2025학년도 인듐 모의고사 1회 해설

[빠른 정답 : 공통]

1	②	2	③	3	①	4	③	5	②
6	④	7	⑤	8	⑤	9	②	10	①
11	⑤	12	④	13	①	14	⑤	15	⑤
16	36	17	2	18	12	19	7	20	6
21	4	22	288						

[빠른 정답 : 미적분]

				23	⑤	24	③	25	②
26	①	27	②	28	③	29	40	30	35

수학 I	지수와 로그	1, 7, 17, **21**
	삼각함수	3, **11**, **13**,
	수열	5, 8, **15**, 18
수학 II	극한과 연속	2, 4, **14**
	미분	6, **10**, 19, **22**
	적분	**9**, **12**, 16, **20**

출제 : 김영주(인듐)
문제 검토해주신 분 : 주나, 이성연
윤문 및 도움주신 분 : 김상혁(hate 곽)

이 자리를 빌려 다시 한 번 감사드립니다.

1. 난이도 □□□□□ [로그]

$$\log_2 7 \times \log_7 8 = \frac{\log 7}{\log 2} \times \frac{\log 8}{\log 7} = \boxed{3}$$

2. 난이도 □□□□□ [함수의 연속]

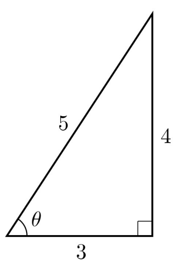
$$\lim_{x \to 2} f(x) + f(2) = 2f(2) = 6,\ f(2) = \boxed{3}$$

3. 난이도 □□□□□ [삼각함수]

각변환 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$을 이용하자.

이때 $\cos\theta > 0$이며 $\pi < \theta < 2\pi$이므로 <u>θ는 제4사분면의 각</u>이다.

$\therefore\ \tan\theta = \boxed{-\frac{4}{3}}$



4. 난이도 □□□□□ [미분(미분계수의 정의)]

먼저 $f'(x) = 2x + k$이다. 이때

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$이므로

$\Rightarrow \frac{1}{4} f'(2) = 4,\ f'(2) = k + 4 = 16 \qquad \therefore\ k = \boxed{12}$

5. 난이도 □□□□□ [수열(등비수열)]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

$\frac{a_6}{a_2} = r^4 = 9$, 모든 항의 양수이므로 $r = \sqrt{3}$이다.

이때 $a_7 + a_3 = a_3(r^4 + 1) = 10a_3 = 40,\ a_3 = 4$

$\therefore\ a_4 = a_3 \times r = \boxed{4\sqrt{3}}$

6. 난이도 □□□□□ [미분(미분가능성)]

연속성과 미분가능성을 다음과 같이 이해하자.

- 연속성 : $f(a-) = a + b,\ f(a+) = a^2 - a$

  $\Rightarrow a + b = a^2 - a,\ b = a^2 - 2a$

- 미분가능성 : $f'(a-) = 1,\ f'(a+) = 2a$

  $\Rightarrow 2a = 1,\ a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow b = a^2 - 2a = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \qquad \therefore\ a + b = \boxed{-\frac{1}{4}}$

7. 난이도 □□□□□ [지수]

n의 기우성에 따라 $f(n)$을 조사하자.

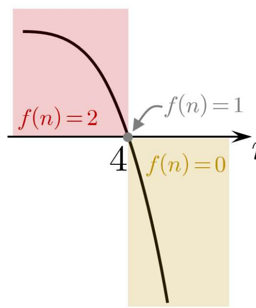
① n이 홀수일 때 : $f(n)$은 항상 1이다.

$\Rightarrow f(3) = f(5) = f(7) = 1$

② n이 짝수일 때 : $f(n)$의 양음을 조사한다.

$\Rightarrow f(2) = 2,\ f(4) = 1$

$f(6) = f(8) = 0$



$\therefore\ \sum_{n=2}^{8} f(n) = \boxed{6}$

8. 난이도 ■□□□□ [수열(등차수열 + 수열의 합)]

먼저, $\sum_{n=1}^{9} a_n = 9\times a_5 = 0$이다.

이제 부분분수 $\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{Q-P}\left(\dfrac{1}{P} - \dfrac{1}{Q}\right)$를 이용하자.

$$\sum_{n=1}^{9}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{9}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{9}{10} \qquad \therefore\ \sum_{n=1}^{9} b_n = \frac{9}{10} - \sum_{n=1}^{9} a_n = \boxed{\frac{9}{10}}$$

9. 난이도 □□□□□ [속도와 가속도]

점 P의 시각 t에서의 변위와 속도를 $s(t)$, $v(t)$라 하자. 이때

$$v(t) = \int a(t)dt = \int (6t^2+2)dt = 2t^3+2t+C$$

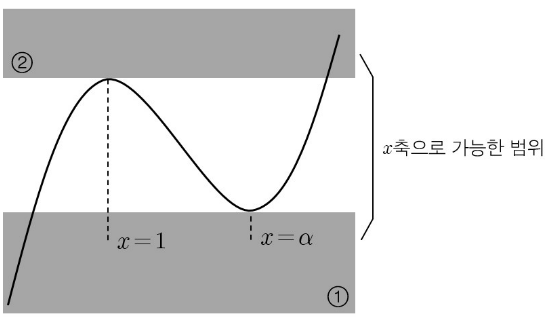
$$s(t) = \int (2t^3+2t+C)dt = \frac{1}{2}t^4+t^2+Ct$$

$\Rightarrow\ v(2) = C+20,\ s(2) = 2C+12\ :\ C=8$

$\therefore\ v(3) = 2\times 3^3 + 2\times 3 + 8 = \boxed{68}$

10. 난이도 ■■■■□ [미분] #2.6단계

$f(x)$가 $x=1$에서 극대, $x=\alpha$에서 극소라고 하자. 이때 조건 (가), (나)를 다음과 같은 그림으로 정리할 수 있다.



이때 $f(0) = -4$이므로 $f(x) = 2x^3+px^2+qx-4$라 할 수 있고, $f'(1) = 0$이므로 $6+2p+q=0$이다. 즉, $f(x) = 2x^3+px^2-2(p+3)x-4$라 쓸 수 있다.

이제 x축의 위치에 따라 방정식이 만족시켜야 하는 조건들을 정리해보자.

① $f(\alpha)\geq 0$일 때

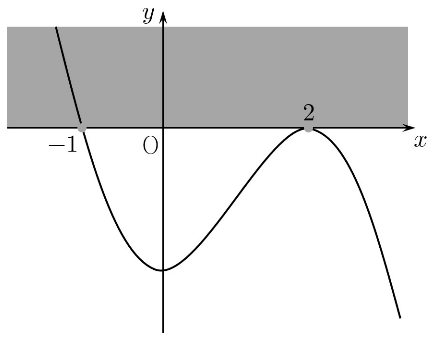
$f'(\alpha) = 0$이므로 $6\alpha^2+2p\alpha-2(p+3) = 0$이다.

즉, $6(\alpha^2-1) = 2p(1-\alpha)$, $p = -3(\alpha+1)$이다.

$\Rightarrow\ f(x) = 2x^3-3(\alpha+1)x^2+6\alpha x-4$

이때 $f(\alpha) = 2\alpha^3-3\alpha^2(\alpha+1)+6\alpha^2-4$이므로

$$f(\alpha) = -\alpha^3+3\alpha^2-4 = -(\alpha+1)(\alpha-2)^2 \geq 0$$



즉, $\alpha\leq -1$ 또는 $\alpha = 2$를 얻을 수 있다.

이때 극대 조건에 의해 $\alpha > 1$이므로 이를 만족하는 α는 2가 유일하다. : $f(x) = 2x^3-9x^2+12x-4$

$\Rightarrow\ f(3) = 54-81+36-4 = 5$

② $f(1)\leq 0$일 때

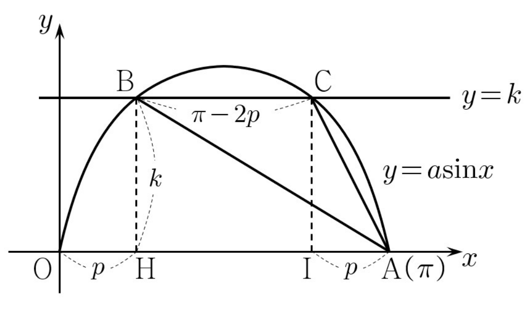
$f(1) = 2+p-2(p+3)-4 = -p-8\leq 0$, $p\geq -8$

이때 $f(3) = 54+9p-6(p+3)-4 = 3p+32\geq 8$

①, ②에서 $\mathrm{Min}\{f(3)\} = \boxed{5}$이다.

[참고] ②의 경우만을 생각하고 $\mathrm{Min}\{f(3)\}$를 구하면 8이 나온다. 항상 수식만으로 전개하고 끝~이 아니라 그래프를 그려 모든 경우의 수를 다 따질 수 있도록 하자.

11. 난이도 ■■□□□ [삼각함수]



그림과 같이 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하자. 이때 $\overline{\mathrm{OH}}$의 길이를 p라 하면 $\overline{\mathrm{HI}}=\overline{\mathrm{BC}}=\pi-2p$이므로 다음과 같이 두 삼각형 CIA, BHA에서 <u>피타고라스 정리</u>를 사용하자.

① 삼각형 CIA : $k^2+p^2=(\pi-2p)^2$

② 삼각형 BHA : $k^2+(\pi-p)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)^2$

① − ②에서 $2\pi p-\pi^2=\frac{\pi^2}{4}-4\pi p+4p^2$

$\Rightarrow\ 5\pi^2-24\pi p+16p^2=(5\pi-4p)(\pi-4p)=0$

즉, $p=\frac{\pi}{4}$이다. ($\because\ p<\frac{\pi}{2}$)

이때 $k^2=(\pi-2p)^2-p^2=\frac{3}{16}\pi^2$이며 $k=a\sin\frac{\pi}{4}$

이므로 $a\times k=(\sqrt{2}\,k)\times k=\sqrt{2}\,k^2=\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{16}\pi^2}$

12. 난이도 ■■□□□ [적분]

$\int_0^1 f(t)dt=A$라 하자.

이때 $\int_{-1}^0 f(t+1)dt=\int_0^1 f(t)dt=A$이므로

$\int_{-1}^0\{f(x+1)-1\}dx=\int_{-1}^0(x^2+Ax)dx$

$\Rightarrow\ A-1=\left.\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}Ax^2\right|_{-1}^0=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}A,\ A=\frac{8}{9}.$

$\Rightarrow\ f(x+1)=x^2+\frac{8}{9}x+1$

$\therefore\ \int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x+1)dx=\boxed{\frac{16}{9}}$

13. 난이도 ■□□□□ [삼각함수(사인/코사인 법칙)]

사인법칙에 따라 $\overline{\mathrm{PQ}}=3,\ \overline{\mathrm{QR}}=4\ \Rightarrow\ \overline{\mathrm{OQ}}=\frac{12}{5}.$

즉, $\cos\angle\mathrm{RQO}=-\cos\angle\mathrm{QPO}=-\frac{3}{5}$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{OR}}=\sqrt{4^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2-2\times4\times\frac{12}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)}$

$=\boxed{\frac{8\sqrt{13}}{5}}$

14. 난이도 ■□□□□ [함수의 극한]

$F(x)=\frac{1}{3}\{f(x)\}^3,\ G(x)=\frac{1}{3}\{g(x)\}^3$이다.

ㄱ. $f(x)$가 실수 전체에서 연속이 아니므로 $F(x)$, $G(x)$ 모두 실수 전체에서 연속이 아니다. (True)

ㄴ. 두 가지 경우의 수로 나누자.

① $x<1$일 때 : $F(x)=G(x)=0$

② $x>1$일 때 : $F(x)=G(x)=\frac{1}{3}x^3$ (True)

ㄷ. 좌극한과 우극한으로 나눠 극한을 조사하자.

좌극한 : $\lim_{x\to1-}F(x)=\lim_{x\to1-}G(x)=0$

우극한 : $\lim_{x\to1+}F(x)=\lim_{x\to1+}G(x)=\frac{1}{3}\times1^3=\frac{1}{3}$

즉, $\lim_{x\to1}\{F(x)-G(x)\}=0$이다.

이때 $x\neq1$일 때 $F(x)-G(x)$는 항상 0이므로 주어진 극한 역시 <u>모든 실수 t에 대하여 연속</u>이다.

(True)

15. 난이도 ■■□□□ [수열]

가능한 모든 a_n의 경우의 수를 정리하자.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	3	4	5	6
	2		8	16
	-2	-4	-8	-16

$a_2+a_3=-6$이므로 $a_5>0$임을 가정하면

$$a_2+a_3+a_5\ \geq\ 0$$

이다. $\Rightarrow\ a_5<0$이다. : 즉 $a_5=-16$

이제 $a_1\sim a_5$를 5로 나눈 나머지를 정리하여 보자.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	3	4	0	4
	2		3	
	3	1	2	

$(a_2,\ a_3,\ a_4)=(3,\ 4,\ 8),\ (2,\ -4,\ -8),\ (-2,\ 4,\ 8).$

$\Rightarrow\ M=3\times4\times8=96,\ m=(-2)\times4\times8=-64$

$\therefore\ M-m=\boxed{160}$

16. 난이도 □□□□□ [적분]

$f(x)=2x^3-5x+C,\ f(-1)=C+3=0,\ C=-3.$

$\therefore\ f(3)=54-15-3=\boxed{36}$

17. 난이도 □□□□□ [로그]

$\log_4(x+2)=\log_4 x^2,\ x^2-x-2=0$

$\therefore\ x=\boxed{2}\ (\because\ x>0)$

18. 난이도 ■■□□□ [수열(등차수열)]

공차를 d라 하자.

$a_4+a_7=2a_{5.5}=4,\ a_5+\dfrac{1}{2}d=2$이다.

즉, d_5가 정수이므로 d는 짝수다.

① $d=2$일 때 : $\displaystyle\sum_{n=1}^{9}|a_n|=16\times2+9=41$

② $d\geq4$일 때 : $\displaystyle\sum_{n=6}^{9}|a_n|\leq\sum_{n=1}^{5}|a_n|$이다.

$\displaystyle\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{9}|a_n|\geq2\sum_{n=6}^{9}|a_n|,\ \sum_{n=6}^{9}a_n\leq40$

$\Rightarrow\ a_{7.5}=a_{5.5}+2d=2d+2\leq10,\ d\leq4$

$\Rightarrow\ d=4\qquad\therefore\ a_8=a_{7.5}+\dfrac{1}{2}d=10+2=\boxed{12}$

19. 난이도 □□□□□ [미분(극대와 극소)]

$y(x)=2x^3-18x^2+48x$라 하자.

$\Rightarrow\ y'=6x^2-36x+48=6(x-2)(x-4)$

이때 $y(2)=40,\ y(4)=32$이다.

$\therefore\ k=33,34,\cdots,39\ \Rightarrow\ \#(k)=\boxed{7}$

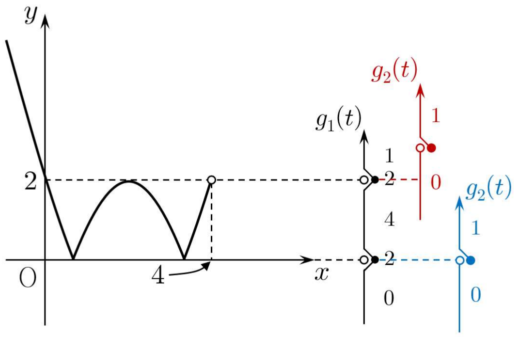
20. 난이도 ■□□□□ [적분(넓이와 적분)]

$y=f(x)$와 $y=2a(x-2)$는 $x=2,\ x=6$에서 만난다. $\Rightarrow\ S_1=\dfrac{1}{6}\times a\times4^3=\dfrac{32}{3}a$

같은 논리로 $S_2=\dfrac{1}{2}\times8a\times(2+6)=32a$

$\Rightarrow\ a=\dfrac{3}{8}\qquad\therefore\ a\times\displaystyle\int_0^8 f(x)dx=\boxed{6}$

21. 난이도 ■■□□□ [지수(지수함수 추론)]



$y=|x^2-4x+2|\ (x<4)$와 $y=t$의 교점의 개수를 $g_1(t)$, $y=\log_2(x-k)\ (x\geq4)$와 $y=t$의 교점의 개수를 $g_2(t)$라 하자.

이때 $7\leq\displaystyle\lim_{t\to\alpha-}g(t)+g(\alpha)+\lim_{t\to\alpha+}g(t)\leq8$을 만족시키는 실수 α를 조사하면 $\alpha=0$ 또는 $\alpha>2$이다.

① $\alpha=0$일 때 : $f(4)=0$이다. $\Rightarrow\ k=3$

$\Rightarrow\ \alpha+k=3$

② $\alpha=2$일 때 : $f(4)>2$이다. $\Rightarrow\ k<0$

$\Rightarrow\ \alpha+k<2$

$\therefore\ \Sigma_{\mathbb{Z}}(\alpha+k)=1+3=\boxed{4}$

22. 난이도 ■■■■□ [미분] #2.4단계

(가) 조건을 다음과 같이 해석하자.

"연립방정식 $\begin{cases}f(x)=C\\ f(C)=C\end{cases}$의 근의 개수가 3"

즉, $y=f(x)$와 $y=|x|$의 교차 지점들을 조사하자.

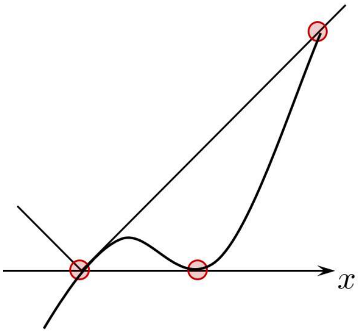
먼저 $f'(0)<0$을 가정하자.

이때 $f(x)$는 $f(z)<0$인 양수를 z를 무조건 가지며, $i\to\infty$일 때 $f(i)>i$이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(x)=x$의 양수 근이 1개 이상 존재한다. 하지만 $f(x)=0$이 이미 3개의 근을 가지므로 이는 연립방정식의 근의 개수가 3임에 모순이다!

즉, $f'(0)>0$이며, 이때 방정식을 만족하는 개형은 다음 그림들과 같음을 알 수 있다. 이때 각각의 개형에서 근을 0, α, 2α라 하면 α는 정수가 아니고 2α는 정수다.

$\Rightarrow\ \alpha$는 $z+\dfrac{1}{2}$ 꼴 (단, z는 음이 아닌 정수)

① $f'(\alpha)=0$이고 $f(\alpha)=0$일 때



$\Rightarrow$ $f(x)=Cx(x-\alpha)^2$이고 $f(2\alpha)=2\alpha$

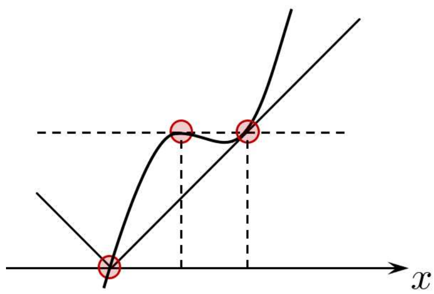
($\because$ $f'(0)=0$과 잘 알려진 삼차함수의 비율관계에 의하여 같은 조건이다!)

$\Rightarrow$ $C\alpha^2=1$, 이때 $\alpha=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \cdots$

즉, 최고차항의 계수가 자연수이므로 $C=4$, $\alpha=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $f(x)=4x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$, $f(3)=12\times\frac{25}{4}=75$

② $f'(\alpha)=0$이고 $f(\alpha)=0$일 때



$\Rightarrow$ $f(x)-2\alpha=C(x-\alpha)^2(x-2\alpha)$이고 $f(0)=0$

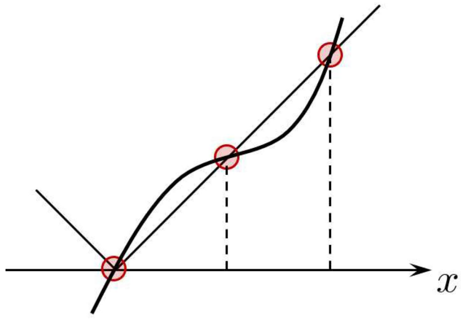
$\Rightarrow$ $C\alpha^2=1$, 이때 $\alpha=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \cdots$

같은 논리로 $C=4$, $\alpha=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $f(x)=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x-1)+1$

$\Rightarrow$ $f(3)=4\times2\times\frac{25}{4}+1=51$

③ $f(\alpha)=\alpha$, $f(2\alpha)=2\alpha$



$f(x)=Cx(x-\alpha)(x-2\alpha)+x$이므로 $f'(\alpha)\geq 0$.

($\because$ 변곡점에서 $f'(x)$가 최소다!)

$\Rightarrow$ $f'(\alpha)=-C\alpha^2+1\geq 0$, $C\alpha^2\leq 1$

이때 $\alpha>1$이면 $C<1$이므로 C가 자연수일 수 없다. : $\alpha=\frac{1}{2}$, $C=1,\ 2,\ 3,\ 4$

이때 $f(3)=C\times3\times\frac{5}{2}\times2+3=15C+3$이므로

$\sum f(3)=15(1+2+3+4)+12=162$

$\therefore$ $\sum f(3)=75+51+162=\boxed{288}$

미적분	수열의 극한	**28**
	덧셈 정리	26
	미분법	23, **29**, **30**
	적분법	24, 25, 27

23. 난이도 □□□□□ [미분법(음함수의 미분)]

양변을 x에 대하여 미분하자.

$$(1-y')e^{x-y}=2+y'$$

이제 $x=1$, $y=1$을 대입하면 $1-y'(1)=2+y'(1)$

$\therefore$ $y'(1)=\boxed{-\frac{1}{2}}$

24. 난이도 □□□□□ [적분법(적분의 정의)]

구간을 $0\sim\pi$로 두고 극한을 정적분으로 바꾸자.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi k}{n}=\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\sin x\,dx=\boxed{\frac{2}{\pi}}$$

25. 난이도 □□□□□ [적분법(곡선의 길이)]

곡선의 길이 $L=\int_1^2 \sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx$이다.

이때 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^5-1}$이므로 $L=\int_1^2 x^{\frac{5}{2}}dx$.

$\therefore\ L=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_1^2=\boxed{\frac{2}{7}(8\sqrt{2}-1)}$

26. 난이도 ■□□□□ [삼각함수의 덧셈정리]

$\angle \mathrm{BCP}=\frac{\pi}{2}-\alpha,\ \angle \mathrm{QCD}=\frac{\pi}{2}-\beta$이다.

$\Rightarrow\ \angle \mathrm{PCQ}=\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}$

이때 사인 법칙에 따라 $\sin\angle \mathrm{PCQ}=\frac{1}{2\times\frac{4}{7}}=\frac{7}{8}$.

$\sin\angle \mathrm{PCQ}=-\cos(\alpha+\beta)=-\left(\cos\alpha\cos\beta-\frac{15}{16}\right)$

$\therefore\ \cos\alpha\times\cos\beta=\frac{15}{16}-\frac{7}{8}=\boxed{\frac{1}{16}}$

27. 난이도 ■■□□□ [적분법(부분적분과 치환적분)]

양변에 e^x를 곱하고 (∵ 치환적분!) 적분구간을 $0\le x\le \ln2$로 두고 적분하자.

$\Rightarrow\ \int_0^{\ln2}\{f(e^x)+f(e^x+1)\}e^x dx$

$\quad=\int_0^{\ln2}(x^2+k)e^x dx=2(\ln2-1)^2+k$

좌변의 $e^x=u$로 두어 치환하면 적분구간은 $[1,2]$.

$\Rightarrow\ \int_1^2\{f(u)+f(u+1)\}du=\int_1^3 f(x)dx$

$\quad=2(\ln2)^2$

$\therefore\ k=2(\ln2)^2-2(\ln2-1)^2=\boxed{4\ln2-2}$

28. 난이도 ■■□□□ [삼각함수와 극한]

우선 $\angle \mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}$는 $\angle \mathrm{CAB}$를 이등분하는 선분이다.

즉, $f(\theta)=|\triangle \mathrm{AOQ}|+|\text{부채꼴 POQ}|-|\triangle \mathrm{AOP}|$

$=\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\theta-\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

이므로 $\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=1$

또, 정사각형의 한 변의 길이를 $\alpha(\theta)$라 하자.

이때 $\overline{\mathrm{AP}}=2\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\alpha(\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}+\alpha(\theta)\cos\frac{\theta}{2}$이므로

$\alpha(\theta)=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}},\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\alpha(\theta)}{\theta}=2\times\frac{1}{2}=1$

$\Rightarrow\ \lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\alpha(\theta)}{\theta}\right)^2=1$

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\boxed{1}$

29. 난이도 ■■■□□ [미분법(역함수의 미분)]

$k=\alpha(t)$라 하고, P에서 $y=x-2$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

이때 $\overline{\mathrm{PH}}$의 기울기는 $-\frac{1}{f'(\alpha(t))}$이므로

$-\frac{1}{f'(\alpha(t))}=\frac{(e^{\alpha(t)}-1)-(t-2)}{\alpha(t)-t}$

$\Rightarrow\ t=e^{\alpha(t)}+\frac{\alpha(t)}{1+e^{\alpha(t)}},\ \alpha(t)$는

$h(t)=e^t+\frac{t}{1+e^t}$에 대하여 $h(\alpha(t))=t$이다.

이때 $g(t)=f'(\alpha(t))=e^{\alpha(t)}$이므로

$g'(t)=\alpha'(t)\times e^{\alpha(t)}\ \Rightarrow\ g'(1)=\alpha'(1)\times e^{\alpha(1)}$

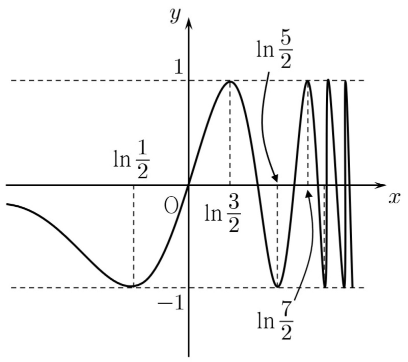
이때 $\{h(\alpha(t))\}'=\alpha'(t)h'(\alpha(t))=1$이다.

$\Rightarrow\ \alpha'(1)=\frac{1}{h'(\alpha(1))}=\frac{1}{h'(0)}=\frac{2}{3},\ \alpha(1)=0$

$\therefore\ g'(1)=\frac{2}{3},\ 60\times g'(1)=\boxed{40}$

30. 난이도 ■■■□□ [미분법(합성함수)] #1단계

먼저 $g(x)$의 개형을 그리자.



$g(f(x))=\pm 1$이므로 $f(x)=\ln\frac{1}{2},\ \ln\frac{3}{2},\ \ln\frac{5}{2},\ \cdots$

의 해의 개수가 3이어야 한다.

즉, $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수일 것이며, 방정식 $f(x)=\ln\frac{3}{2}$의 해가 1개여야 한다.

이때 $(-\infty, 0)$에서 $g(x)\in[-1, 0)$이며 $g(x)\neq -1$일 때 $f(g(x))=0$의 서로 다른 실근은 항상 $(-\infty, 0)$에서 2개씩 존재한다. 즉, $g(x)=-1$이어야 $f(g(x))=0$의 해의 개수가 3일 수 있다.

$\Rightarrow f(-1)=0$: $f(x)=p(x+1)(x-k)$

이때 $f\left(\frac{k-1}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}$이며 한 실근이 $\ln\frac{1}{2}$이다.

이제 $f(g(x))=0$의 -1이 아닌 두 실근을 α, β라고 하자. (단, $\alpha<\beta$) : $g(\alpha)=g(\beta)=k$

즉, $\sin\{\pi(1+e^{\alpha})\}=\sin\{\pi(1+e^{\beta})\}$이다.

삼각함수의 대칭성에 따라

$\pi(1+e^{\alpha})+\pi(1+e^{\beta})=3\pi \Rightarrow e^{\alpha}+e^{\beta}=1.$

또, $\alpha+\beta+\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{5}{72}$이므로 $e^{\alpha+\beta}=\frac{5}{36}$

$\Rightarrow e^{\alpha}=\frac{1}{6},\ e^{\beta}=\frac{5}{6} \Rightarrow g(\alpha)=\sin\frac{7}{6}\pi=-\frac{1}{2}.$

$\Rightarrow k=-\frac{1}{2},\ f(x)=p(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

즉, $f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{16}p=\ln\frac{3}{2},\ p=16\ln\frac{2}{3}$

$\Rightarrow f(x)=16\ln\frac{2}{3}(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ f\left(-\frac{1}{4}\right)=16\ln\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\ln\frac{8}{27},\ p+q=\boxed{35}$