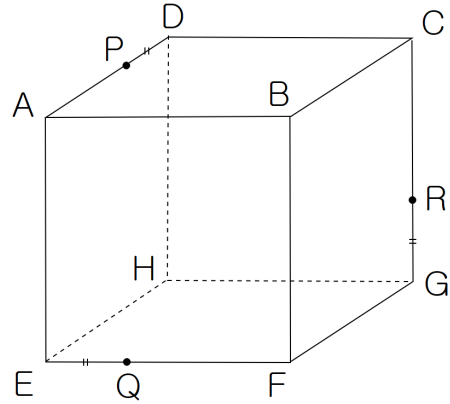
$$\frac{a}{3}(a-c)^3 + \frac{b}{2}(a-c)^2 + (a-c)$$

2. 중심이 원점이고 반지름이 1인 원을  $x$ 축 방향으로  $p$ 만큼(단,  $0 < p < 3$ )  $y$ 축 방향으로 1만큼 평행이동한 원  $O$ 가 있다. 원  $O$ 의 중심을  $P$ 라 하고, 원  $O$ 가 직선  $y = -\frac{1}{3}x + 2$ 와 만나는 두 점을 각각  $Q, R$ 이라 하자. 삼각형  $\triangle PQR$ 의 넓이가 최대가 되는  $p$ 를 구하고, 이때 삼각형  $\triangle PQR$ 의 넓이를 구하시오.

3. 자연수  $n$ 에 대해 한 변의 길이가  $\sqrt[n]{n}$ 인 정육각형의 임의의 세 꼭짓점으로 만든 삼각형 중 넓이가 양의 정수인 삼각형의 개수를  $a_n$ 이라고 하자.  $\sum_{n=1}^{2025} a_n$ 의 값을 구하시오.

[문제 2번] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육면체  $ABCD-EFGH$ 가 있다. 점  $P, Q, R$ 는 각각 모서리  $AD, EF, GC$  위에 있고,  $\overline{DP} = \overline{EQ} = \overline{GR}$ 를 만족시키며 움직인다. 점  $P, Q, R$ 를 지나는 평면과 평면  $EFGH$ 가 이루는 각의 크기는 일정함을 보이시오.



2. 집합  $\{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 7, 1 \leq y \leq 2, x, y \text{는 자연수}\}$ 의 원소인 14개의 점에 빨간색, 파란색, 노란색의 세 가지 색 중 한 가지 색을 칠한다. 이 집합의 원소인 두 점  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 가  $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1$ 을 만족시키면 서로 다른 색을 칠하고자 할 때, 가능한 모든 경우의 수를 구하시오.

3. 사차함수  $f(x)$ 의 도함수는  $f'(x) = x^3 - x^2 + k$ 이다 (단,  $k$ 는 실수). 이때, 실수  $t$ 에 대해 직선  $y = t$ 와 함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수를  $g(t)$ 라 하자. 함수  $g(t)$ 가 연속이 아닌 점을 오직 1개만 갖게 하는  $k$ 의 값의 범위를 구하시오.