

2024학년도 1학기 2회고사

2024년 7월 1일(월) 1교시



과 목	과목코드	SA11	대 상	2학년
	과목명	수학 I		1~9반

- 전체 : 총 (10)쪽
선택형 15문항(60점), 서답형 6문항(40점)
- 선택형 문항은 컴퓨터 사인펜으로 마킹하고
서답형 문항은 검정색 볼펜으로 정답을 작성하시오.
- 시험시간은 50분입니다.

1. $\log_4 \frac{129^2 - 257}{33^2 - 65}$ 의 값은? [2.8점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

2. 아래 조건을 만족시키는 두 정수 a, b 에 대하여, $a+b$ 의 최댓값과 최솟값으로 옳은 것은? [3.5점]

- (가) a 와 b 는 -16 이상 16 이하이다.
(나) x 에 대한 방정식 $4^x - a \times 2^{x+1} + b = 0$ 은 오직 하나의 실근을 가진다.

	최댓값	최솟값
①	6	-32
②	12	2
③	12	-16
④	20	2
⑤	20	-32

3. 아래 조건을 만족시키는 세 자연수 x, y 에 대하여, 순서쌍 (x, y) 의 개수를 $f(n)$ 이라 하자.

$$\frac{1}{\log_x 6} + \frac{2}{\log_y 36} = n$$

이때, $\sum_{k=1}^8 \frac{1}{f(k)+1}$ 의 값은? [4.3점]

- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{28}{45}$ ③ $\frac{29}{45}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{31}{45}$

4. 두 상수 $a(a < 5), b$ 에 대하여, $x > a$ 일 때 정의되는 함수

$$f(x) = \begin{cases} \log_3(x-a)+b & (a < x \leq 5) \\ 2^{-x+7}+2b-4 & (x > 5) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 실근의 개수가 1이 되도록 하는 모든 t 의 범위는 $t < 4$ 이다.

$a+b$ 의 값은? [3.8점]

- ① $\frac{20}{3}$ ② $\frac{62}{9}$ ③ $\frac{64}{9}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ $\frac{68}{9}$

5. 공차가 4이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 을

$$b_n = a_n + a_{n+1}$$

라 할 때, 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건이 성립한다.

(가) $b_1 < b_{n+1} - b_n$

(나) $\sum_{k=1}^n b_k > 0$

b_5 의 최댓값과 최솟값의 합은? [4.1점]

- ① 68 ② 70 ③ 72 ④ 74 ⑤ 76

6. 두 상수 $a(a > 1)$, b 에 대하여, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$f(x) = a^x, \quad g(x) = 2x + b$$

일 때, 다음 조건이 성립한다.

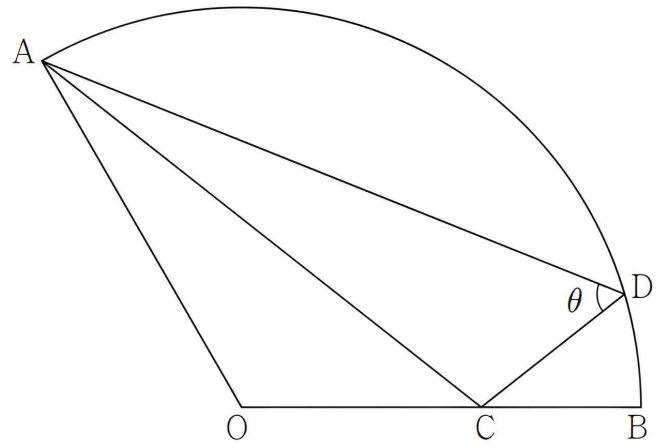
(가) $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족시키는 실수 x 의 개수는 1이다.

(나) $f(x) + b - 1 = (g \circ f)(x)$ 를 만족시키는 실수 x 의 값은 $b^2 - 2b - 8$ 이다.

$a^2 + b^2$ 의 값은? [3.9점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

7. 그림과 같이 반지름의 길이가 5이고 호의 길이가 $\frac{10}{3}\pi$ 인 부채꼴 AOB가 있다. 선분 OB를 3:2로 내분하는 점을 C라 하고, 호 AB 위의 점 D를 잡는다. $\angle ADC = \theta$ 일 때, $\sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta$ 이다. 이때, $\overline{AD} + \overline{CD}$ 의 값은? [4.5점]



- ① $\frac{71}{7}$ ② $\frac{72}{7}$ ③ $\frac{73}{7}$ ④ $\frac{74}{7}$ ⑤ $\frac{75}{7}$

8. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & (a_n \text{이 제곱수인 경우}) \\ (a_n+1)^2 & (a_n \text{이 제곱수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1 < 100$, $a_6 + a_7 = 12$ 일 때, 모든 a_1 의 값의 합은? [4.2점]

- ① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

9. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$$S_n = n!(an + b)$$

이다. 이때, 다음 조건이 성립한다.

(가) $a_1 \times a_2 = 0$

(나) $|a_1| + |a_2| + |a_3| = 24$

이때, $2a+b$ 의 값으로 가능한 모든 값의 곱은? (a, b 는 실수) [4.3점]

- ① 140 ② 142 ③ 144 ④ 146 ⑤ 148

10. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \sum_{k=1}^n ka_k$$

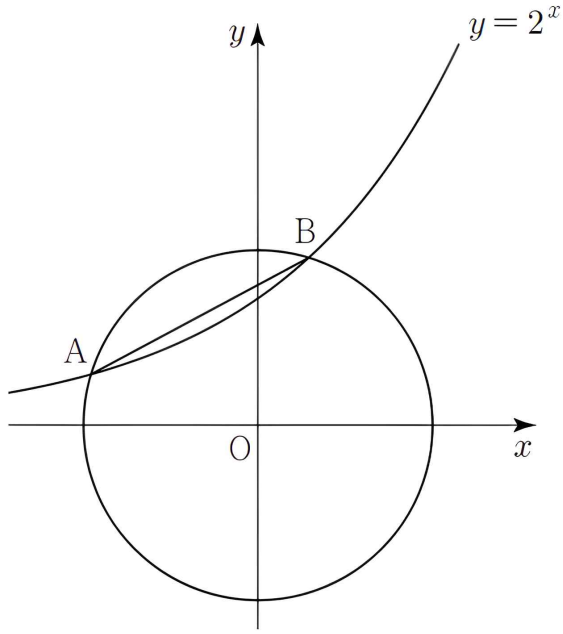
를 만족시킨다. 이때, $\sum_{k=1}^{25} \frac{(-1)^{k+1}}{a_k}$ 을 120으로 나눈 나머지는? [4.4점]

- ① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

11. $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ 인 삼각형 ABC의 내각 중에서 크기가 가장 큰 각을 θ 라 할 때, $\sin^2 \theta + \cos \theta$ 의 값은? [3.3점]

- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

12. 그림과 같이 좌표평면 위의 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 과 곡선 $y = 2^x$ 가 서로 다른 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에서 만난다. $\overline{AB} = r\sqrt{2}$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.4점]



<보 기>

- ㉠. $r^2 < 1$
- ㉡. $r^2 = x_1^2 + x_2^2$
- ㉢. $2^{x_1} = \log_4(-x_1)$

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

13. 두 상수 a, b 에 대하여 집합 $U = \{x | 0 \leq x < 2\}$ 의 두 부분집합 A, B 를

$$A = \{x | \cos^2 \pi x = 1 - a\}, B = \{x | 2\cos(b\pi x) = 1\}$$

라 하자. $n(A \cap B) = 4$ 일 때, $a + b$ 의 값은? [4.2점]

- ① 2
- ② $\frac{9}{4}$
- ③ $\frac{5}{2}$
- ④ $\frac{11}{4}$
- ⑤ 3

14. 아래 조건을 만족시키는 70 이하의 모든 자연수 N 의 값의 합은? [4.3점]

- (가) $N^{\frac{3}{n}}$ 이 1이 아닌 자연수가 되도록 하는 자연수 n 이 2개 이상 존재한다.
- (나) $N^{\frac{3}{n}}$ 이 1이 아닌 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $10 \leq M + m \leq 19$ 이다.

- ① 144
- ② 147
- ③ 150
- ④ 153
- ⑤ 156

15. 삼각형 ABC가

$$c \sin C \times (\sin A + \sin B) = a \sin^2 A + b \sin^2 B$$

를 만족시킬 때, 삼각형 ABC로 옳은 것은? [4점]

- ① 정삼각형
- ② $a = b$ 인 삼각형
- ③ $b = c$ 인 삼각형
- ④ $C = \frac{\pi}{3}$ 인 삼각형
- ⑤ c 가 빗변인 직각삼각형

※ 서1 ~ 서3 문항은 단답형 문항입니다. OMR 시트지의 서답형 답란에 답만 작성하시오.

서1(단답형). 세 실수 a, b, c 에 대하여

$$2^{-a} = \log_2 a, 3^{-b} = \log_2 b, 2^{-c} = \log_3 c$$

일 때, a, b, c 의 대소관계를 나타내시오.

[5점] (부분점수 없음)

서2(단답형). 첫째항이 1이고, 모든 실수 n 에 대하여

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{n} = n$$

을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, $\sum_{k=1}^5 a_k$ 의 값을 구하시오.

[5점] (부분점수 없음)

서3(단답형). $0 \leq x \leq 10$ 일 때, $(3^x - 81) \left(2 \sin \frac{\pi x}{2} - 1 \right) < 0$ 을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합은?

[5점] (부분점수 없음)

※ 서4 ~ 서6 문항은 서술형 문항입니다. OMR 시트지의 서답형 답란에 풀이과정과 답을 모두 작성하시오.

서4(서술형). 모든 자연수 n 에 대하여

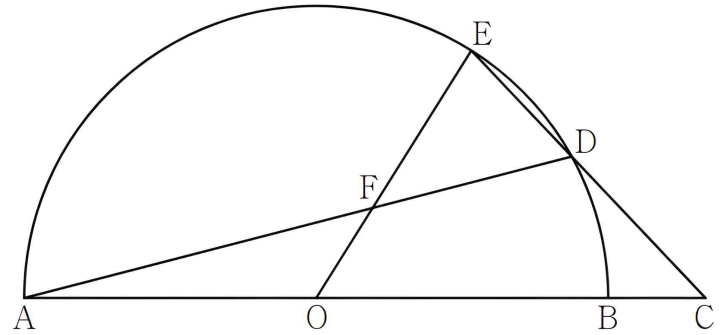
$$\frac{(n+3)!}{8} > 2^n$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

[총 8점] (부분점수 있음)

서5(서술형). 그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원이 있다. 반직선 AB 위에 점 C를 $\overline{BC}=1$ 이 되도록 잡고, 반원 위의 점 D를 $\overline{CD}=2$ 가 되도록 잡는다. 직선 CD가 반원과 만나는 점 중, 점 D가 아닌 점을 E라 하자. 선분 AD와 선분 OE의 교점을 F라 할 때, 선분 EF의 길이를 구하시오.

[총 8점] (부분점수 있음)



서6(서술형). $a > 1$ 일 때, 함수 $y = a^{2x} + x^2$ 의 최솟값은 항상 1보다 작음을 보이시오. [총 9점] (부분점수 있음)

※ 확인사항

답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.