제 1 회

pm. 11 모의고사 final season

수학 영역

성명		수험번호					-				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

오색 빛 하늘별 숲 사이로 너라는 꽃이 피어나

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 선택과목(확률과 통계, 미적분, 기하) 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

PPL 수학연구소

PM. 11 모의고사 final season

제 1회

수학 영역

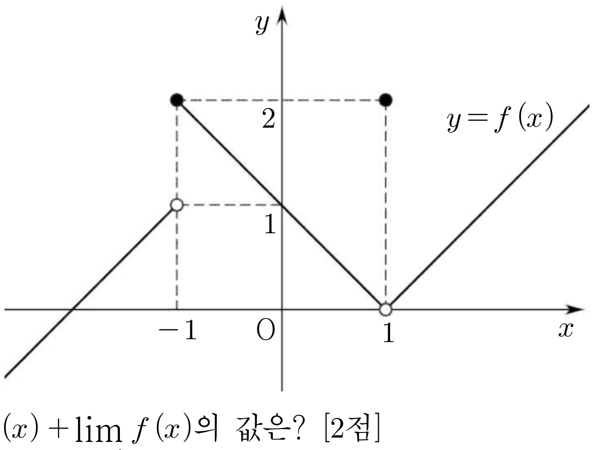
PPL 수학연구소

5지선다형

1. $2^{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \times 2^{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt[4]{2}$　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ 4　⑤ 8

2. 함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 1} f(x)$의 값은? [2점]

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 + a_7 = 4,\ a_4 + a_{12} = 12$$

일 때, a_6의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

4. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 1$일 때, 함수 $h(x) = xf(x)$ 위의 점 $(2,\ h(2))$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

5. $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi$인 θ에 대하여

$$3\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\theta + \frac{8}{3}\pi\right) = \sqrt{3}$$

일 때, $\cos\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right)$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$에서 x의 값이 0에서 2까지 변할 때, 평균변화율이 1이다. $f'(2) = 1$일 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

7. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자. $S_3 = 3$, $S_9 - S_6 = 192$일 때, a_1의 값은? [3점]

① $\frac{3}{11}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

8. 자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 직선 $y=n$이 만나는 점의 개수를 $g(n)$이라 하자.
$\sum_{n=1}^{5} g(n)=13$이고, $f'(3)=0$, $f(3)=1$일 때, $f(5)$의 값은? [3점]

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

9. $0 \le x < 6\pi$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=2\cos\frac{x}{3}+2,\ g(x)=2\sin\frac{x}{3}$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=g(x)$와 y축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라고 할 때, S_1+S_2의 값은? [4점]

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

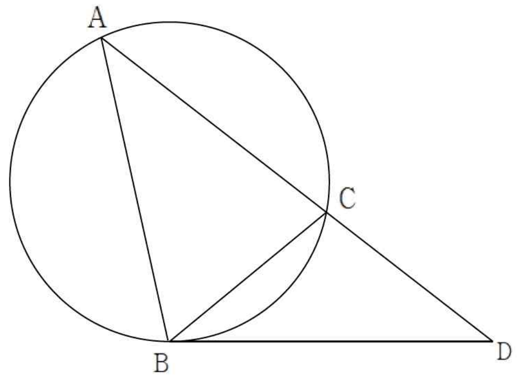
10. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 역함수 $g(x)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $f(4)=4$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+3$이다.

$\int_1^4 f(x)dx=9$일 때, $\int_1^{13} |f(x)-g(x)|dx$의 값은? [4점]

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

11. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=6$인 삼각형 ABC의 외접원이 있다. 원 위의 점 B에서의 접선과 선분 AC의 연장선이 만나는 점을 D라고 할 때, $\overline{\mathrm{CD}}=4$이다. $\sin(\angle \mathrm{BAC})=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$일 때, $\overline{\mathrm{BC}}<\overline{\mathrm{BD}}$이다. 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

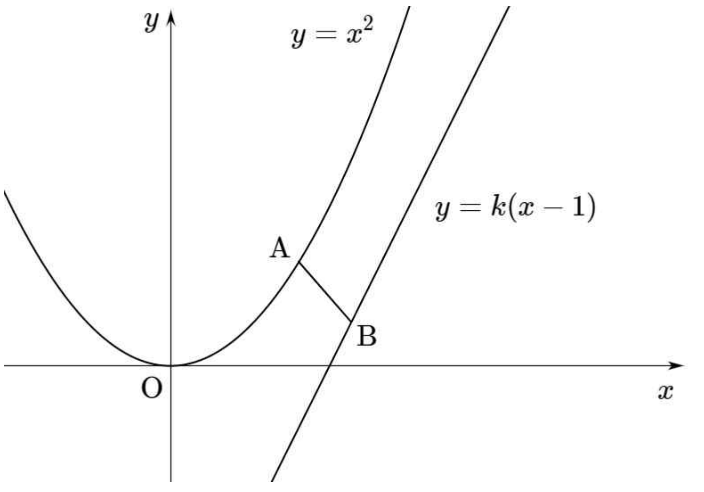


① $\dfrac{13\sqrt{7}}{4}$ ② $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$ ③ $\dfrac{17\sqrt{7}}{4}$ ④ $\dfrac{19\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $\dfrac{21\sqrt{7}}{4}$

12. 곡선 $y=x^2$ 위의 점 A와 직선 $y=k(x-1)$ 위의 점 B에 대하여 두 점 A, B 사이의 거리의 최솟값을 $f(k)$라 하자.

$$\lim_{k\to\alpha+}\frac{f(k)}{k-\alpha}\times\lim_{k\to\beta-}\frac{f(k)}{k-\beta}=p\quad(p\neq 0)$$

일 때, $\dfrac{2\alpha+\beta}{p^2}$의 값은? (단, α, β, p는 상수이다.) [4점]



① 68 ② 70 ③ 72 ④ 74 ⑤ 76

13. 정수 $k(0 \le k < 5)$에 대하여 이차함수

$$f(x) = x^2 - 10x - k^2 + 10k$$

가 있다. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $f(n)$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. $|g(n+2) - g(n)| \ge 1$을 만족시키는 n의 개수가 3일 때, $f(5)$의 값은? [4점]

① -25 ② -16 ③ -9 ④ -4 ⑤ -1

14. 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^{x+2} f(t)dt \ge \int_0^x f(t)dt + 4x + 4$$

이고, $\int_1^5 \{f(t) - 2t\}dt = 0$이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $\int_x^{x+2} f(t)dt \ge 4x + 4$이다.

ㄴ. 방정식 $\int_x^{x+2} \{f(t) - 2t\}dt = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. $f(0) = f(2) + 6$일 때, $f(7) = f(5) + 44$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 자연수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n-3n & (a_n<n) \\ a_n-nk & (a_n\geq n) \end{cases}$$

이다.

(나) $2a_4=a_3+a_6$

$70<a_1-a_5<80$일 때, $k+\sum_{n=1}^{5}a_n$의 값은? [4점]

① 155 ② 160 ③ 165 ④ 170 ⑤ 175

단답형

16. 방정식 $\log_3(x-a)=\log_9(x-a)$을 만족시키는 실수 x의 값은 4이다. a의 값을 구하시오. (단, $a<4$) [3점]

17. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-2x+a}{x^2-2x} & (x\leq 2) \\ b & (x>2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.) [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3-2k+3}{k+2}a_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+5}{k+2}a_k=n^2-3n+4$$

을 만족시킬 때, $19\times a_5$의 값을 구하시오. [3점]

19. 최고차항의 계수가 1이고, 극솟값이 3인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 오직 2뿐이다.

열린구간 $(a, a+2)$에서 $a<x_1<x_2<a+2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

$f(5)$의 값을 구하시오. [3점]

20. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^3-4t^2+3t$$

일 때, 시각 $t=0$부터 점 P가 두 번째로 운동 방향을 바꿀 때까지 점 P가 움직인 거리는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

21. 두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}3^{x-2}+7 & (x\le -4)\\ -2^{-x+a}-b & (x>-4)\end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> 집합 $\{f(x)\,|\,x$는 모든 실수$\}$의 원소 중 정수인 것의 개수는 0이다.

b의 최솟값이 m이고, $b=m$일 때 a의 최댓값을 M이라고 하자. $|M+m|$의 값을 구하시오. [4점]

22. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|=|2x+a|$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수)

> (가) 2보다 큰 상수 k에 대하여 $f(2)+f(k)=6$이다.
> (나) 함수 $|f(x)-3|$은 오직 $x=0$, 1에서만 미분 가능하지 않다.

$f'(0)<0$일 때, $(k-2)^2$의 값을 구하시오. [4점]

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

PM. 11 모의고사 final season

제 1회 수학 영역(확률과 통계)

PPL 수학연구소

5지선다형

23. 다항식 $(2x+1)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는? [2점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

24. 여섯 개의 숫자 1, 1, 2, 3, 3, 3 중에서 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수는? [3점]

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

25. 다음은 어느 대학교 신입생 400명을 대상으로 자연계열 또는 인문계열을 선택한 사람들의 성별을 조사한 표이다.

(단위 : 명)

전공계열 / 성별	자연계열	인문계열	계
남자	$a+4b$	$c-b$	d
여자	a	b	$4b$
계	$10b$	c	400

자연계열을 선택하는 사건과 성별이 남자인 사건이 서로 독립일 때, $a+2b-c+d$의 값은? [3점]

① 310 ② 320 ③ 330 ④ 340 ⑤ 350

26. A, B, C를 포함한 7명을 일렬로 세울 때, A, B, C 중 적어도 두 명은 이웃하게 서게 될 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{9}{14}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{11}{14}$

27. 어느 과수원에서 수확하는 수박 1개의 무게는 모평균이 m이고 표준편차가 20인 정규분포를 따른다고 한다.
이 과수원에서 수확한 수박 25개를 임의추출하여 얻은 표본평균 $\overline{x_1}$을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 $\alpha\%$의 신뢰구간이 $[158.3, 169.7]$이다. 이 과수원에서 수확한 수박 16개를 임의추출하여 얻은 표본평균 $\overline{x_2}$을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 $\alpha\%$의 신뢰구간의 길이는? (단, 무게의 단위는 g이다.) [3점]

① 14.25 ② 14.5 ③ 15.25 ④ 15.5 ⑤ 16.25

28. 주머니 A에는 빨간 공 3개, 노란 공 2개가 들어 있고, 주머니 B에는 빨간 공 2개, 검은 공 1개가 들어 있다.
한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 3번의 시행을 한다.

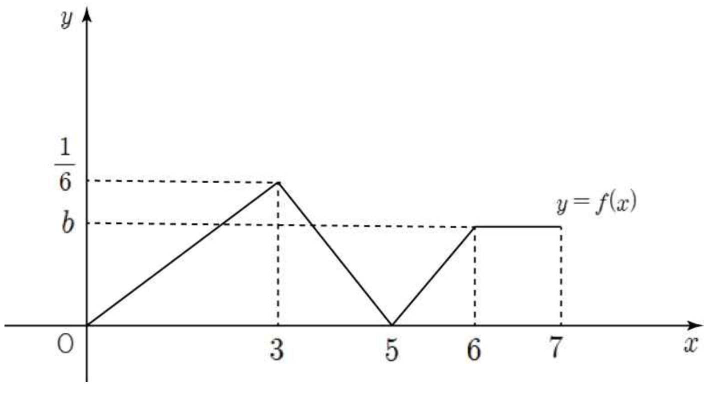
(가) 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 주머니 A에서 공을 두 개 뽑는다.
(나) 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이상이면 주머니 A와 주머니 B에서 동시에 공을 하나씩 뽑는다.
(다) 뽑은 두 개의 공의 색이 다르면 다시 집어넣고, 뽑은 두 개의 공의 색이 같으면 다시 넣지 않는다.

첫 번째 시행에서 주머니 A와 B에서 빨간 공이 각각 하나씩 뽑혔을 때, 마지막 시행 이후 주머니 A에 빨간 공이 남아 있지 않을 확률은? [4점]

① $\frac{11}{108}$ ② $\frac{17}{162}$ ③ $\frac{35}{324}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{37}{324}$

단답형

29. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 7$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다. $\frac{7}{18} \le \mathrm{P}(X \ge a) \le \frac{5}{6}$를 만족하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오. (단, b는 상수) [4점]



30. 네 개의 상자 A, B, C, D에 서로 같은 4개의 초콜릿과 서로 같은 6개의 사탕을 남김없이 넣으려고 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 빈 상자가 있을 수 있다.) [4점]

> (가) 상자 A에 들어 있는 사탕의 개수는 초콜릿의 개수보다 많다.
> (나) 초콜릿만 들어 있는 상자는 없도록 한다.

＊확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오
- 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

PM. 11 모의고사 final season

제 1회

수학 영역(미적분)

PPL 수학연구소

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin 2x}{1-\cos x}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

24. 곡선 $x^3+y^3+3xy+12=0$ 위의 점 $(2, -2)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{5}$

25. 곡선 $y=\dfrac{\ln(e^x+1)}{e^{-x}+1}$과 x축 및 두 직선 $x=\ln 2$, $x=\ln 8$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $(\ln 3)^2$ ② $\dfrac{3}{2}(\ln 3)^2$ ③ $2(\ln 3)^2$
④ $\dfrac{5}{2}(\ln 3)^2$ ⑤ $3(\ln 3)^2$

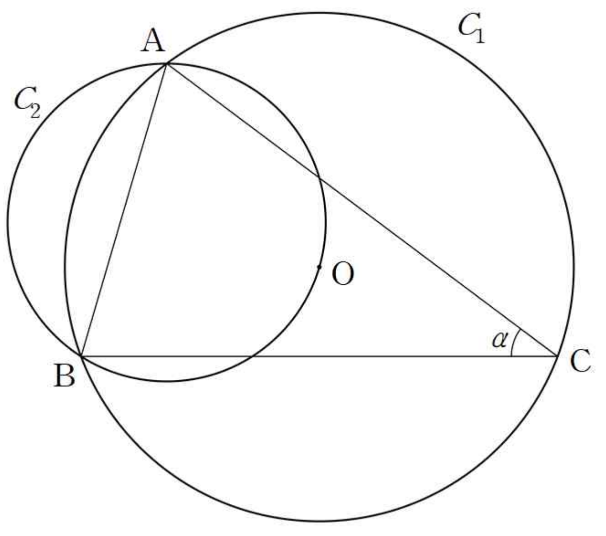
26. 공비가 r ($|r|<3$)인 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_1의 값은? [3점]

> (가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n+1}-1}{3^n}=\frac{7}{2}$
>
> (나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}\right)=5$

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{3}{10}$ ③ $\dfrac{2}{5}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{3}{5}$

27. 그림과 같이 삼각형 ABC의 외접원을 C_1이라 하고 원 C_1의 중심을 O라 할 때, 세 점 A, B, O를 지나는 원을 C_2라 하자. 두 원 C_1과 C_2의 반지름을 각각 r_1, r_2라 할 때, $r_1 : r_2 = 8 : 5$이다. $\angle \mathrm{ACB} = \alpha$라 할 때, $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$의 값은?

(단, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)[3점]



① $\frac{\sqrt{2}}{10}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{2}}{10}$

28. 정의역이 $\{x \mid -1 < x < 1\}$인 함수

$$f(x) = \ln(1-x^2)$$

에 대하여 $x=0$에서 $x=t$ $(0 \le t < 1)$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이를 $g(t)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

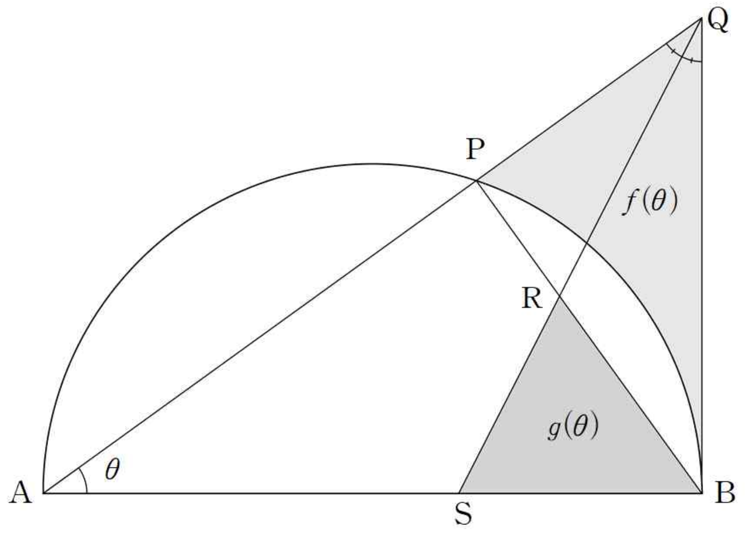
$$h(x) = (f \circ g^{-1})(x)$$

라 하자. $g\left(\frac{e-1}{e+1}\right) = k$일 때, $|k \times h'(k)|$의 값은? [4점]

① $\frac{2}{e^2+1}$ ② $\frac{2e}{e^2+1}$ ③ $\frac{2(e-1)}{e^2+1}$ ④ $\frac{2}{e+1}$ ⑤ $\frac{2e}{e+1}$

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$가 되도록 점 P를 잡고, 점 B를 지나고 직선 AB와 수직인 직선과 직선 AP가 만나는 점을 점 Q라 하자. $\angle \mathrm{AQB}$의 이등분선이 선분 BP, 선분 AB와 만나는 점을 각각 점 R, 점 S라 하자.
선분 PQ와 BQ 및 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 BRS의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,
$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta\times\{f(\theta)+3\theta\}}{g(\theta)}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여
$$\ln\left\{\frac{f(x)f'(x)}{x}\right\}=-\{f(x)\}^2$$
이다.
(나) 모든 양수 t에 대하여
$$\int_1^t f(x)f'(x)dx=g(t)$$
이다.

$g(3)=\ln\sqrt{5}$일 때, $\int_3^7 2xg(x)dx=a\ln 5-b$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

* 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오
- 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 1회

수학 영역(기하)

PPL 수학연구소

5지선다형

23. 좌표공간의 두 점 A$(-1,\ 3,\ a)$, B$(b,\ 6,\ 4)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 y축 위에 있을 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

24. 초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위의 제1사분면에 있는 점 A에서의 접선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{3}$일 때, $\overline{\mathrm{AF}}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

25. 좌표평면 위의 점 A(5, 0)에 대하여 점 P가

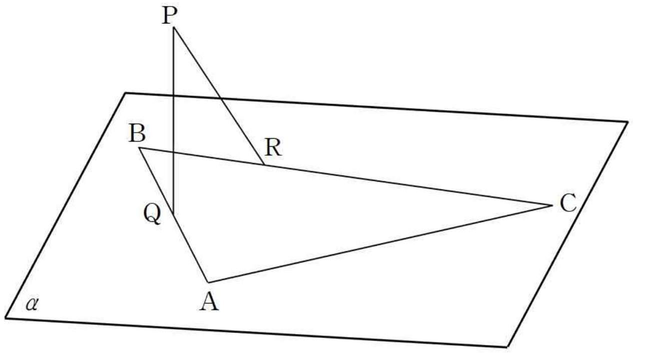
$$2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$$

를 만족시킬 때, 삼각형 OAP의 넓이의 최댓값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

26. 평면 α 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{7}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 Q, 직선 BC에 내린 수선의 발을 R이라 하자. 점 Q는 선분 AB의 중점이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=3$, $\overline{\mathrm{PR}}=2\sqrt{3}$ 이다. 평면 α와 평면 PAC가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

(단, $\angle\mathrm{ABC}<\frac{\pi}{2}$) [3점]



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{30}}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{5}$

27. 두 점 F(4, 0), F′(−4, 0)을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. y축 위의 점 A(0, 4)에 대하여 선분 AF가 쌍곡선과 만나는 점을 B, 직선 OB가 쌍곡선과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 BCF의 넓이가 4일 때, a^2b^2의 값은? (단, O는 원점이고 a와 b는 양수이다.) [3점]

① 48 ② 52 ③ 56 ④ 60 ⑤ 64

28. 좌표공간에 중심이 O(0, 0, 0)이고 반지름의 길이가 3인 구 S_1과 중심이 A(0, 0, a)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$인 구 S_2가 있다. 구 S_1 위의 점 B(1, −2, 2)에 대하여 구 S_2가 다음 조건을 만족시킨다.

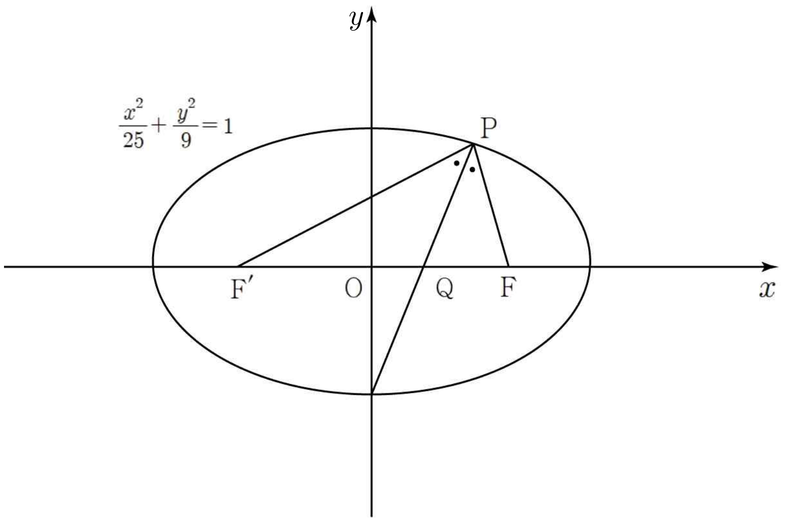
> 구 S_1과 직선 PB가 한 점에서 만나고 삼각형 OBP의 넓이가 $3\sqrt{5}$인 구 S_2 위의 점 P가 존재한다.

구 S_1 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{QB}}=6$일 때, 구 S_1과 점 Q에서 접하는 평면을 α라 하자. 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

① $\frac{32\sqrt{5}}{9}$ ② $\frac{11\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{34\sqrt{5}}{9}$ ④ $\frac{35\sqrt{5}}{9}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

단답형

29. 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$과 제1사분면에 있는 타원 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{FPF}'$을 이등분하는 직선이 타원과 y축이 만나는 점 중 y좌표가 음수인 점을 지난다. 직선과 x축이 만나는 점을 Q라 할 때, 점 Q의 x좌표는 k이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]



30. 좌표평면에서 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{3}$이고 $\angle \mathrm{BAC}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에 대하여 삼각형 ABC의 내부의 점 P와 직선 AC 위의 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|\times(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\times(\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}})$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$가 최대일 때, $12|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|^2$의 값을 구하시오. [4점]

＊확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오

[정답 및 해설]

빠른 정답

공통					
문항	답	문항	답	문항	답
1번	④	2번	③	3번	④
4번	⑤	5번	②	6번	④
7번	⑤	8번	①	9번	③
10번	②	11번	②	12번	①
13번	③	14번	⑤	15번	③
16번	3	17번	17	18번	6
19번	7	20번	49	21번	12
22번	8				
확률과 통계					
23번	③	24번	④	25번	③
26번	④	27번	①	28번	⑤
29번	18	30번	497		
미적분					
23번	⑤	24번	③	25번	②
26번	④	27번	①	28번	③
29번	5	30번	65		
기하					
23번	①	24번	④	25번	③
26번	②	27번	⑤	28번	①
29번	7	30번	112		

About PPL 수학연구소

중, 고등학교 내신 및 수능 수학을 연구하고 토론하는 수학 선생님들의 집단입니다.
변화하는 수능의 경향을 고려한
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작과 평가원, 교육청 모의고사, 수능 해설강의 등을 하고 있으며 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고 있습니다.

모든 문의는
인스타 DM : ppl_math_lab
팀장 메일 : dhtjddnjs0327@naver.com

제작 및 검토

오성원 (팀장)	홍익대학교 수학교육과
김대현	건국대학교 수학과
박상우	건국대학교 교육공학과
원민식	고려대학교 기계공학부
이경민	서울대학교 수학교육과

PPL 수학연구소

해설

1. ④

$2^{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \times 2^{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = 2^{\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$

2. ③

$\lim_{x \to -1+} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ 이므로

$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 1} f(x) = 2 + 0 = 2$

3. ④

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로,

$a_1 + a_7 = 2a_4$, $a_4 + a_{12} = 2a_8$ 이다.

$2a_4 = 4$, $a_4 = 2$,

$2a_8 = 12$, $a_8 = 6$

$\therefore\ a_6 = \dfrac{a_4 + a_8}{2} = \dfrac{2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

4. ⑤

주어진 극한에서

(분모)$\to 0$ 이면, (분자)$\to 0$ 이므로 $f(2) = 3$

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분 가능하므로

$f'(2) = 1$

한편, $h'(x) = xf'(x) + f(x)$ 이므로

$h'(2) = 2f'(2) + f(2) = 2 + 3 = 5$

5. ②

$\theta + \dfrac{\pi}{6} = \alpha\ \left(\dfrac{5}{12}\pi < \alpha < \dfrac{11}{12}\pi\right)$ 라고 하고 주어진 식을 계산하면,

$$\begin{aligned} 3\sin\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{15}{6}\pi\right) &= 3\sin\alpha + \cos\left(\alpha + 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 3\sin\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 3\sin\alpha - \sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$\therefore\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = \dfrac{2}{3}\pi$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ \cos\left(\theta + \dfrac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

6. ④

x의 값이 0에서 2까지 변할 때, $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(2) - f(0)}{2} = \dfrac{(10 + 4a + 2b) - 2}{2} = 4 + 2a + b = 1$

이다. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이므로

$f'(2) = 12 + 4a + b = 1$

연립방정식 $\begin{cases} 4 + 2a + b = 1 \\ 12 + 4a + b = 1 \end{cases}$ 을 풀면

$a = -4$, $b = 5$

이므로 $a + b = 1$ 이다.

7. ⑤

$a_1 = a$, 공비를 r이라고 할 때,

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a + ar + ar^2$

$S_9 - S_6 = a_7 + a_8 + a_9 = ar^6 + ar^7 + ar^8 = r^6(a + ar + ar^2)$

$\dfrac{S_9 - S_6}{S_3} = \dfrac{r^6(a + ar + ar^2)}{a + ar + ar^2} = r^6 = 64$

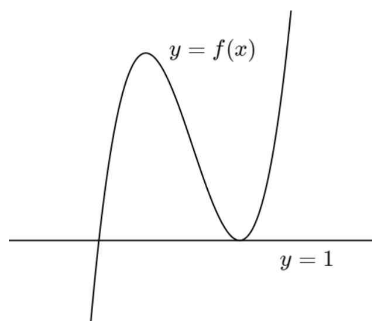
$\therefore\ r = 2$

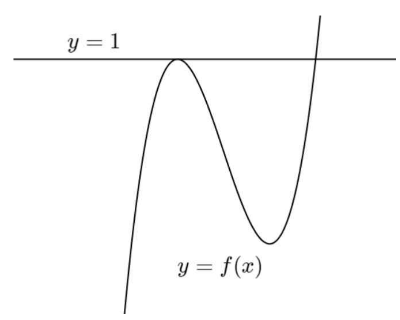
$S_3 = a + ar + ar^2 = 7a = 3$

$\therefore\ a = a_1 = \dfrac{3}{7}$

8. ①

$f'(3) = 0$, $f(3) = 1$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 두 개형으로 그려질 수 있다.





위의 두 경우 중 $\sum_{n=1}^{5} g(n) = 13$ 이 가능한 경우는 왼쪽의 경우이다.

한편, $g(1) = 2$ 이므로

$g(2) + \cdots + g(5) = 11 = 3 \times 4 - 1$ 에서

주어진 조건을 만족시키려면

$g(2) = g(3) = g(4) = 3$, $g(5) = 2$ 인 경우가 유일하다.

따라서 $f(x)$의 그래프는 직선 $y = 5$ 에 접한다.

$f(x) = (x-3)^2(x-a)$ 라 하면,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-3)(x-a) + (x-3)^2 \\ &= (x-3)(3x - 2a - 3) \end{aligned}$$

에서 $f(x)$는 $x = \dfrac{2a+3}{3}$ 에서 극댓값을 갖는다.

$f\left(\dfrac{2a+3}{3}\right) = 4 \times \left(\dfrac{-a+3}{3}\right)^3 = 4$

$\dfrac{-a+3}{3} = 1$

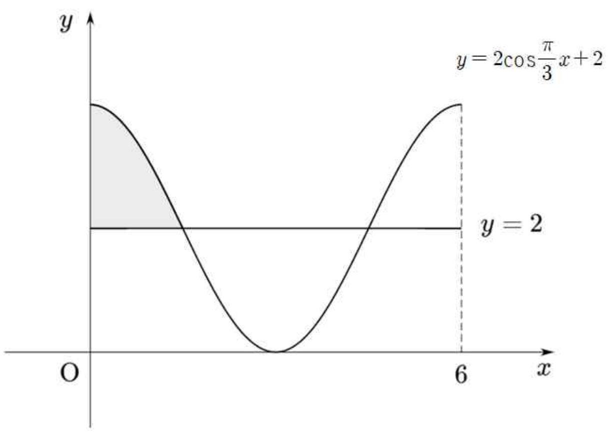
$\therefore\ a = 0$

따라서 $f(x) = x(x-3)^2 + 1$ 이므로

$f(5) = 5 \times 2^2 + 1 = 21$

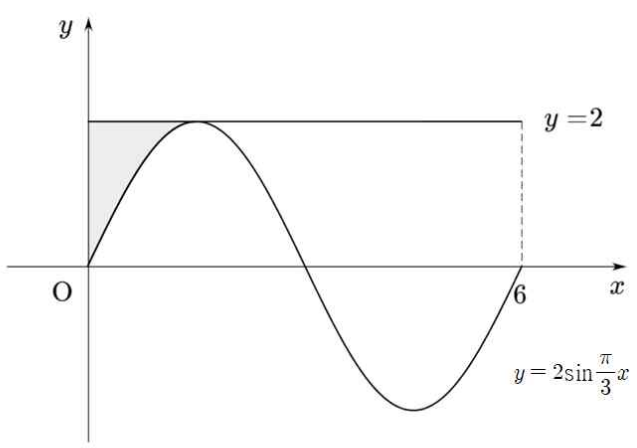
9. ③

함수 $y = 2\cos\dfrac{x}{3} + 2$를 주어진 범위에서 그려보면



이때 S_1은 색칠한 부분이다.

함수 $y=2\sin\frac{x}{3}$을 주어진 범위에서 그려보면



이때 S_2는 색칠한 부분이다.

$\cos\frac{x}{3}=\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$임을 고려하면

$0\le x\le\frac{3}{2}\pi$에서 함수 $y=2\cos\frac{x}{3}+2$와 두 직선 $y=2$와

y축으로 둘러싸인 넓이는 $\frac{3}{2}\pi\le x\le 3\pi$에서 함수 $y=2\sin\frac{x}{3}$

그래프의 넓이와 같다.

또한, 함수 $y=2\sin\frac{x}{3}$는 $x=\frac{3}{2}\pi$를 기준으로 대칭이므로

$\frac{3}{2}\pi\le x\le 3\pi$에서 함수 $y=2\sin\frac{x}{3}$ 그래프의 넓이는

$0\le x\le\frac{3}{2}\pi$에서 함수 $y=2\sin\frac{x}{3}$ 그래프의 넓이와 같다.

$\therefore\ S_1+S_2=\frac{3}{2}\pi\times 2=3\pi$

10. ②

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 역함수가 존재하므로

조건 (가)에 의해 증가함수이다.

따라서 $\int_1^4|f(x)-g(x)|dx=2\int_1^4|f(x)-x|dx=2\left(9-\frac{15}{2}\right)=3$

이다.

$\int_4^7|f(x)-g(x)|dx=2\int_4^7|f(x)-x|dx$이고

조건 (나)에 의해

$\int_4^7 f(x)dx=\int_4^7\{f(x-3)+3\}dx=\int_1^4 f(x)dx+9$

이다

$\int_4^7|f(x)-g(x)|dx=2\int_4^7|f(x)-x|dx=2\left(9+9-\frac{33}{2}\right)=3$

같은 방법으로 $\int_7^{10}|f(x)-g(x)|dx=\int_{10}^{13}|f(x)-g(x)|dx=3$이므로

$\therefore\ \int_1^{13}|f(x)-g(x)|dx=3\times 4=12$

11. ②

$\sin(\angle\mathrm{BAC})=\frac{\sqrt{7}}{4}$이므로

$\cos(\angle\mathrm{BAC})=\sqrt{1-\frac{7}{16}}=\frac{3}{4}$

현과 접선이 이루는 각의 성질에 의해서, $\angle\mathrm{CBD}=\angle\mathrm{BAC}$

삼각형 BCD에서 $\overline{\mathrm{BC}}=\alpha$, $\overline{\mathrm{BD}}=\beta$라고 하자.

삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 $\angle\mathrm{D}$는 공통,

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CBD}$이므로

삼각형 ABD와 삼각형 BCD는 닮음이다.

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$

$6:\alpha=\beta:4$, $\alpha\beta=24$

삼각형 BCD에서 코사인 법칙에 의해

$4^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos(\angle\mathrm{BAC})$

$16=\alpha^2+\beta^2-36$

$\alpha^2+\beta^2=52$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=52$

$(\alpha+\beta)^2=52+48=100$

$\therefore\ \alpha+\beta=10\ (\because\ \alpha>0,\ \beta>0)$

$\alpha+\beta=10$과 $\alpha\beta=24$를 이용하여

두 근이 α, β인 x에 대한 이차방정식을 세우면

$x^2-10x+24=0$

$(x-4)(x-6)=0$

$\therefore\ x=4$ 또는 $x=6$

이때 $\overline{\mathrm{BC}}<\overline{\mathrm{BD}}$이므로 $\alpha<\beta$

$\therefore\ \alpha=4,\ \beta=6$

삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의해서

$4^2=6^2+(\overline{\mathrm{AC}})^2-12\overline{\mathrm{AC}}\cos(\angle\mathrm{BAC})$

$16=36+(\overline{\mathrm{AC}})^2-9\overline{\mathrm{AC}}$

$(\overline{\mathrm{AC}})^2-9\overline{\mathrm{AC}}+20=0$

$(\overline{\mathrm{AC}}-4)(\overline{\mathrm{AC}}-5)=0$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=4$ 또는 $\overline{\mathrm{AC}}=5$

만약 $\overline{\mathrm{AC}}=4$이면, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}\ne\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BD}}$가 되므로 닮음이 성립하지 않는다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=5$

삼각형 ABC의 넓이$=\frac{1}{2}\times 6\times 5\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

12. ①

주어진 직선이 곡선 $y=x^2$와 만나면 두 점 A, B가 모두 직선 $y=k(x-1)$과 곡선 $y=x^2$의 교점일 때, 두 점 사이의 거리가

0이 되므로 $f(k)=0$

한편, 주어진 극한값이 존재하려면

$f(\alpha)=f(\beta)=0$

인데, 이를 만족하면서 좌극한 또는 우극한이 0이 아니라면 α, β는 각각 곡선 $y=x^2$에 직선 $y=k(x-1)$이 접할 때의 k의 값이다.

곡선 $y=x^2$ 위의 점 (t, t^2)에서의 접선의 방정식은

$y=2t(x-t)+t^2$이고, 이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

좌표를 대입하면 $2t-t^2=0$

곧, $t=0$ 또는 2인데, 각 경우에 접선의 기울기,

즉, k의 값은 0, 4이다.

따라서 주어진 극한값이 존재하려면

$\alpha=0$, $\beta=4$

점 A와 B 사이의 거리가 최소일 때, 점 A에서의 접선의 기울기는 k이다.

곧, $\mathrm{A}\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{4}\right)$이다.

이 점과 직선 $y=k(x-1)$ 사이의 거리가 곧 $f(k)$이다.

따라서 $0<k<4$일 때,

$$f(k)=\frac{\left|k\times\frac{k}{2}-\frac{k^2}{4}-k\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{k(4-k)}{4\sqrt{k^2+1}}$$

$$\lim_{k\to 0+}\frac{f(k)}{k}=\lim_{k\to 0+}\frac{4-k}{4\sqrt{k^2+1}}=1$$

$$\lim_{k\to 4-}\frac{f(k)}{k-4}=\lim_{t\to 4-}\frac{-k}{4\sqrt{k^2+1}}=-\frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$p=-\frac{\sqrt{17}}{17}$$

따라서

$$\frac{2\alpha+\beta}{p^2}=17\times 4=68$$

13. ③

주어진 이차함수 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2-10x-k^2+10k\\&=(x-k)(x+k)-10(x-k)\\&=(x-k)(x+k-10)\end{aligned}$$

이므로 $g(n)$는 다음과 같다.

$f(x)>0$이고 n은 짝수일 때, $g(n)=2$,

$f(x)=0$이고 n은 짝수일 때 또는 $f(x)$ 범위에 상관없이 n이 홀수일 때, $g(n)=1$,

$f(x)<0$이고 n은 짝수일 때, $g(n)=0$

즉, $|g(n+2)-g(n)|$의 값으로 가질 수 있는 것은 0 또는 1 또는 2임을 알 수 있다.

정수 k에 대하여 분류하면 다음과 같다.

(i) $k=0$일 때

$f(x)=x(x-10)$

$|g(n+2)-g(n)|=1$을 만족하는 n은 8, 10이고

$|g(n+2)-g(n)|=2$를 만족하는 n은 존재하지 않으므로

주어진 조건을 만족하는 n은 총 2개이다. (모순)

(ii) $k=1$일 때

$f(x)=(x-1)(x-9)$

$|g(n+2)-g(n)|=1$을 만족하는 n은 존재하지 않고

$|g(n+2)-g(n)|=2$를 만족하는 n은 8이므로

주어진 조건을 만족하는 n은 총 1개이다. (모순)

(iii) $k=2$일 때

$f(x)=(x-2)(x-8)$

$|g(n+2)-g(n)|=1$을 만족하는 n은 2, 6, 8이고

$|g(n+2)-g(n)|=2$를 만족하는 n은 존재하지 않으므로

주어진 조건을 만족하는 n은 총 3개다.

(iv) $k=3$일 때

$f(x)=(x-3)(x-7)$

$|g(n+2)-g(n)|=1$을 만족하는 n은 존재하지 않고

$|g(n+2)-g(n)|=2$를 만족하는 n은 2, 6이므로

주어진 조건을 만족하는 n은 총 2개이다. (모순)

(v) $k=4$일 때

$f(x)=(x-4)(x-6)$

$|g(n+2)-g(n)|=1$을 만족하는 n은 2, 6이고

$|g(n+2)-g(n)|=2$를 만족하는 n은 존재하지 않으므로

주어진 조건을 만족하는 n은 총 2개이다. (모순)

$\therefore f(x)=(x-2)(x-8)$

$f(5)=3\times(-3)=-9$

14. ⑤

ㄱ. $\displaystyle\int_0^{x+2}f(t)dt-\int_0^x f(t)dt\geq 4x+4$이므로

$\displaystyle\int_x^{x+2}f(t)dt\geq 4x+4$도 성립한다. (참)

ㄴ. $\displaystyle\int_x^{x+2}f(t)dt\geq 4x+4$에서 양변에 $\displaystyle\int_x^{x+2}2tdt$를 빼면

$$\int_x^{x+2}\{f(t)-2t\}dt\geq 4x+4-\{(x+2)^2-x^2\}=0$$

곧, 모든 실수 x에 대하여

$$\int_x^{x+2}\{f(t)-2t\}dt\geq 0$$

인데,

$$\int_1^5\{f(t)-2t\}dt=\int_1^3\{f(t)-2t\}dt+\int_3^5\{f(t)-2t\}dt$$

이므로,

$$\int_1^3\{f(t)-2t\}dt=0,\ \int_3^5\{f(t)-2t\}dt=0$$

이다. 함수 $\displaystyle\int_x^{x+2}\{f(t)-2t\}dt$가 사차함수이므로,

$$\int_x^{x+2}\{f(t)-2t\}dt=a(x-1)^2(x-3)^2\ \cdots\ ㉠$$

곧, 주어진 방정식은 $x=1$, 3의 두 실근을 갖는다. (단, $a>0$) (참)

ㄷ. ㉠의 양변을 미분하면

$f(x+2)-f(x)-4=4a(x-1)(x-2)(x-3)$

이다. 여기에 $x=0$을 대입하면

$f(2)-f(0)=-6$이므로 $a=\frac{5}{12}$

따라서 $x=5$를 다시 대입하면

$f(7)-f(5)-4=96a=40$

곧, $f(7)=f(5)+44$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15. ③

자연수 p에 대하여 $a_p<p$일 때, $a_{p+1}=2a_p-3p<-p$이다.

$n>p$인 자연수 n에 대하여 $a_n<0$이므로 $a_n<n$을 만족시킨다.

따라서 $2a_4=a_3+a_6$에 대하여 다음과 같은 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a_3<3$인 경우

$a_4=2a_3-9$, $a_5=2a_4-12=4a_3-30$

$a_6=2a_5-15=8a_3-75$

$2a_4=a_3+a_6$

$4a_3-18=9a_3-75$

$5a_3=57$, $\therefore\ a_3=\frac{57}{5}$

$a_3<3$이어야 하므로 위와 같은 경우는 존재하지 않는다.

(ii) $a_3\geq 3$, $a_4<4$인 경우

$a_4=a_3-3k$, $a_5=2a_4-12=2a_3-6k-12$

$a_6=2a_5-15=4a_3-12k-39$

$2a_4=a_3+a_6$

$2a_3-6k=5a_3-12k-39$

$3a_3=6k+39$, $a_3=2k+13$

$a_4=-k+13<4$를 만족시켜야 하므로 $9<k$이다.

(iii) $a_3\geq 3$, $a_4\geq 4$, $a_5<5$인 경우

$a_4=a_3-3k$, $a_5=a_4-4k=a_3-7k$

$a_6=2a_5-15=2a_3-14k-15$

$2a_4=a_3+a_6$

$2a_3-6k=3a_3-14k-15$

$a_3=8k+15$

$a_5=k+15>15$

$a_5<5$이어야 하므로 위와 같은 경우는 존재하지 않는다.

(iv) $a_3\geq 3$, $a_4\geq 4$, $a_5\geq 5$인 경우

$a_4=a_3-3k$, $a_5=a_4-4k=a_3-7k$, $a_6=a_5-5k=a_3-12k$

$2a_4=a_3+a_6$

$2a_3-6k=2a_3-12k$, $\therefore\ k=0$

k는 자연수이므로 위와 같은 경우는 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족하는 경우는 $a_3\geq 3$, $a_4<4$일 때,

$a_3=2k+13$ $(k>9)$인 경우이다.

따라서 $a_1=5k+13$, $a_5=14-2k$이므로

$a_1-a_5=7k-1$

$70<a_1-a_5<80$이므로

$70<7k-1<80$

$\frac{71}{7}<k<\frac{81}{7}$, $\therefore\ k=11$

$\therefore\ k+\sum_{n=1}^{5}a_n$

$=11+68+57+35+2-8$

$=165$

16. 3

$\log_3(x-a)=\log_9(x-a)^2$이므로

방정식 $\log_9(x-a)^2=\log_9(x-a)$에서

$(x-a)^2=(x-a)$

$(x-a)(x-a-1)=0$

$\therefore\ x=a$ 또는 $x=a+1$

이때 진수 조건에 의해서, $x>a$

$\therefore\ x=a+1$

$a+1=4$, $a=3$

17. 17

주어진 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2}\frac{-2x+a}{x^2-2x}=b$

이어야 한다. 이때, (분모)→0이면, (분자)→0이므로

$-4+a=0$

$\therefore\ a=4$

$b=\lim_{x\to 2}\frac{-2x+4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{-2}{x}=-1$

이므로 $a^2+b^2=4^2+(-1)^2=17$

18. 6

$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3-2k+3}{k+2}a_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+5}{k+2}a_k$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+8}{k+2}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+4)a_k$

$\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+4)a_k=S_n$ 이라고 하자

$S_n-S_{n-1}=n^2-3n+4-\{(n-1)^2-3(n-1)+4\}$

$=2n-4$

$\therefore\ (n^2-2n+4)a_n=2n-4$

$\therefore 19a_5=6$

19. 7

주어진 조건은 열린구간 $(a,\ a+2)$에서 함수 $f(x)$가 감소함수임을 의미한다.

이를 만족하는 a의 값이 2뿐이려면

$f'(2)=0$, $f'(4)=0$

이어야 한다. 한편, $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f'(x)=3(x-2)(x-4)=3x^2-18x+24$

라 할 수 있고,

$f(x)=x^3-9x^2+24x+k$

로 둘 수 있다. 한편, 함수 $f(x)$의 극솟값이 3인데,

$f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 가지므로 이를 대입하면

$f(4)=64-144+96+k=16+k$

곧, $k=-13$이다. 따라서

$f(5)=125-225+120-13=7$

20. 49

속도 $v(t)=t^3-4t^2+3t=t(t-1)(t-3)$이므로

점 P는 $t=1$에서 처음으로 운동방향을 바꾸고, $t=3$에서 두 번째로 운동방향을 바꾼다.

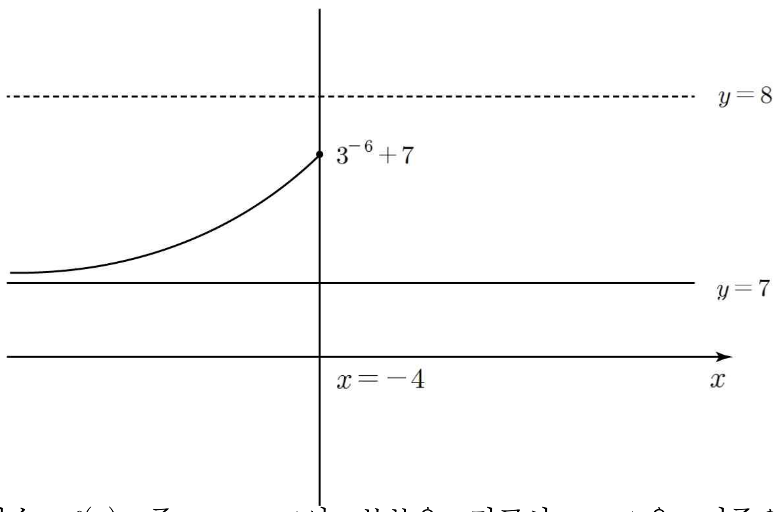
움직인 거리를 l이라 할 때,

$$l=\int_0^3|v(t)|dt=\left|\int_0^1 v(t)dt\right|+\left|\int_1^3 v(t)dt\right|=\frac{5}{12}+\left|-\frac{8}{3}\right|=\frac{37}{12}$$

$\therefore\ p+q=49$

21. 12

함수 $f(x)$ 중 $x\le -4$인 부분을 그려보면 아래처럼 된다.



함수 $f(x)$ 중 $x\le -4$인 부분은 점근선 $y=7$을 기준으로 그것보다 위에, $y=8$ 기준으로 아래에 위치한다.

만약, 함수 $f(x)$ 중 $x>-4$인 부분에서 점근선이 $y=8$ 위쪽에 위치한다면, 집합 $\{f(x)\}$는 원소로 정수인 8을 가지게 된다.

따라서, $-b\le 8$, $b\ge -8$

$\therefore\ m=-8$

함수 $f(x)$ 중 $x>-4$인 부분은 증가하는 함수이다.

만약, 함수 $f(x)$ 중 $x>-4$인 부분에 $x=-4$를 대입하였을 때 그 값이 7보다 작으면, 집합 $\{f(x)\}$는 원소로 정수인 7을 가지게 된다.

함수 $f(x)$ 중 $x>-4$인 부분에 $x=-4$를 대입하였을 때 그 값이 7인 경우, 함수 $f(x)$ 중 $x>-4$인 부분은 $x=-4$인 부분을 포함하지 않기 때문에, 집합 $\{f(x)\}$는 정수인 원소를 가지지 않는다.

따라서, $-2^{4+a}+8\ge 7$, $2^{4+a}\le 1$

$\therefore\ a\le -4$

$\therefore\ M=-4$

$|M+m|=12$

22. 8

$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|=|ax+b|$

은 함수 $f(x)$가 이차함수의 일부임을 나타낸다.

한편, $\frac{f(2)+f(k)}{2}=3$인데,

함수 $|f(x)-3|$가 $x=0$, $x=1$에서만 미분가능하지 않으므로

$f(t)=3$일 때, $f'(t)=0$인 $x=t$가 닫힌 구간 $[2, k]$에 존재한다.

이때, 함수 $f(x)$가 이차함수 $p(x-t)^2+3$의 일부임을 알 수 있다.

또, $\frac{d}{dt}\{p(x-t)^2+3\}=2x+a$

이므로 $p=1$이다.

또한, $x<2$에서 그래프가 연속이지만 미분가능하지 않은 점이 존재하지 않는다면

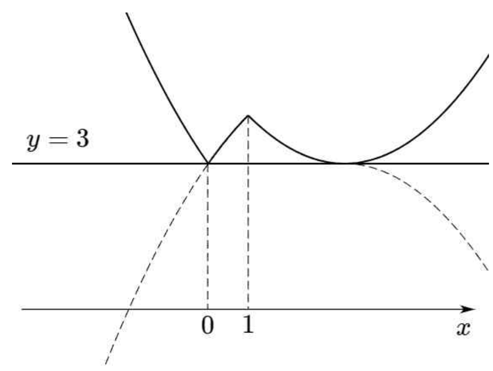
이 범위에서 더 이상 미분가능하지 않은 점이 생기지

않으므로 $f(x)$는 $x<2$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 점이 적어도 하나 존재한다.

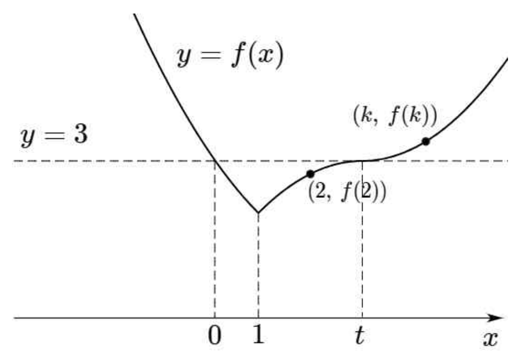
(i) 연속이지만 미분가능하지 않은 점의 개수가 1인 경우

$f(1)<3$이므로 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않아야한다.

즉, $y=|f(x)-3|$의 그래프는 다음과 같은 개형으로 나타난다.



이때, $f'(0)<0$을 만족하려면 $f(x)$는 다음 그림과 같다.



(ii) 연속이지만 미분가능하지 않은 점의 개수가 2인 경우

각각 $x=0$, $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않게 된다.

이 경우 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하지 않으므로

$f'(0)$이 존재하지 않는다.

따라서 $g(x)=(x-t)^2+3$이라 하면

$g(t)-g(1)=g(1)-g(0)$

$-(1-t)^2=(1-t)^2-t^2$

$t^2-4t+2=0$

$\therefore\ t=2+\sqrt{2}\ \ (\because\ t>2)$

$x>t$에서 $f(t)=g(t)$이므로

$\therefore\ k=2+2\sqrt{2}$, $(k-2)^2=8$

<확률과 통계>

23. ③

$(2x+1)^4$의 전개식에서 일반항은 ${}_4\mathrm{C}_r(2x)^r$이므로

이차항의 계수는 ${}_4\mathrm{C}_2\times(2x)^2=24$

24. ④

네 자리 자연수를 만들 숫자를 선택하는 경우는 다음과 같다.

(i) 같은 숫자가 2개 있는 경우

네 자리 자연수를 구성하는 숫자는 (1, 1, 2, 3)과 (3, 3, 2, 1), (1, 1, 3, 3)이다.

(1, 1, 2, 3)과 (3, 3, 2, 1)을 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}$이고,

(1, 1, 3, 3)을 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}$이다.

(ii) 같은 숫자가 3개 있는 경우

네 자리 자연수를 구성하는 숫자는 (3, 3, 3, 1)과 (3, 3, 3, 2)이다.

각 경우에 대하여 숫자를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}\times2+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{3!}\times2=38$이다.

25. ③

자연계열 선택한 사건을 A, 남자인 사건을 B라 할 때,

인문계열을 선택한 사건은 A^C, 여자인 사건은 B^C이다.

사건 A와 사건 B가 서로 독립이므로 사건 A^C와 사건 B^C도 독립이다.

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$이고

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{b}{400}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{c}{400}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{4b}{400}$이므로

$\frac{b}{400}=\frac{c}{400}\times\frac{4b}{400}$

$\therefore\ c=100$

$10b+c=400$

$\therefore\ b=30$

$a+b=4b$, $a=3b$

$\therefore\ a=90$

$d+4b=400$

$\therefore\ d=280$

$a+2b-c+d=90+60-100+280=330$

26. ④

A, B, C 중 적어도 2명의 학생이 이웃하는 사건을 X라 하면

사건 X^C는 A, B, C가 모두 이웃하지 않는 사건이다.

전체 경우의 수는 7!

사건 X^C는 $4!\times{}_5\mathrm{C}_3\times3!$이므로

구하는 확률은 $1-\frac{4!\times{}_5\mathrm{C}_3\times3!}{7!}=\frac{5}{7}$

27. ①

과수원에서 추출한 수학 25개의 표본평균을 $\overline{X_1}$에 대하여

$\overline{X_1}\sim\mathrm{N}(m,\ 4^2)$이다.

신뢰도 $\alpha\%$에 대하여 $\mathrm{P}(|Z|<k)=\frac{\alpha}{100}$라 하자.

표본평균 $\overline{x_1}$에 대한 신뢰도 $\alpha\%$의 신뢰구간의 길이는

$2k\times4=11.4$이다.

$\therefore\ 2k=2.85$

한편, 과수원에서 추출한 수박 16개의 표본평균을 $\overline{X_2}$에 대하여

$\overline{X_2}\sim\mathrm{N}(m,\ 5^2)$이다.

표본평균 $\overline{x_2}$에 대한 신뢰도 $\alpha\%$의 신뢰구간의 길이를 l이라 할 때, $l=2k\times5=2.85\times5=14.25$

28. ⑤

첫 번째 시행에 주머니 A와 주머니 B에서 빨간 공이 하나씩 나온 경우, 주머니 A에는 빨간 공 2개, 노란 공 2개가 남아 있고, 주머니 B에는 빨간 공 1개, 검은 공 1개가 남아 있다.

세 번째 시행 이후 주머니 A에 빨간 공이 남아 있지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 번째 시행에서 주머니 A에서 빨간 공을 2개 뽑는 경우

$\frac{1}{3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}$

(ii) 두 번째 시행에서 주머니 A에서 노란 공을 2개 뽑는 경우

세 번째 시행에서 주머니 A에서 빨간 공을 2개 뽑아야 하므로 $\frac{1}{3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\frac{1}{3}$

(iii) 두 번째 시행에서 주머니 A에서 빨간 공, 노란 공을 1개씩 뽑는 경우

두 번째 시행 이후, 공의 개수에 변화가 없고

세 번째 시행에서 주머니 A에서 빨간 공을 2개 뽑아야 하므로 $\frac{1}{3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\frac{1}{3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}$

(iv) 두 번째 시행에서 주머니 A와 주머니 B에서 서로 다른 색의 공을 뽑는 경우

두 번째 시행 이후, 공의 개수에 변화가 없고,

세 번째 시행에서 주머니 A에서 빨간 공을 2개 뽑아야 하므로 $\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}$

따라서 각 경우의 확률을 더하면 구하는 확률은 $\frac{37}{324}$이다.

29. 18

연속확률변수 X에 대하여

$\mathrm{P}(0\le X\le5)=\frac{5}{12}$이고,

확률변수 X가 갖는 범위에서 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(5\le X\le7)=3\times\frac{1}{2}\times b=\frac{7}{12}$

$\therefore\ b=\dfrac{7}{18}$

$\mathrm{P}(6 \le X \le 7)=\dfrac{7}{18}$이므로

$a \le 6$이다.

$\mathrm{P}(3 \le X \le 7)=\dfrac{3}{4}$이므로

$a \le 3$이다.

한편, $0 \le X \le 3$에서 $f(x)=\dfrac{1}{18}x$이므로

$\mathrm{P}(2 \le X \le 7)=\dfrac{8}{9}$이고,

$\dfrac{8}{9}>\dfrac{5}{6}$이므로

$a>2$이다.

따라서 $2<a \le 6$이므로 모든 자연수 a의 합은 18

30. 497

네 상자에 들어 있는 사탕의 개수를 각각 a, b, c, d라 하자

(ⅰ) 상자 A에 초콜릿이 4개 들어 있는 경우

남은 상자 B, C, D에 들어갈 초콜릿은 존재하지 않는다.
상자 A에 들어 있는 사탕의 개수가 초콜릿의 개수보다 많아야 하므로
$a+b+c+d=6(a \ge 5,\ b \ge 0,\ c \ge 0,\ d \ge 0)$이다.
$a=a'+5$이라 할 때, $a'+b+c+d=1$이다.
경우의 수를 구하면 ${}_4\mathrm{H}_1=4$

(ⅱ) 상자 A에 초콜릿이 3개 들어 있는 경우

남은 상자 B, C, D에 들어갈 수 있는 초콜릿의 개수는 (1, 0, 0)이다.
일반성을 잃지 않고 상자 B에 들어 있는 초콜릿의 개수가 1이라 하자.
상자 A에 들어 있는 사탕의 개수가 초콜릿의 개수보다 많아야 하고, 초콜릿만 들어 있는 상자가 없어야 하므로
$a+b+c+d=6(a \ge 4,\ b \ge 1,\ c \ge 0,\ d \ge 0)$이다.
$a=a'+4,\ b=b'+1$이라 할 때, $a'+b'+c+d=1$이다.
경우의 수를 구하면 ${}_4\mathrm{H}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1=12$

(ⅲ) 상자 A에 초콜릿이 2개 들어 있는 경우

남은 상자 B, C, D에 들어갈 수 있는 초콜릿의 개수는 (2, 0, 0) 또는 (1, 1, 0)이다.

① (2, 0, 0)인 경우
일반성을 잃지 않고 상자 B에 들어 있는 초콜릿의 개수가 2라 하자.
상자 A에 들어 있는 사탕의 개수가 초콜릿의 개수보다 많아야 하고, 초콜릿만 들어 있는 상자가 없어야 하므로
$a+b+c+d=6(a \ge 3,\ b \ge 1,\ c \ge 0,\ d \ge 0)$이다.
$a=a'+3,\ b=b'+1$이라 할 때, $a'+b'+c+d=2$이다.
경우의 수를 구하면 ${}_4\mathrm{H}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1=30$

② (1, 1, 0)인 경우
일반성을 잃지 않고 상자 B, C에 들어 있는 초콜릿의 개수가 각각 1이라 하자.
상자 A에 들어 있는 사탕의 개수가 초콜릿의 개수보다 많아야 하고, 초콜릿만 들어 있는 상자가 없어야 하므로
$a+b+c+d=6(a \ge 3,\ b \ge 1,\ c \ge 1,\ d \ge 0)$이다.
$a=a'+3,\ b=b'+1,\ c=c'+1$이라 할 때,
$a'+b'+c+d=1$
경우의 수를 구하면 ${}_4\mathrm{H}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2=12$

(ⅳ) 상자 A에 초콜릿이 1개 들어 있는 경우

남은 상자 B, C, D에 들어갈 수 있는 초콜릿의 개수는 (3, 0, 0), (2, 1, 0) 또는 (1, 1, 1)이다.

① (3, 0, 0)인 경우
일반성을 잃지 않고 상자 B에 들어 있는 초콜릿의 개수가 3이라 하자.
상자 A에 들어 있는 사탕의 개수가 초콜릿의 개수보다 많아야 하고, 초콜릿만 들어 있는 상자가 없어야 하므로
$a+b+c+d=6(a \ge 2,\ b \ge 1,\ c \ge 0,\ d \ge 0)$이다.
$a=a'+2,\ b=b'+1$이라 할 때, $a'+b'+c+d=3$
경우의 수를 구하면 ${}_4\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{C}_1=60$

② (2, 1, 0)인 경우
일반성을 잃지 않고 상자 B, C에 들어 있는 초콜릿의 개수가 각각 2, 1이라 하자.
상자 A에 들어 있는 사탕의 개수가 초콜릿의 개수보다 많아야 하고, 초콜릿만 들어 있는 상자가 없어야 하므로
$a+b+c+d=6(a \ge 2,\ b \ge 1,\ c \ge 1, d \ge 0)$이다.
$a=a'+2,\ b=b'+1,\ c=c'+1$이라 할 때,
$a'+b'+c'+d=2$
경우의 수를 구하면 ${}_4\mathrm{H}_2 \times 3!=60$

③ (1, 1, 1)인 경우
상자 A에 들어 있는 사탕의 개수가 초콜릿의 개수보다 많아야 하고, 초콜릿만 들어 있는 상자가 없어야 하므로
$a+b+c+d=6(a \ge 2,\ b \ge 1,\ c \ge 1, d \ge 1)$이다.
$a=a'+2,\ b=b'+1,\ c=c'+1,\ d=d'+1$이라 할 때,
$a'+b'+c'+d'=1$
경우의 수를 구하면 ${}_4\mathrm{H}_1=4$

(ⅴ) 상자 A에 초콜릿이 들어 있지 않은 경우

남은 상자 B, C, D에 들어갈 수 있는 초콜릿의 개수는 (4, 0, 0), (3, 1, 0), (2, 2, 0), (2, 1, 1)이다.

① (4, 0, 0)인 경우
일반성을 잃지 않고 상자 B에 들어 있는 초콜릿의 개수가 1이라 하자.
상자 A에 들어 있는 사탕의 개수가 초콜릿의 개수보다 많아야 하고, 초콜릿만 들어 있는 상자가 없어야 하므로
$a+b+c+d=6(a \ge 1,\ b \ge 1,\ c \ge 0, d \ge 0)$이다.
$a=a'+1,\ b=b'+1$이라 할 때,
$a'+b'+c+d=4$
경우의 수를 구하면 ${}_4\mathrm{H}_4 \times {}_3\mathrm{C}_1=105$

② (3, 1, 0)인 경우
일반성을 잃지 않고 상자 B, C에 들어 있는 초콜릿의 개수가 각각 2, 1이라 하자.
상자 A에 들어 있는 사탕의 개수가 초콜릿의 개수보다 많아야 하고, 초콜릿만 들어 있는 상자가 없어야 하므로
$a+b+c+d=6(a \ge 1,\ b \ge 1,\ c \ge 1, d \ge 0)$이다.
$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1$이라 할 때,
$a'+b'+c'+d=3$

경우의 수를 구하면 ${}_4\mathrm{H}_3 \times 3! = 120$

③ (2, 2, 0)인 경우

일반성을 잃지 않고 상자 B, C에 들어 있는 초콜릿의 개수가 각각 2라 하자.

상자 A에 들어 있는 사탕의 개수가 초콜릿의 개수보다 많아야 하고, 초콜릿만 들어 있는 상자가 없어야 하므로 $a+b+c+d=6(a \ge 1,\ b \ge 1,\ c \ge 1,\ d \ge 0)$이다.

$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1$이라 할 때,

$a'+b'+c'+d=3$

경우의 수를 구하면 ${}_4\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 60$

④ (2, 1, 1)인 경우

상자 A에 들어 있는 사탕의 개수가 초콜릿의 개수보다 많아야 하고, 초콜릿만 들어 있는 상자가 없어야 하므로 $a+b+c+d=6(a \ge 1,\ b \ge 1,\ c \ge 1,\ d \ge 1)$이다.

$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1,\ d=d'+1$이라 할 때,

$a'+b'+c'+d'=2$

경우의 수를 구하면 ${}_4\mathrm{H}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 30$

(ⅰ) ~ (ⅴ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$4+12+42+124+315=497$

<미적분>

23. ⑤

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin 2x}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \times \frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{2 \times 1}{\frac{1}{2}} = 4$$

24. ③

주어진 식의 양변을 x에 대해 미분하면

$3x^2 + 3y^2 \dfrac{dy}{dx} + 3y + 3x \dfrac{dy}{dx} = 0$ 이므로

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2+y}{x+y^2}$ (단, $x+y^2 \ne 0$)

따라서 $(2,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{4-2}{2+4} = -\dfrac{1}{3}$

25. ②

주어진 넓이는 $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \left| \frac{\ln(e^x+1)}{e^{-x}+1} \right| dx$에서

$\ln(e^x+1) > 0,\ e^{-x}+1 > 0$

이므로 주어진 넓이는 $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{\ln(e^x+1)}{e^{-x}+1} dx$이다.

$\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{\ln(e^x+1)}{e^{-x}+1} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{\ln(e^x+1)}{e^x+1} e^x dx$ 에서

$\ln(e^x+1) = t$로 치환하면 $x=\ln 2$일 때 $t=\ln 3$, $x=\ln 8$일 때 $t=\ln 9$이고

$\dfrac{e^x}{e^x+1} dx = dt$이므로 주어진 식을 정리하면 $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 9} t\,dt$이다.

따라서 주어진 넓이는 $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 9} t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\ln 3}^{\ln 9} = \frac{3}{2}(\ln 3)^2$

26. ④

조건 (가)에 의해

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{r^2}{3}}{1-\frac{r}{3}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{r^2}{3-r} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$\dfrac{r^2}{3-r} = 4$이므로

$r^2+4r-12=(r-2)(r+6)=0$

$\therefore\ r=2\ (\because\ |r|<3)$

이므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = a_1 \times 2^{n-1}$이다.

조건 (나)에 의해

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} =$$

$$\frac{\frac{1}{a_1}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4a_1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2a_1} = 5$$

따라서 $a_1 = \dfrac{1}{2}$

27. ①

$\angle\mathrm{AOB}$는 호 AB에 대한 중심각이므로 $\angle\mathrm{AOB} = 2\angle\mathrm{ACB} = 2\alpha$

삼각형 ABC와 삼각형 ABO에서 각각 변 AB에 대하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\alpha} : \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin 2\alpha} = r_1 : r_2 = 8:5$

$\dfrac{8\overline{\mathrm{AB}}}{\sin 2\alpha} = \dfrac{5\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\alpha},\ \dfrac{8}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{5}{\sin\alpha}$

$\therefore\ \cos\alpha = \dfrac{4}{5},\ \sin\alpha = \dfrac{3}{5}$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) = \cos\dfrac{\pi}{4}\cos\alpha - \sin\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{4}{5} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{3}{5} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$

28. ③

$f(x) = \ln(1-x^2)$에서

$f'(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2} &= \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} \\ &= -1+\frac{2}{1-x^2} = -1+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(t) &= \int_0^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx \\ &= \int_0^t \left(-1+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx \\ &= \left[-x+\ln|1+x|-\ln|1-x|\right]_0^t\end{aligned}$$

$$=-t+\ln|1+x|-\ln|1-x|=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-t\text{이다.}$$

함수 $h(x)$에 대하여 $h'(x)=f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x)$이다.

$g\left(\frac{e-1}{e+1}\right)=k$에서 $g^{-1}(k)=\frac{e-1}{e+1}$이므로

$$h'(k)=f'(g^{-1}(k))(g^{-1})'(k)$$

$$=\frac{f'\left(\frac{e-1}{e+1}\right)}{g'\left(\frac{e-1}{e+1}\right)}$$

$f'(x)=\frac{-2x}{1-x^2}$, $g'(x)=\sqrt{1+\{f(x)\}^2}=\frac{1+x^2}{1-x^2}$에서

$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{-2x}{1+x^2}$이므로

$$h'(k)=\frac{f'\left(\frac{e-1}{e+1}\right)}{g'\left(\frac{e-1}{e+1}\right)}=\frac{-2\frac{e-1}{e+1}}{1+\left(\frac{e-1}{e+1}\right)^2}=-\frac{(e-1)(e+1)}{e^2+1}$$

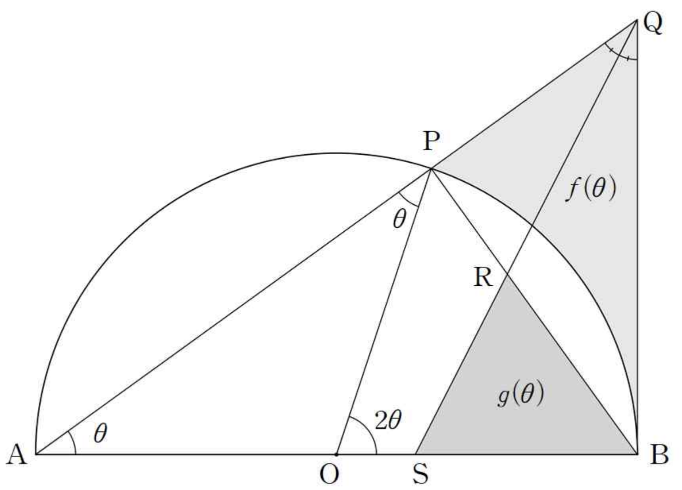
$$g\left(\frac{e-1}{e+1}\right)=\ln\left|\frac{1+\frac{e-1}{e+1}}{1-\frac{e-1}{e+1}}\right|-\frac{e-1}{e+1}$$

$$=\ln\left|\frac{(e+1)+(e-1)}{(e+1)-(e-1)}\right|-\frac{e-1}{e+1}=1-\frac{e-1}{e+1}=\frac{2}{e+1}=k$$

따라서 $|k\times h'(k)|=\left|\left(\frac{2}{e+1}\right)\left(-\frac{(e+1)(e-1)}{e^2+1}\right)\right|=\frac{2(e-1)}{e^2+1}$

29. 5

그림과 같이 반원의 중심을 O라고 할 때,



삼각형 AOP가 이등변삼각형이므로 $\angle\text{BOP}=2\angle\text{PAB}=2\theta$이다.

$f(\theta)$는 삼각형 ABQ의 넓이에서 삼각형 AOP의 넓이와 부채꼴 BOP의 넓이를 뺀 것과 같다.

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{BQ}}-\frac{1}{2}\times\overline{\text{AO}}\times\overline{\text{PO}}\times\sin(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times2\times2\tan\theta-\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta$$

$$=2\tan\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta-\theta$$

$\angle\text{PBQ}=\theta$, $\angle\text{AQS}=\angle\text{BQS}=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$에서

$\angle\text{BSR}=\angle\text{PAB}+\angle\text{AQS}=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$

$\angle\text{BRS}=\angle\text{PBQ}+\angle\text{BQS}=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$

삼각형 BRS는 $\overline{\text{BR}}=\overline{\text{BS}}$인 이등변삼각형이다.

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\text{BR}}\times\overline{\text{BS}}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left\{2\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}^2\times\cos\theta$$

$$=2\tan^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times\{f(\theta)+3\theta\}}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times\left(2\tan\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta+2\theta\right)}{2\tan^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\frac{\tan\theta}{\theta}-\frac{\sin2\theta}{2\theta}+2}{2\frac{\tan^2\theta}{\theta^2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta}$$

$$=\frac{2\times1-1+2}{2\times1^2\times1\times1}=\frac{3}{2}$$

$\therefore\ \frac{q}{p}=\frac{3}{2}$, $p+q=5$

30. 65

조건 (가)에 의해

$$e^{-\{f(x)\}^2}=\frac{f(x)f'(x)}{x}$$

$2f(x)f'(x)e^{\{f(x)\}^2}=2x$에서 양변을 x에 대해 적분하면

$$\int2f(x)f'(x)e^{\{f(x)\}^2}dx=\int2xdx$$

$$e^{\{f(x)\}^2}=x^2+C$$

$$\{f(x)\}^2=\ln(x^2+C)$$

조건 (나)에 의해

$$\int_1^tf(x)f'(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^t2f(x)f'(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\{f(x)\}^2\right]_1^t$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+C)\right]_1^t=\frac{1}{2}\{\ln(t^2+C)-\ln(1+C)\}$$

$$\therefore\ g(t)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+C}{1+C}\right)$$

$g(3)=\ln\sqrt{5}$에서 $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{9+C}{1+C}\right)=\frac{1}{2}\ln5$이므로 $C=1$

$$\therefore\ g(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+1}{2}\right)$$

$\int_3^72xg(x)dx=\int_3^7x\ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right)dx$에서

$\frac{x^2+1}{2}=t$로 치환하면 $x=3$일 때 $t=5$, $x=7$일 때 $t=25$이고

$xdx=dt$이므로 주어진 식을 정리하면 $\int_5^{25}\ln t\,dt$이다.

$$\int_5^{25}\ln t\,dt=[t\ln t-t]_5^{25}$$

$$=(25\ln25-25)-(5\ln5-5)=45\ln5-20$$

따라서 $a+b=45+20=65$

<기하>

23. ①

두 점 $A(-1,\ 3,\ a)$, $B(b,\ 6,\ 4)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 y축 위에 있으므로

$\dfrac{1\times4+2\times a}{1+2}=0$, $\quad\therefore\ a=-2$

$\dfrac{1\times b+2\times(-1)}{1+2}=0$, $\quad\therefore\ b=2$

$\therefore\ a+b=0$

24. ④

포물선 위의 제1사분면의 점 A의 좌표를 $(k^2,\ 2k)(k>0)$라 하면

점 A에서 포물선에 그은 접선의 방정식은

$2ky=2(x+k^2)$, $\quad\therefore\ y=\dfrac{x+k^2}{k}$

점 B의 좌표는 $(0,\ k)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{k^4+k^2}=2\sqrt{3}$

$k^4+k^2=12$

$k^4+k^2-12=0$

$(k^2-3)(k^2+4)=0$, $\quad\therefore\ k^2=3$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=k^2+1$이므로

$\therefore\ \overline{AF}=4$

25. ③

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$2|\overrightarrow{OP}|=3|\overrightarrow{AP}|$에서

$2|(x,\ y)|=3|(x-5,\ y)|$이므로

$2\sqrt{x^2+y^2}=3\sqrt{(x-5)^2+y^2}$

$4(x^2+y^2)=9\{(x-5)^2+y^2\}$

$x^2+y^2-18x+45=0$

$\therefore\ (x-9)^2+y^2=36$

따라서 점 P는 원 $(x-9)^2+y^2=36$ 위에 있다.

$\overline{OA}=5$이므로 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되려면 점 P에서 x축 사이의 거리가 최대이어야 하므로

삼각형 OAP의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}\times5\times6=15$이다.

26. ②

$\overline{PQ}=3$, $\overline{PR}=2\sqrt{3}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{QR}\perp\overline{BC}$이고

$\overline{QR}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{3}$

이므로 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$이다.

점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H_1라 하면 점 Q가 선분 AB의 중점이므로

$\overline{AH_1}=2\sqrt{3}$, $\overline{BH_1}=2$이고

$\overline{AC}=2\sqrt{7}$이므로 직각삼각형 ACH_1에서

$\overline{CH_1}=\sqrt{(2\sqrt{7})^2-(2\sqrt{3})^2}=4$

이고 $\overline{BC}=6$이다. 점 Q에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$2\overline{QH_2}$는 점 B와 직선 AC 사이의 거리이므로 $\overline{QH_2}=a$라 하면

삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times2\overline{QH_2}=2\sqrt{7}a$

또한 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{QH_1}=6\sqrt{3}$이므로

$2\sqrt{7}a=6\sqrt{3}$, $\quad\therefore\ a=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$

직각삼각형 PQH_2에서

$\overline{PH_2}=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{3\sqrt{21}}{7}\right)}=\dfrac{3\sqrt{70}}{7}$이고 $\cos\theta=\dfrac{\overline{QH_2}}{\overline{PH_2}}$이므로

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\frac{3\sqrt{21}}{7}}{\frac{3\sqrt{70}}{7}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

27. ⑤

$\overline{OB}=\overline{OC}$, $\overline{OF'}=\overline{OF}$이므로 사각형 $BFCF'$는 평행사변형이고 삼각형 BCF의 넓이는 삼각형 BFF'의 넓이와 같으므로 삼각형 BFF'의 넓이는 4이다. 삼각형 AFF'에서

$\overline{AF}=\overline{AF'}=4\sqrt{2}$이고 $\angle A=\dfrac{\pi}{2}$이므로 삼각형 AFF'의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=16$

이다. 따라서 삼각형 ABF'의 넓이는 12이고

$\overline{AB}=3\sqrt{2}$, $\overline{BF}=\sqrt{2}$이다.

직각삼각형 ABF'에서

$\overline{BF'}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2}=5\sqrt{2}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$2a=\overline{BF'}-\overline{BF}=5\sqrt{2}-\sqrt{2}=4\sqrt{2}$, $\quad\therefore\ a=2\sqrt{2}$

$b=\sqrt{4^2-a^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ a^2b^2=64$

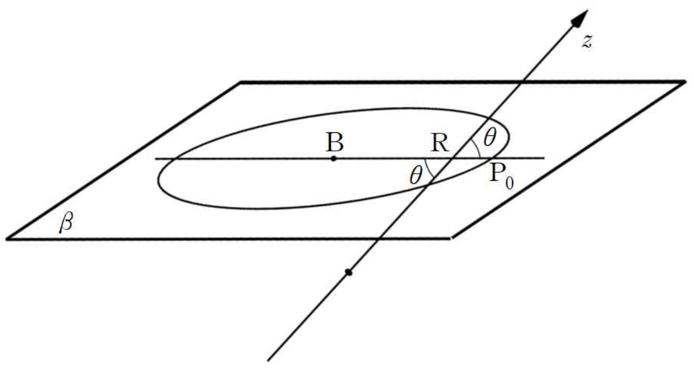
28. ①

구 S_1 위의 점 $B(1,\ -2,\ 2)$에 대하여 직선 PB가 구 S_1과 한 점에서 만나므로 직선 PB는 점 P에서 구에 그은 접선이다. 두 직선 OB와 BP는 서로 수직이고 삼각형 OPB은 $\overline{OB}=3$인 직각삼각형이다.

삼각형 OPB의 넓이가 $3\sqrt{5}$이므로 $\overline{PB}=2\sqrt{5}$이다. 따라서 점 P는 구 S_1과 점 B에서 접하는 평면 위에 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$인 원 위의 점이다.

구 S_1과 점 B에서 접하는 평면을 β, 평면 β와 z축이 만나는 점을 R이라 하면 선분 OB와 xy평면이 이루는 예각의 크기를

θ라 할 때, $\angle ORB = \theta$이다.
$\overline{OB}=3$이고 점 B에서 xy평면 사이의 거리가 2이므로
$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$이고
직각삼각형 ORB에서 $\overline{OB}=3$이므로
$\overline{OR}=\dfrac{9}{2}$, $\overline{RB}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$
이다. 주어진 상황이 나타내는 그림은 다음과 같다.



조건을 만족시키는 구 S_2의 점 P가 존재해야 하므로 구 S_2의 중심에서 원 위의 점 사이의 거리의 최솟값은 $\sqrt{6}$보다 작거나 같아야 한다.
구 S_2의 반지름이 $\sqrt{6}$이므로 점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 반직선 BR 위에 있다.
반직선 BR과 원이 만나는 교점을 P_0라 할 때, 구 S_2의 중심에서 원 위의 점 사이의 거리의 최솟값은 $\overline{AP_0}$이다.
점 A의 좌표는 $(0,\ 0,\ a)$이고 $\overline{OR}=\dfrac{9}{2}$이므로 점 R의 좌표는 $\left(0,\ 0,\ \dfrac{9}{2}\right)$이다.
$\overline{AR}=\left|a-\dfrac{9}{2}\right|$이고 $\angle ARH = \theta$이므로
$\overline{AH}=\dfrac{2}{3}\left|a-\dfrac{9}{2}\right|$, $\overline{HR}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\left|a-\dfrac{9}{2}\right|$이다.
$\overline{P_0R}=\overline{BP_0}-\overline{BR}=2\sqrt{5}-\dfrac{3}{2}\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$이므로
$\overline{AP_0}$의 값은 다음과 같은 경우로 분류할 수 있다.

(i) $a \ge \dfrac{9}{2}$인 경우

$$\overline{HP_0}=\left|\overline{P_0R}-\overline{HR}\right|=\left|\frac{\sqrt{5}}{3}\left(a-\frac{9}{2}\right)-\frac{\sqrt{5}}{2}\right|$$

$$\overline{AP_0}=\sqrt{\{\overline{AH}\}^2+\{\overline{HP_0}\}^2}=\sqrt{\frac{4}{9}\left(a-\frac{9}{2}\right)^2+\left\{\frac{\sqrt{5}}{3}\left(a-\frac{9}{2}\right)-\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}^2}$$

이고 $\overline{AP_0}\le\sqrt{6}$이어야 하므로

$$\sqrt{\frac{4}{9}\left(a-\frac{9}{2}\right)^2+\left\{\frac{\sqrt{5}}{3}\left(a-\frac{9}{2}\right)-\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}^2}\le\sqrt{6}$$

$$\frac{4}{9}\left(a-\frac{9}{2}\right)^2+\left\{\frac{\sqrt{5}}{3}\left(a-\frac{9}{2}\right)-\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}^2\le 6$$

$$\frac{4}{9}\left(a-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{5}{9}(a-6)^2\le 6$$

$$3a^2-32a+69\le 0$$

$$(a-3)(3a-23)\le 0,\quad 3\le a\le\frac{23}{3}$$

$$\therefore\ \frac{9}{2}\le a\le\frac{23}{3}$$

(ii) $a<\dfrac{9}{2}$인 경우

$$\overline{HP_0}=\left|\overline{P_0R}+\overline{HR}\right|=\left|\frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{9}{2}-a\right)+\frac{\sqrt{5}}{2}\right|$$

$$\overline{AP_0}=\sqrt{\{\overline{AH}\}^2+\{\overline{HP_0}\}^2}=\sqrt{\frac{4}{9}\left(\frac{9}{2}-a\right)^2+\left\{\frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{9}{2}-a\right)+\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}^2}$$

이고 $\overline{AP_0}\le\sqrt{6}$이어야 하므로

$$\sqrt{\frac{4}{9}\left(\frac{9}{2}-a\right)^2+\left\{\frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{9}{2}-a\right)+\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}^2}\le\sqrt{6}$$

$$\frac{4}{9}\left(\frac{9}{2}-a\right)^2+\left\{\frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{9}{2}-a\right)+\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}^2\le 6$$

$$\frac{4}{9}\left(\frac{9}{2}-a\right)^2+\frac{5}{9}(6-a)^2\le 6$$

$$3a^2-32a+69\le 0$$

$$(a-3)(3a-23)\le 0,\quad 3\le a\le\frac{23}{3}$$

$$\therefore\ 3\le a<\frac{9}{2}$$

이때, $\overline{QB}=6$이므로 선분 QB는 구 S_1의 지름이다.
따라서 평면 α는 평면 β에 평행하므로 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영의 길이는 선분 AB의 평면 β 위로의 정사영의 길이와 같다.
선분 AB의 평면 β 위로의 정사영의 길이는 $\overline{BH}$이므로
$\dfrac{9}{2}\le a\le\dfrac{23}{3}$일 때, $\overline{BH}=\overline{RB}+\overline{HR}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{3}\left(a-\dfrac{9}{2}\right)$
$3\le a<\dfrac{9}{2}$일 때, $\overline{BH}=\overline{RB}-\overline{HR}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\left(\dfrac{9}{2}-a\right)$
$\therefore\ \sqrt{5}\le\overline{BH}\le\dfrac{23\sqrt{5}}{9}$
따라서 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은 $\dfrac{32\sqrt{5}}{9}$이다.

29. 7
타원과 y축이 만나는 점 중 y좌표가 음수인 점을 $A(0,\ -3)$라 하면 점 A는 각 FPF′을 이등분하는 직선 위에 있으므로
$\angle F'PA = \angle FPA$
이고 $\overline{AF}=\overline{AF'}$이므로 네 점 P, F, A, F′는 한 원 위에 있다.
네 점을 지나는 원을 C라 하면 원 C의 중심은 두 선분 AF, AF′의 수직이등분선의 교점이다.
선분 AF의 수직이등분선은 직선 $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{7}{6}$이고 선분 AF′의 수직이등분선은 직선 $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{7}{6}$이므로 두 직선의 교점은 $\left(0,\ \dfrac{7}{6}\right)$이다.
원 C의 중심을 C라 할 때, $C\left(0,\ \dfrac{7}{6}\right)$이고 각 FPF′는 호 FF′에 대한 원주각이므로 $\angle FPF' = \theta$라 할 때, $\angle FCF' = 2\theta$이고 원점 O에 대하여 $\angle OCF = \theta$이다.

따라서 직각삼각형 OCF에서 $\cos\theta=\frac{7}{25}$이므로

$\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=10-a$라 하면 코사인법칙에 의하여

$16=a^2+(10-a)^2-2\times a\times(10-a)\times\frac{7}{25}$

$\therefore\ a=5-\frac{5\sqrt{7}}{4}$ $(\because\ a<5)$

각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{PF'}:\overline{PF}=\overline{F'Q}:\overline{QF}$이므로

점 Q의 x좌표를 k라 할 때

$\left(5-\frac{5\sqrt{7}}{4}\right)(k+4)=\left(5+\frac{5\sqrt{7}}{4}\right)(4-k)$, $\quad 10k=10\sqrt{7}$

$k=\sqrt{7}$, $\quad\therefore\ k^2=7$

30. 112

$\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=2\sqrt{3}$, $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{BC}=4$이다.

$\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}=2$이므로

$2|\overrightarrow{BP}|\times(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP})=|\overrightarrow{AP}|\times(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP})$

$\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AB}|}\times|\overrightarrow{BP}|\times(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP})=|\overrightarrow{AP}|\times(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP})$

$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|}=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BP}|}$

이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AP}$가 이루는 각의 크기와 두 벡터 $\overrightarrow{BC}$와 $\overrightarrow{BP}$가 이루는 각의 크기는 서로 같다. 점 P는 삼각형 ABC의 내부의 점이므로 $\angle PAB=\angle PBC=\theta\,(\theta<\frac{\pi}{2})$이고

$\angle PBA=\frac{\pi}{3}-\theta$이다.

삼각형 APB에서 $\angle PAB+\angle PBA=\frac{\pi}{3}$이므로

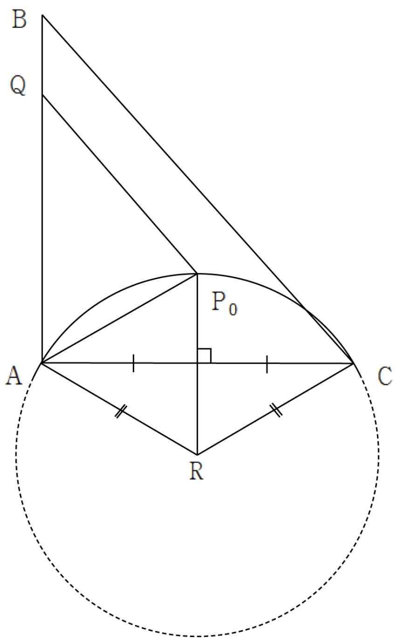
점 P는 $\angle APB=\frac{2}{3}\pi$를 만족시키는 삼각형 내부의 점이다.

따라서 점 P는 선분 AB의 수직이등분선 위의 점 중

$\angle ARB=\frac{\pi}{3}$이고 삼각형 ABC의 외부에 있는 점 R에 대하여 점 R을 중심으로 하고 두 점 A, B를 지나는 원 위의 점이다.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$가 최대일 때, 점 P를 P_0라 하면

점 P_0에서의 접선은 직선 AB랑 서로 평행해야 하므로 점 P_0는 선분 AB의 수직이등분선과 원이 만나는 점 중 삼각형 ABC 내부의 점이다.



$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$이므로 점 Q는 점 P_0를 지나고 직선 AP_0와 서로 수직인 직선이 직선 AC와 만나는 점이다.

$\overline{AP_0}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이고 $\angle BAP_0=\frac{\pi}{6}$이므로 $\angle CAP_0=\frac{\pi}{3}$이다.

따라서 직각삼각형 AQP_0에서 $\overline{AQ}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$이다.

$|\overrightarrow{BQ}|^2=\overline{AQ}^2+\overline{AB}^2=\frac{16}{3}+4=\frac{28}{3}$이므로

$\therefore\ 12|\overrightarrow{BQ}|^2=112$