15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1}=\begin{cases} \frac{1}{2}a_n+2n & (a_n\text{이 4의 배수인 경우}) \\ a_n+2n & (a_n\text{이 4의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$
>
> 이다.
>
> (나) $a_3 > a_5$

$50 < a_4+a_5 < 60$이 되도록 하는 a_1의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① 224 ② 228 ③ 232 ④ 236 ⑤ 240

$$a_4=\begin{cases} \frac{1}{2}a_3+6 & (a_3=4n) \\ a_3+6 & (a_3\neq 4n) \end{cases}$$

$$a_5=\begin{cases} \frac{1}{2}a_4+8 & (a_4=4m) \\ a_4+8 & (a_4\neq 4m) \end{cases}$$

$\frac{1}{4}a_3+11 \quad (a_3=4n)$

$\frac{1}{2}a_3+11 \quad (a_3\neq 4n)$

$\frac{1}{2}a_3+14 \quad (a_3=4n)$

$\cancel{a_3+14} \quad (a_3\neq 4n)$ 조건 (나)

① $a_3=4n$, $a_4=4m$

$a_3 > \frac{1}{4}a_3+11$, $a_3 > \frac{44}{3}=14.xx$ (∵ 조건 (나))

$a_4+a_5=\frac{3}{4}a_3+17$

$50 < \frac{3}{4}a_3+17 < 60$

$44 < a_3 < \frac{172}{3}=57.xx$

$\Rightarrow$ $a_3 = 48, \boxed{52}, 56$, $a_4 = \cancel{30}, \boxed{32}, \cancel{34}$

② $a_3=4n$, $a_4\neq 4m$

$a_3 > \frac{1}{2}a_3+14$, $a_3 > 28$ (∵ 조건 (나))

$a_4+a_5=a_3+20$

$50 < a_3+20 < 60$

$30 < a_3 < 40$

$\Rightarrow$ $a_3 = \boxed{32}, 36$, $a_4 = \boxed{22}, \cancel{24}$

③ $a_3\neq 4n$, $a_4=4m$

$a_3 > \frac{1}{2}a_3+11$, $a_3 > 22$ (∵ 조건 (나))

$a_4+a_5=\frac{3}{2}a_3+17$

$50 < \frac{3}{2}a_3+17 < 60$

$22 < a_3 < \frac{86}{3}=28.xx$

$\Rightarrow$ $a_3 = 23, 25, \boxed{26}, 27$, $a_4 = \cancel{29}, \cancel{31}, \boxed{32}, \cancel{33}$

O : 4의 배수
X : 4의 배수 아님

a_3 a_2 a_1

- 26
  - O 44
    - O 84
    - X 42
  - X 22
    - O 40
    - X ~~20~~
- 36
  - O 64
    - O 124
    - X 62
  - X ~~32~~
- 52
  - O 96
    - O 188
    - X 94
  - X ~~48~~

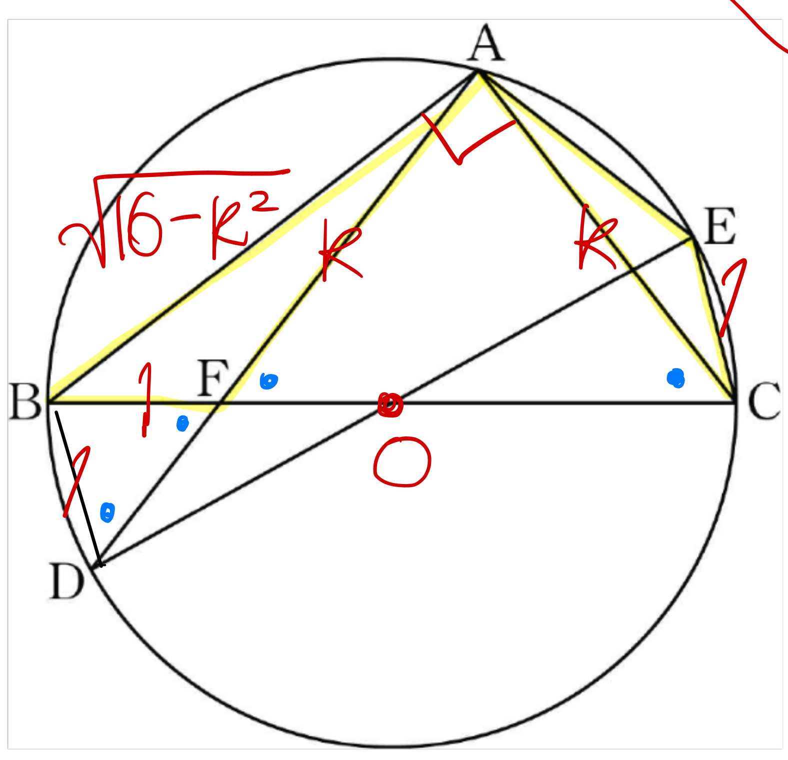
$\Rightarrow M=188$, $m=40$

$\therefore M+m=228$

21. 그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고

$$\overline{BC}=\overline{DE}=4,\ \overline{BF}=\overline{CE},\ \sin(\angle CAE)=\frac{1}{4}$$

이다. $\overline{AF}=k$일 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]



$$\frac{\overline{CE}}{\sin(\angle CAE)}=2R$$

$$\overline{CE}=\frac{1}{4}\times2\times2=1$$

$$\therefore\ \overline{BF}=\overline{CE}=1$$

$$\overline{BF}^2=\overline{AB}^2+\overline{AF}^2-2\overline{AB}\,\overline{AF}\cos(\angle BAF)$$

$$=\sqrt{1-\sin^2(\angle BAF)}$$

$$=\sqrt{1-\sin^2(\angle CAE)}$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\Rightarrow\ 1=16-\cancel{k^2}+\cancel{k^2}-2\sqrt{16-k^2}\times k\times\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{15}}{2}\times\sqrt{16-k^2}\times k=15$$

$$k^2(16-k^2)=60$$

$$k^4-16k^2+60=0$$

$$(k^2-8)^2=4$$

$$\therefore\ k^2=\boxed{6}\ \text{또는}\ \cancel{10}$$

$$16-k^2=\boxed{10}\ \text{또는}\ \cancel{6}$$

$$\Rightarrow\ k^2=6$$

28. 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. $\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)$이고, 양수 a에 대하여

$$\boxed{f(a)=f(3a)=g(2a),}$$
$$\mathrm{P}(Y\le 2a)=0.6915$$

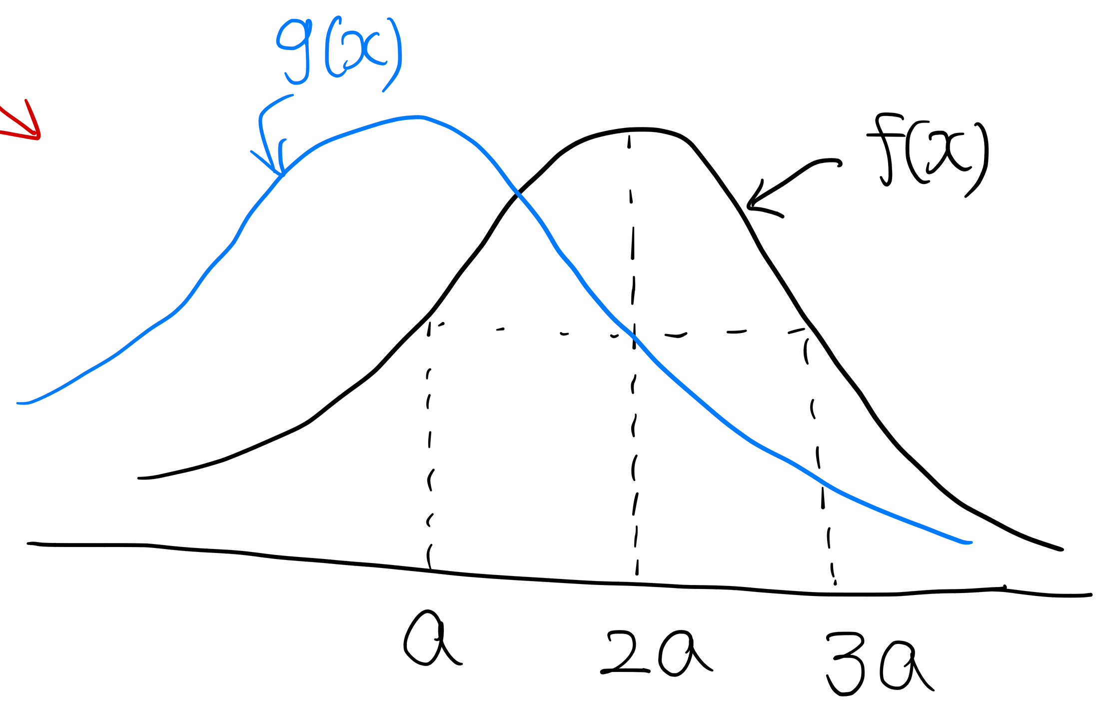
일 때, $\mathrm{P}(0\le X\le 3a)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.6687
④ 0.7745 ⑤ 0.8185

1

$\mathrm{P}(Y\le 2a)=0.5+0.1915$



$$\frac{3a-2a}{\sigma}=\frac{a}{\sigma}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \sigma=2a$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le X\le 3a)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0.5)$

$=0.3413+0.1915$

$=0.5328$

30. 두 정수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.
> (나) 함수 $|f(x)|$가 $x=k$에서 극대 또는 극소인 모든 k의 값의 합은 3이다.

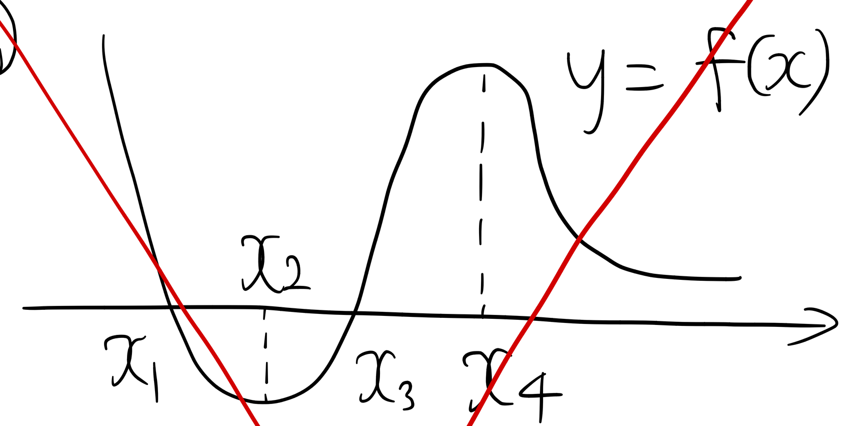
$f(10)=pe^{-10}$일 때, p의 값을 구하시오. [4점]

$$f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$$

$$f'(x)=e^{-x}(2x+a-x^2-ax-b)$$

$$=-\{x^2+(a-2)x-(a-b)\}e^{-x}$$

①



$x_1+x_3=-a$

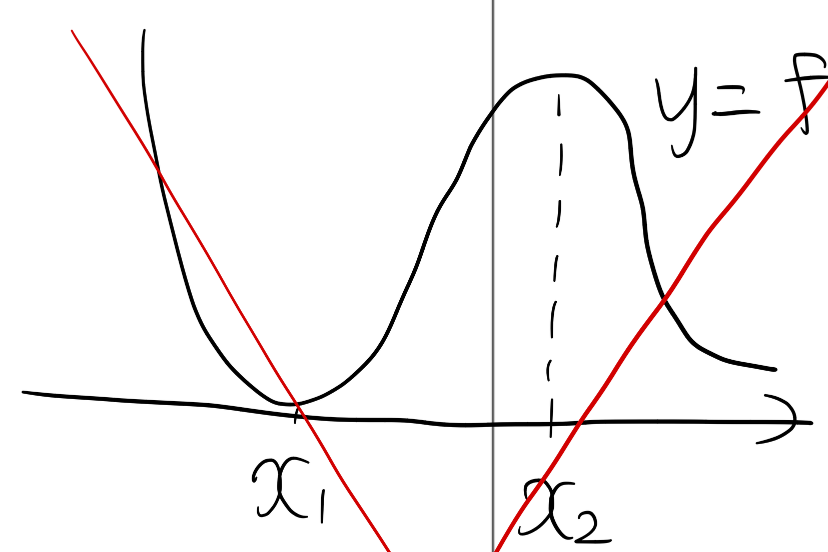
$x_2+x_4=2-a$

$x_1+x_2+x_3+x_4=2-2a$

$2-2a=3$

$a=-\frac{1}{2}$

②



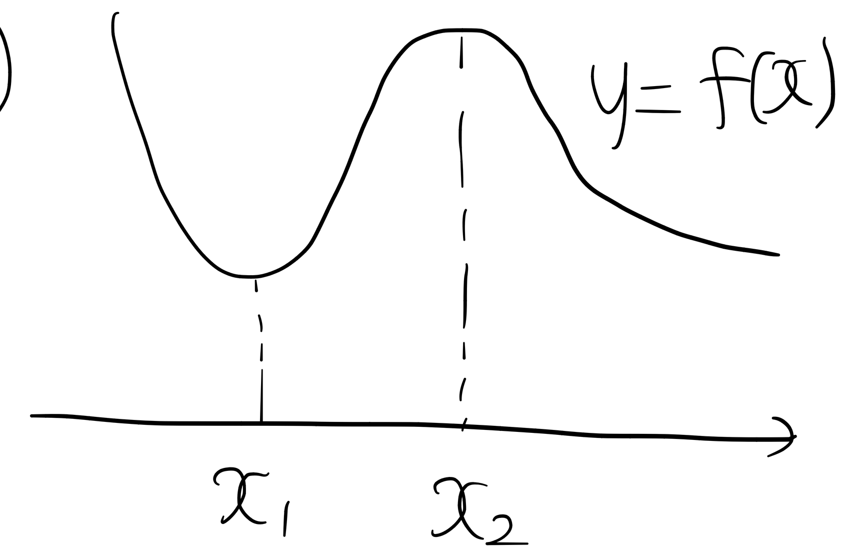
$x_1+x_2=2-a=3$

$a=-1$

$x^2-x+b=0$

$b=\frac{1}{4}$ ($\because$ 중근)

③



$x_1+x_2=2-a=3$

$\boxed{a=-1}$

$a^2-4b<0$

$\frac{1}{4}<b$ ⋯ ㉠

$x^2-3x+b+1=0$

$9-4b-4>0$

$5-4b>0$

$5>4b$ ⋯ ㉡

$\frac{1}{4}<b<\frac{5}{4}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$\Rightarrow \boxed{b=1}$

$f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$

$f(10)=(100-10+1)e^{-10}$

$=91e^{-10}$

$\therefore p=91$

29. 좌표평면 위의 점 A(5, 0)에 대하여 제1사분면 위의 점 P가

$$|\overrightarrow{OP}|=2,\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$

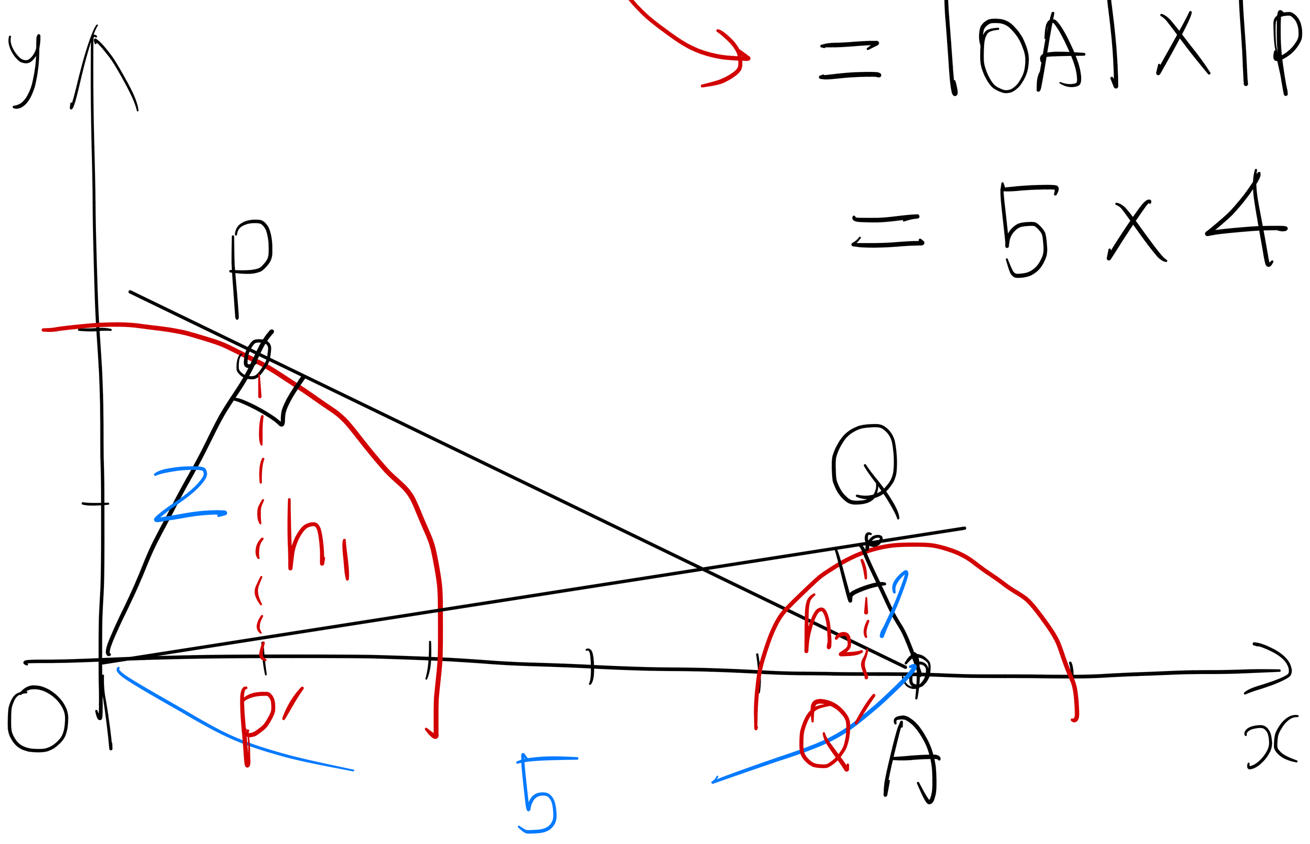
을 만족시키고, 제1사분면 위의 점 Q가

$$|\overrightarrow{AQ}|=1,\ \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$$

을 만족시킬 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.) [4점]

$= |\overrightarrow{OA}| \times |\overrightarrow{P'Q'}|$

$= 5 \times 4 = 20$



$\overline{AP} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

$\overline{OQ} = \sqrt{25-1} = 2\sqrt{6}$

① △OAP 의 넓이

$\frac{1}{2}\times 5\times h_1 = \frac{1}{2}\times 2\times \overline{AP}$

$\therefore h_1 = \frac{2\sqrt{21}}{5}$

$\boxed{\overline{AP'} = \sqrt{21 - \frac{4\times 21}{25}} = \frac{21}{5}}$

② △OAQ의 넓이

$\frac{1}{2}\times 5\times h_2 = \frac{1}{2}\times 1\times \overline{OQ}$

$\therefore h_2 = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\boxed{\overline{OQ'} = \sqrt{24 - \frac{24}{25}} = \frac{24}{5}}$

$\overline{OA} = \overline{OQ'} + \overline{AP'} - \overline{P'Q'}$

$\therefore \overline{P'Q'} = \left(\frac{24}{5}+\frac{21}{5}\right) - 5 = 4$