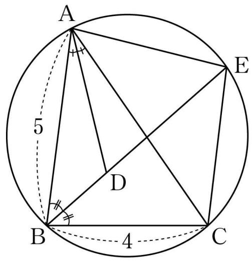
4. [문항코드]

그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$의 이등분선과 $\angle CAB$의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈보 기〉

ㄱ. $\overline{AC}=6$

ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$

ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

[4점]

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

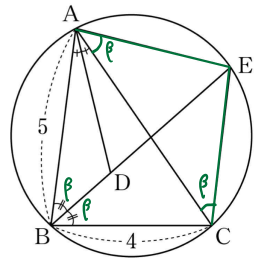
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ $\triangle ABC \longrightarrow \overline{AC}^2=5^2+4^2-2\cdot5\cdot4\cdot\cos(\angle ABC)$

$=36$

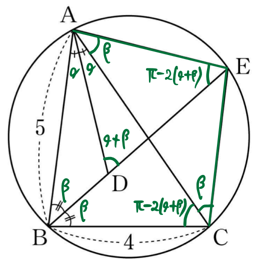
$\longrightarrow \overline{AC}=6.$

ㄴ



$\overline{EA}=\overline{EC}$

ㄷ



$\angle EAD=\angle EDA$

$\longrightarrow \overline{EA}=\overline{ED}$

$\triangle EAC \longrightarrow \overline{EA}=\overline{EC}=x$

$\longrightarrow \cos(\angle AEC)=-\frac{1}{8}$

$=\frac{x^2+x^2-36}{2\cdot x\cdot x}$

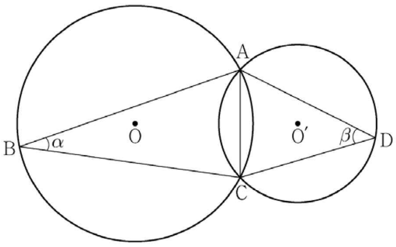
$\longrightarrow x=4.$ ②

10. [문항코드]

그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고 $\angle\mathrm{ABC}=\alpha$, $\angle\mathrm{ADC}=\beta$라 할 때,

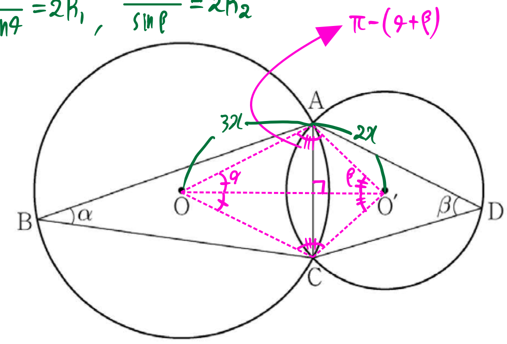
$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2},\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3},\ \overline{\mathrm{OO'}}=1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[4점]

$\frac{\overline{AC}}{\sin\alpha}=2R_1$, $\frac{\overline{AC}}{\sin\beta}=2R_2$



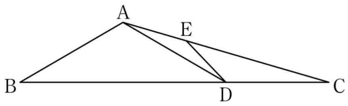
$$\cos\{\pi-(\alpha+\beta)\}=-\cos(\alpha+\beta)$$
$$=-\frac{1}{3}$$
$$=\frac{(3x)^2+(2x)^2-1^2}{2\cdot 3x\cdot 2x}$$

$\longrightarrow x=\frac{\sqrt{17}}{17}$.

$\longrightarrow \frac{9}{17}\pi$. 26

4. [문항코드]

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3\sqrt{3}$, $\overline{CA}=\sqrt{13}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 B가 아닌 점 D를 $\overline{AD}=2$가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 양 끝점 A, C가 아닌 점 E를 사각형 ABDE가 원에 내접하도록 잡는다.



다음은 선분 DE의 길이를 구하는 과정이다.

> 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
> $$\cos(\angle ABC)=\boxed{(가)}$$
> 이다. 삼각형 ABD에서 $\sin(\angle ABD)=\sqrt{1-(\boxed{가})^2}$
> 이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는 $\boxed{(나)}$ 이다.
> 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여
> $$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$$
> 이므로 $\sin(\angle CAD)=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}\times\sin(\angle ACD)$이다.
> 삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여
> $$\overline{DE}=\boxed{(다)}$$
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p\times q\times r$의 값은?

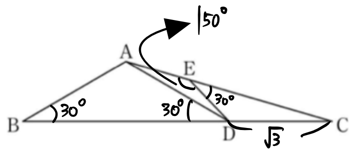
[4점]

① $\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$ ② $\dfrac{7\sqrt{13}}{13}$ ③ $\dfrac{8\sqrt{13}}{13}$ ④ $\dfrac{9\sqrt{13}}{13}$ ⑤ $\dfrac{10\sqrt{13}}{13}$

$$\cos(\angle ABC)=\frac{2^2+(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot2\cdot3\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}=p.$$

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)}=2\times q \longrightarrow q=2.$$

$$\overline{BD}=2\sqrt{3}\longrightarrow\overline{CD}=\sqrt{3}.\quad \cos(\angle CAD)=\frac{2^2+(\sqrt{13})^2-(\sqrt{3})^2}{2\cdot2\cdot\sqrt{13}}$$
$$=\frac{7\sqrt{13}}{26}$$
$$\longrightarrow \sin(\angle CAD)=\frac{\sqrt{39}}{26}.$$

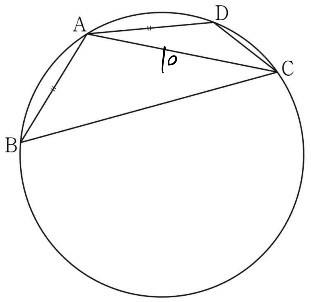


$$\triangle ADE \longrightarrow \frac{2}{\sin150^\circ}=\frac{\overline{DE}}{\sin(\angle CAD)}$$
$$\longrightarrow \overline{DE}=\frac{2}{13}\sqrt{39}=r.\quad ①$$

7. [문항코드]

그림과 같이 반지름의 길이가 $R(5<R<5\sqrt{5})$인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

◦$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$이고 $\overline{\mathrm{AC}}=10$이다. ◦사각형 ABCD의 넓이는 40이다.



다음은 선분 BD의 길이와 R의 비를 구하는 과정이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=k$라 할 때 두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여 $\cos(\angle\mathrm{ACB})=\frac{1}{20}\left(\overline{\mathrm{BC}}+\frac{\boxed{(가)}}{\overline{\mathrm{BC}}}\right)$, $\cos(\angle\mathrm{DCA})=\frac{1}{20}\left(\overline{\mathrm{CD}}+\frac{\boxed{(가)}}{\overline{\mathrm{CD}}}\right)$ 이다. 이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로 $\cos(\angle\mathrm{ACB})=\cos(\angle\mathrm{DCA})$이다. 사각형 ABCD의 넓이는 두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로 $\frac{1}{2}k^2\sin(\angle\mathrm{BAD})+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin(\pi-\angle\mathrm{BAD})=40$ 에서 $\sin(\angle\mathrm{BAD})=\boxed{(나)}$이다. 따라서 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여 $\overline{\mathrm{BD}}:\mathrm{R}=\boxed{(다)}:1$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $\frac{f(10p)}{q}$의 값은?

[4점]

① $\frac{25}{2}$ ② 15 ③ $\frac{35}{2}$ ④ 20 ⑤ $\frac{45}{2}$

$$\cos(\angle ACB)=\frac{10^2+\overline{BC}^2-k^2}{2\cdot 10\cdot\overline{BC}}$$

$$=\frac{1}{20}\left(\overline{BC}+\frac{100-k^2}{\overline{BC}}\right)\longrightarrow f(k)=100-k^2.$$

$$\cos(\angle ACB)=\cos(\angle DCA)$$

$$\longrightarrow \overline{BC}+\frac{100-k^2}{\overline{BC}}=\overline{CD}+\frac{100-k^2}{\overline{CD}}$$

$$\longrightarrow \overline{BC}-\overline{CD}=(100-k^2)\cdot\left(\frac{1}{\overline{CD}}-\frac{1}{\overline{BC}}\right)$$

$$\longrightarrow \overline{BC}\cdot\overline{CD}=100-k^2.$$

$$\longrightarrow \sin(\angle BAD)\cdot\left(\frac{k^2}{2}+\frac{100-k^2}{2}\right)=40.$$

$$\longrightarrow \sin(\angle BAD)=\frac{4}{5}=p.$$

$$\triangle ABD\longrightarrow \frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)}=2R$$

$$\longrightarrow \overline{BD}=\frac{8}{5}R.$$

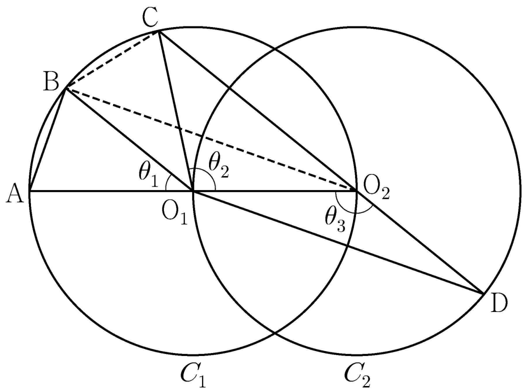
$$\longrightarrow q=\frac{8}{5}.$$

⑤

6. [문항코드]

두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.

이때 $\angle BO_1A = \theta_1$, $\angle O_2O_1C = \theta_2$, $\angle O_1O_2D = \theta_3$이라 하자.



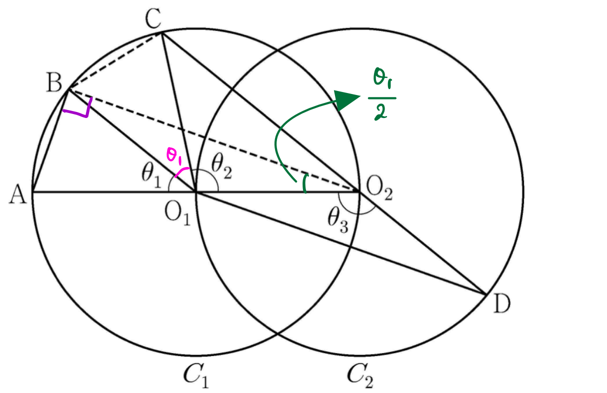
다음은 $\overline{AB} : \overline{O_1D} = 1 : 2\sqrt{2}$이고 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi$이므로 $\theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로 $\angle CO_1B = \theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB} = k$라 할 때
> $\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2} = \boxed{(가)}$이고,
> $\angle BO_2A = \dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2} = \boxed{(나)}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC} = k$, $\overline{BO_2} = 2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B = \dfrac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C} = \boxed{(다)}$이다.
> $\overline{CD} = \overline{O_2D} + \overline{O_2C} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB} : \overline{CD} = k : \left(\dfrac{\boxed{(가)}}{2} + \boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p) \times g(p)$의 값은?

[4점]

① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$ ④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$



$\overline{AO_2} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BO_2}^2}$
$= 3k$
$= f(k)$

$\cos\dfrac{\theta_1}{2} = \dfrac{\overline{BO_2}}{\overline{AO_2}}$
$= \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
$= p$

$\angle O_1O_2B = \angle O_2O_1D$
$= \dfrac{\theta_1}{2}$
$= \dfrac{\pi - \theta_3}{2} \longrightarrow \pi = 2\theta_1 + \theta_2$, $\angle BO_1C = \theta_1$

$\overline{O_2C} = x \ (0 < x < 3k)$.

$\angle BO_2C = \dfrac{1}{2}\angle BO_1C$
$= \dfrac{\theta_1}{2}$

$\overline{BC} = k$, $\overline{BO_2} = 3\sqrt{3}k$

$\triangle O_2BC \longrightarrow \overline{BC}^2 = \overline{O_2C}^2 + \overline{BO_2}^2 - 2\cdot\overline{O_2C}\cdot\overline{BO_2}\cdot\cos(\angle BO_2C)$
$\longrightarrow k^2 = x^2 + (2\sqrt{2}k)^2 - 2\cdot x\cdot 2\sqrt{2}k\cdot\cos\dfrac{\theta_1}{2}$
$\longrightarrow (3x - 7k)(x - 3k) = 0$
$\longrightarrow x = \dfrac{7}{3}k$
$= g(k)$

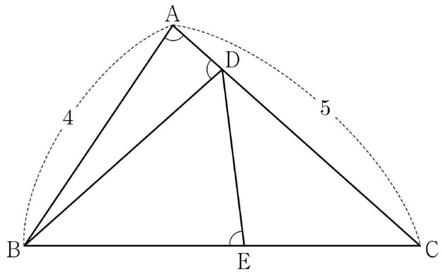
2

5. [문항코드]

그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는?



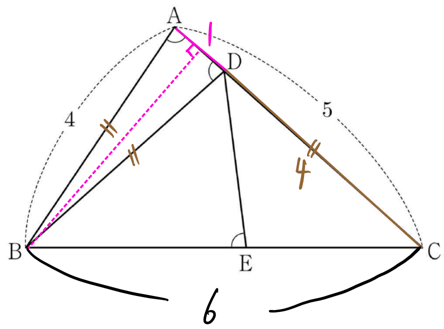
[4점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

$\triangle ABC \longrightarrow \overline{BC}^2 = 5^2+4^2-2\cdot5\cdot4\cdot\frac{1}{8}$

$= 36$

$\longrightarrow \overline{BC} = 6.$



$\triangle BED \longrightarrow \dfrac{\overline{DE}}{\sin(\angle DBE)} = \dfrac{4}{\sin(\angle BED)}$

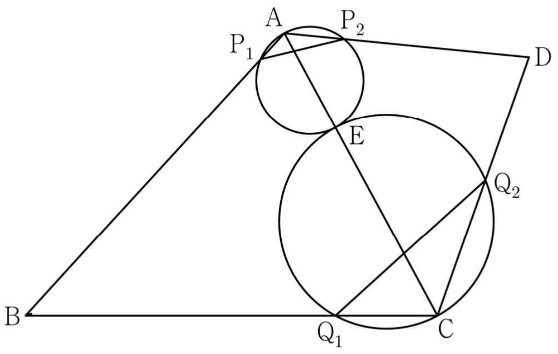
$\longrightarrow \overline{DE} = \frac{8}{3}.$ ③

13. [문항코드]
그림과 같이

$$\overline{BC}=3,\ \overline{CD}=2,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고,
선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.
$\overline{P_1P_2} : \overline{Q_1Q_2} = 3 : 5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$)

[4점]



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

$\overline{AE}$를 지름으로 하는 원을 C_1, $\overline{EC}$를 지름으로 하는 원을 C_2라 하자.

$\overline{AE} : \overline{EC} = 1:2$이므로 C_1, C_2의 반지름 길이 비는 $1:2$이다.

$\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin\angle Q_1CQ_2} = 2\times\frac{\overline{P_1P_2}}{\sin\angle BAD}$ 이므로

$\frac{5\sqrt{2}k}{\frac{2}{3}\sqrt{2}} = 2\times\frac{3k}{\sin\angle BAD} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{2}{\sin\angle BAD}$

$\therefore \sin\angle BAD = \frac{4}{5}$, $\angle BAD > \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\angle BAD = -\frac{3}{5}$

$\frac{1}{2}\cdot xy\cdot\frac{4}{5} = 2 \Rightarrow xy = 5$ $(\overline{AD}=x,\ \overline{AB}=y)$

$-\frac{3}{5} = \frac{x^2+y^2-\overline{BD}^2}{2xy}$, $\frac{3^2+2^2-\overline{BD}^2}{2\cdot3\cdot2} = -\frac{1}{3}$

$\overline{BD}^2 = 17$이므로 $-\frac{3}{5} = \frac{x^2+y^2-17}{2xy}$

$xy=5$이므로 $x^2+y^2=11$

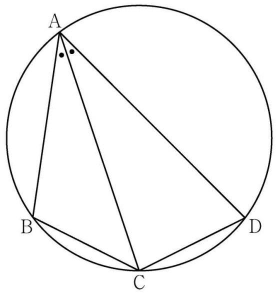
$x^2+2xy+y^2=21$ $\therefore x+y=\sqrt{21}$

5. [문항코드]

그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

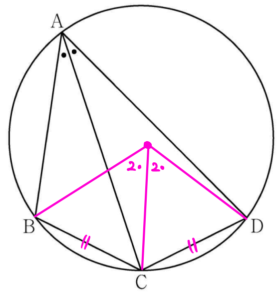
$$\overline{AB}=5,\ \overline{AC}=3\sqrt{5},\ \overline{AD}=7,\ \angle BAC=\angle CAD$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는?



[4점]

① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$



$\triangle ABC \longrightarrow \overline{BC}^2 = 5^2+(3\sqrt{5})^2-2\cdot5\cdot3\sqrt{5}\cdot\cos\bullet$

$\triangle ACD \longrightarrow \overline{CD}^2 = (3\sqrt{5})^2+7^2-2\cdot3\sqrt{5}\cdot7\cdot\cos\bullet$

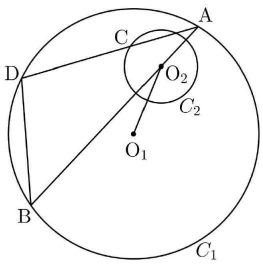
$\longrightarrow \cos\bullet = \frac{2}{5}\sqrt{5},\ \overline{BC}=\overline{CD}=\sqrt{10}.$

$\triangle ABC \longrightarrow \frac{\sqrt{10}}{\sin\bullet}=2R$

$\longrightarrow R=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$ ①

6. [문항코드]

그림과 같이 중심이 O_1 이고 반지름의 길이가 r $(r>3)$ 인 원 C_1 과 중심이 O_2 이고 반지름의 길이가 1 인 원 C_2 에 대하여 $\overline{O_1O_2}=2$ 이다. 원 C_1 위를 움직이는 점 A 에 대하여 직선 AO_2 가 원 C_1 과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 B 라 하자. 원 C_2 위를 움직이는 점 C 에 대하여 직선 AC 가 원 C_1 과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 D 라 하자.



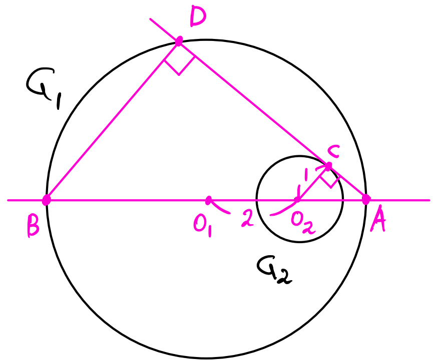
다음은 $\overline{BD}$ 가 최대가 되도록 네 점 A, B, C, D 를 정할 때, $\overline{O_1C}^2$ 을 r 에 대한 식으로 나타내는 과정이다.

> 삼각형 ADB 에서 사인법칙에 의하여
>
> $$\frac{\overline{BD}}{\sin A} = \boxed{\text{(가)}}$$
>
> 이므로 $\overline{BD}$ 가 최대이려면 직선 AD 가 원 C_2 와 점 C 에서 접해야 한다.
>
> 이때 직각삼각형 ACO_2 에서 $\sin A = \frac{1}{\overline{AO_2}}$ 이므로
>
> $$\overline{BD} = \frac{1}{\overline{AO_2}} \times \boxed{\text{(가)}}$$
>
> 이다.
>
> 그러므로 직선 AD 가 원 C_2 와 점 C 에서 접하고 $\overline{AO_2}$ 가 최소일 때 $\overline{BD}$ 는 최대이다.
>
> $\overline{AO_2}$ 의 최솟값은
>
> $$\boxed{\text{(나)}}$$
>
> 이므로 $\overline{BD}$ 가 최대일 때,
>
> $$\overline{O_1C}^2 = \boxed{\text{(다)}}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(r)$, $g(r)$, $h(r)$ 라 할 때, $f(4) \times g(5) \times h(6)$ 의 값은? [4점]

① 216 ② 192 ③ 168 ④ 144 ⑤ 120

$$\frac{\overline{BD}}{\sin A} = f(r) = 2r.$$



$g(r) = r-2.$

$$\cos(\angle AO_2C) = \frac{1}{r-2},$$

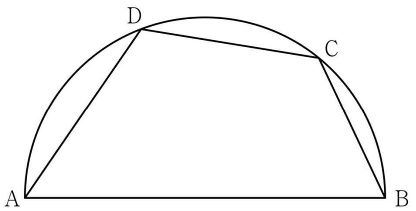
$$\triangle O_1O_2C \longrightarrow -\frac{1}{r-2} = \frac{2^2+1^2-\overline{O_1C}^2}{2\cdot2\cdot1}$$

$$\longrightarrow \overline{O_1C}^2 = h(r) = \frac{5r-6}{r-2}$$

④

8. [문항코드]

길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C를 $\overline{BC}=6$이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.)



〈보 기〉

ㄱ. $\sin(\angle CBA)=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

ㄴ. $\overline{CD}=7$일 때, $\overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$이다.

[4점]

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ $\cos(\angle CBA)=\frac{3}{7} \longrightarrow \sin(\angle CBA)=\frac{2\sqrt{10}}{7}.$

ㄴ $\angle CBA+\angle ADC=\pi$

$\triangle ADC \longrightarrow \cos(\angle ADC)=\cos(\pi-\angle CBA)$

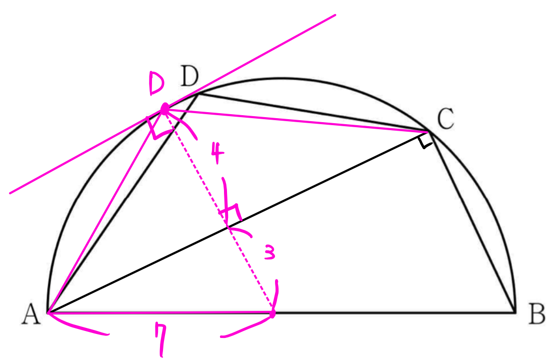
$=-\frac{3}{7}$

$=\frac{\overline{AD}^2+7^2-\overline{AC}^2}{2\cdot\overline{AD}\cdot 7}$

$\longrightarrow \overline{AD}=2\sqrt{30}-3.$

ㄷ

$\underbrace{S_{\square ABCD}}_{\text{최대}}=\underbrace{S_{\triangle ABC}}_{12\sqrt{10}}+\underbrace{S_{\triangle ACD}}_{\text{최대}}$



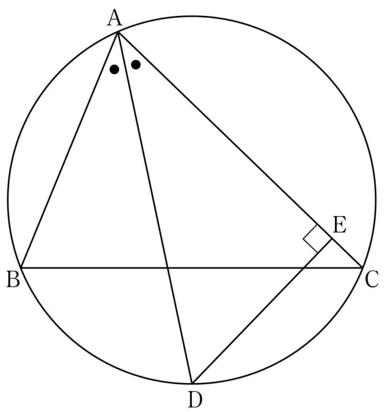
$S_{\square ABCD}$ 최댓값 $=12\sqrt{10}+8\sqrt{10}$

$=20\sqrt{10}.$

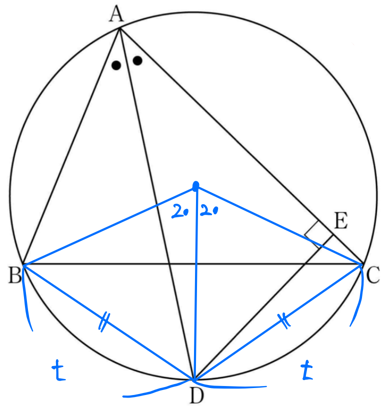
5

3. [문항코드]

$\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$인 예각삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오.



[4점]



△DAB ⟶ $t^2 = 6^2 + \overline{AD}^2 - 2\cdot 6\cdot \overline{AD}\cdot \cos\bullet$

△CAD ⟶ $t^2 = \overline{AD}^2 + 8^2 - 2\cdot \overline{AD}\cdot 8\cdot \cos\bullet$

⟶ $4\cdot \overline{AD}\cdot \cos\bullet = 28$

△ADE ⟶ $k = \overline{AD}\cdot \cos\theta = 7.$

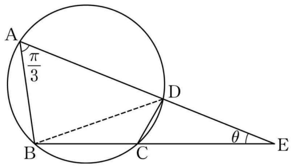
84

3. [문항코드]

그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{AB}=\overline{BC}=2,\quad \overline{AD}=3,\quad \angle BAD=\frac{\pi}{3}$$

이다. 두 직선 AD, BC의 교점을 E라 하자.



다음은 $\angle AEB=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면
>
> $\overline{CD}=$ (가)
>
> 이다. 삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서
>
> $\angle AEB$는 공통, $\angle EAB=\angle ECD$
>
> 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.
>
> 이를 이용하면
>
> $\overline{ED}=$ (나)
>
> 이다. 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면
>
> $\sin\theta=$ (다)
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $(p+q)\times r$의 값은?

[4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{14}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{14}$

$\triangle ABD \longrightarrow \cos\frac{\pi}{3}=\frac{2^2+3^2-\overline{BD}^2}{2\cdot2\cdot3}$ $\triangle BCD \longrightarrow \cos\frac{2}{3}\pi=\frac{2^2+\overline{CD}^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot2\cdot\overline{CD}}$

$\longrightarrow \overline{BD}=\sqrt{7}.$ $\longrightarrow \overline{CD}=1=p$

$\overline{AB}:\overline{CD}=2:1 \longrightarrow$ $\triangle EAB$, $\triangle ECD$는 $2:1$ 닮음

$\longrightarrow \overline{ED}=x,\ \overline{CE}=2x-2$

$\longrightarrow \cos\frac{\pi}{3}=\frac{(2x-2)^2+1^2-x^2}{2\cdot(2x-2)\cdot1}$

$\longrightarrow x=\frac{7}{3}.$ $q=\frac{7}{3}.$

$\triangle ECD \longrightarrow \frac{1}{\sin\theta}=\frac{\frac{7}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}$

$\longrightarrow \sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{14}=r.$ ④

21. [문항코드]

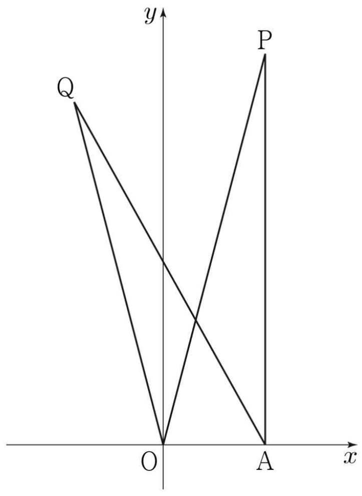
좌표평면 위의 두 점 O(0, 0), A(2, 0)과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{15}$이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$이다.

(나) $\cos(\angle\mathrm{OPA})=\cos(\angle\mathrm{OQA})=\frac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{15}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]



$\angle OPA=\theta$라 하면 $\sin\theta=\frac{1}{4}$

$\overline{AP}=\overline{AQ}$이고 $\angle OQA=\angle OPA$ 이므로 □AOQP는

원에 내접하는 사각형이다.

△OAP가 직각 삼각형 => $\overline{OP}=8$

△OQP도 직각삼각형 => $\overline{QP}=x$, $\overline{OQ}=y \rightarrow x^2+y^2=64$

△OQA에서 $\cos\theta=\frac{(2\sqrt{15})^2+y^2-4}{2\cdot2\sqrt{15}\cdot y}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$56+y^2=15y \rightarrow y=7$ or 8

$y<8$ 이므로 $y=7$; $x=\sqrt{15}$

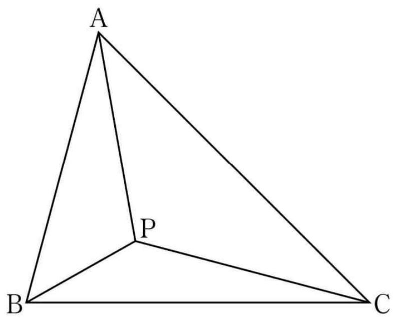
$\therefore$ □OAPQ $=\sqrt{15}\cdot7\cdot\frac{1}{2}+2\cdot2\sqrt{15}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{7}{2}+2\right)\sqrt{15}=\frac{11}{2}\sqrt{15}$

$\therefore$ 22

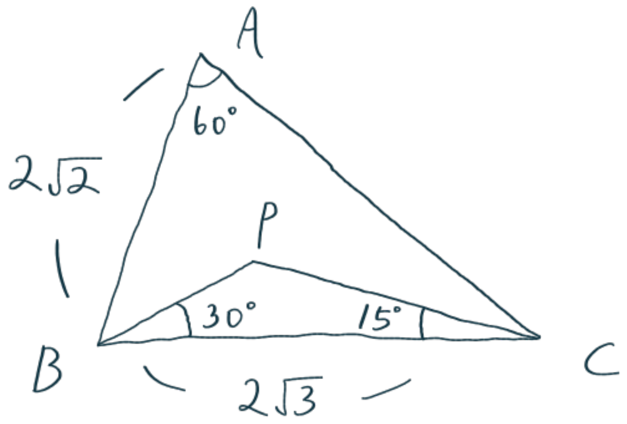
11. [문항코드]

그림과 같이 $\angle BAC = 60^\circ$, $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle PBC = 30^\circ$, $\angle PCB = 15^\circ$일 때, 삼각형 APC의 넓이는?

[4점]



① $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ ④ $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$



$$(2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{2})^2 + \overline{AC}^2 - 2\times 2\sqrt{2}\times\overline{AC}\times\frac{1}{2}$$

$$\overline{AC}^2 - 2\sqrt{2}\times\overline{AC} - 4 = 0$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{2}+\sqrt{6}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 135^\circ} = \frac{\overline{PC}}{\sin 30^\circ} \rightsquigarrow \overline{PC} = \sqrt{6}$$

$$\cos(\angle ACB) = \frac{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2\times 2\sqrt{3}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})}$$

$$= \frac{12+4\sqrt{3}}{4\sqrt{6}+12\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \angle ACB = 45^\circ$$

$$\therefore \angle PCA = 30^\circ$$

$$\therefore \frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\frac{1}{2}$$

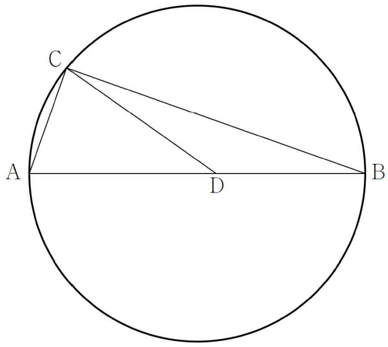
$$= \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

7. [문항코드]

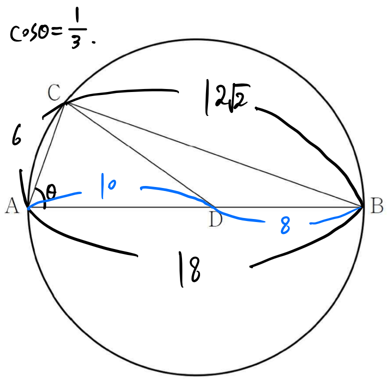
그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여

$$\overline{BC}=12\sqrt{2},\ \cos(\angle CAB)=\frac{1}{3}$$

이다. 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오.



[4점]



$\triangle CAD \longrightarrow \overline{CD}^2=6^2+10^2-2\cdot 6\cdot 10\cdot \frac{1}{3}$

$=96$

$\longrightarrow \overline{CD}=4\sqrt{6}$.

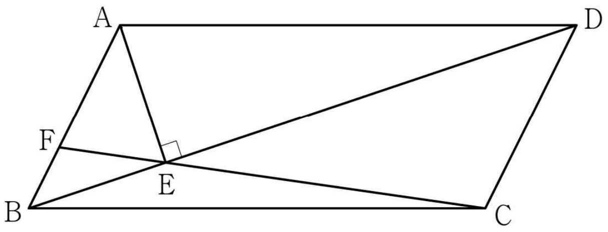
$\triangle CAD \longrightarrow \dfrac{4\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=2R$

$\longrightarrow R=3\sqrt{3}$.

27

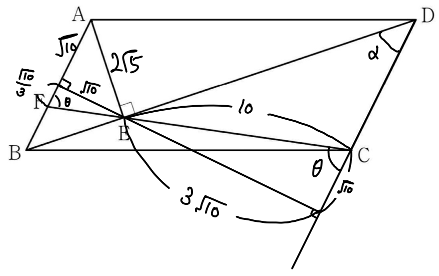
13. [문항코드]

그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하고, 직선 CE가 선분 AB와 만나는 점을 F라 하자. $\cos(\angle \mathrm{AFC})=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{\mathrm{EC}}=10$이고 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$일 때, 삼각형 AFE의 넓이는?



[4점]

① $\frac{20}{3}$ ② 7 ③ $\frac{22}{3}$ ④ $\frac{23}{3}$ ⑤ 8



$\angle AFE = \theta$라 하면 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\therefore \tan\theta = 3$

$\sin\angle EDC = \frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\angle EDC = \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \triangle AEB$는 직각이등변삼각형

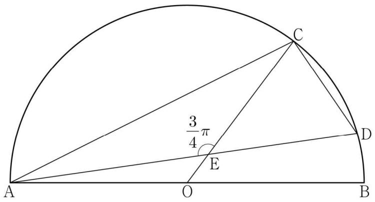
$\triangle AFE = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\sqrt{10} \times \sqrt{10} = \frac{20}{3}$ ■

2. [문항코드]

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4,\quad \overline{ED}=3\sqrt{2},\quad \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은?

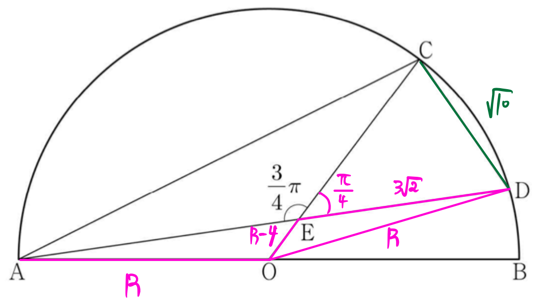


[4점]

① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$ ④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

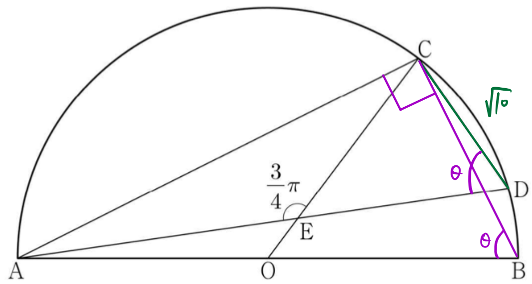
$\triangle CDE \longrightarrow \cos\frac{\pi}{4}=\frac{4^2+(3\sqrt{2})^2-\overline{CD}^2}{2\cdot4\cdot3\sqrt{2}}$

$\longrightarrow \overline{CD}=\sqrt{10}.$



$\triangle ODE \longrightarrow \cos\frac{3}{4}\pi=\frac{(R-4)^2+(3\sqrt{2})^2-R^2}{2\cdot(R-4)\cdot3\sqrt{2}}$

$\longrightarrow R=5$



$\triangle CDE \longrightarrow \frac{4}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{10}}{\sin\frac{\pi}{4}}$

$\longrightarrow \sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

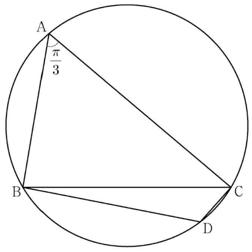
$\longrightarrow \overline{AC}=10\sin\theta$

$=4\sqrt{5}.$

5

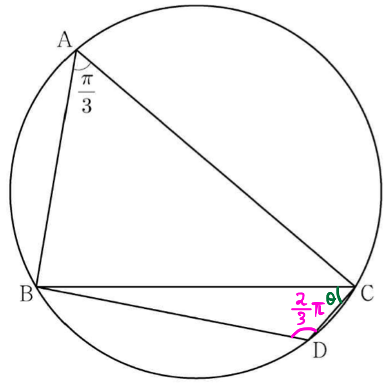
9. [문항코드]

반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD} + \overline{CD}$의 값은?



[4점]

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



$\triangle ABC \longrightarrow \dfrac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2\cdot 2\sqrt{7}$

$\longrightarrow \overline{BC} = 2\sqrt{21}.$

$\triangle BCD \longrightarrow \dfrac{\overline{BD}}{\sin\theta} = 2\cdot 2\sqrt{7}$

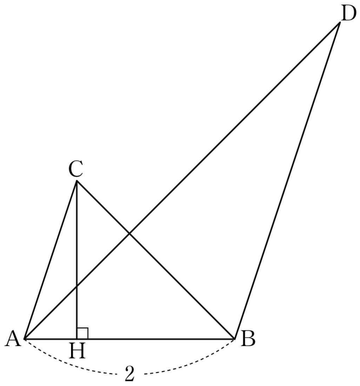
$\longrightarrow \overline{BD} = 8$

$\triangle BCD \longrightarrow \cos\frac{2}{3}\pi = \dfrac{\overline{CD}^2 + 8^2 - (2\sqrt{21})^2}{2\cdot\overline{CD}\cdot 8}$

$\longrightarrow \overline{CD} = 2.$ ②

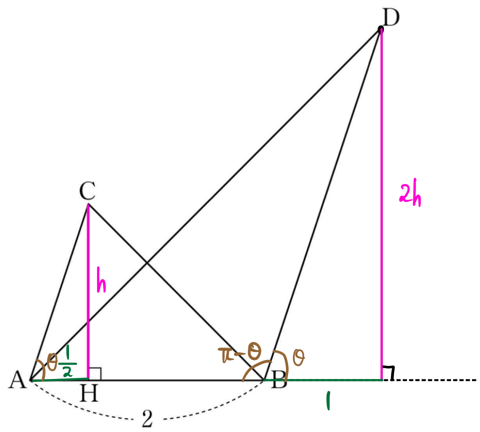
8. [문항코드]

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC} /\!/ \overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times sin^2(\angle CAB)=51$이다. $\overline{AC}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle CAB < \frac{\pi}{2}$)

[4점]



$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2r$, $\frac{\overline{AD}}{\sin(\pi-\theta)}=2R$.

$51=\overline{AD}^2-\overline{BC}^2$

$=(4h^2+9)-\left(h^2+\frac{9}{4}\right)$

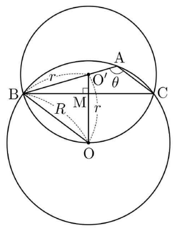
$=3h^2+\frac{27}{4} \longrightarrow h^2=\frac{59}{4}$

$\longrightarrow \overline{AC}^2=15.$

15

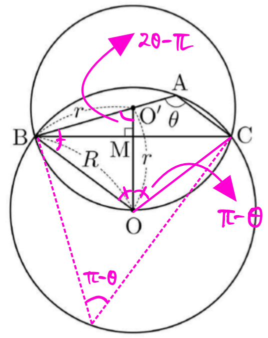
2. [문항코드]

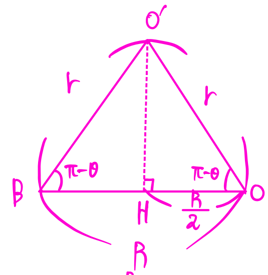
$\angle \mathrm{BAC}=\theta\left(\frac{2}{3}\pi \le \theta < \frac{3}{4}\right)$인 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 세 점 B, O, C를 지나는 원의 중심을 O′이라 하자. 다음은 점 O′이 선분 AB위에 있을 때, $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$의 값을 θ에 대한 식으로 나타내는 과정이다.

> 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여
>
> $$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=2\mathrm{R}$$
>
> 
>
>
> 세 점 B, O, C를 지나는 원의 반지름의 길이를 r라 하자.
>
> 선분 O′O는 선분 BC를 수직이등분하므로 이 두 선분의 교점을 M이라 하면
>
> $$\overline{\mathrm{O'M}}=\mathrm{r}-\overline{\mathrm{OM}}=\mathrm{r}-|\mathrm{R}\cos\theta|$$
>
> 직각삼각형 O′BM에서 $R=$ $\boxed{(가)}$ $\times r$이므로
>
> $$\sin(\angle \mathrm{O'BM})=\boxed{(나)}$$
>
> 따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
>
> $$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\boxed{(다)}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$라 하자. $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$인 α, β에 대하여 $f(\alpha)+g(\beta)+\left\{h\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

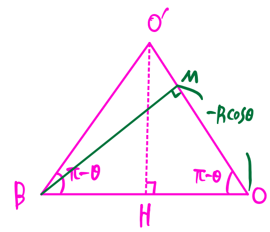
[4점]





$\cos(\pi-\theta)=\frac{\frac{R}{2}}{r}=-\cos\theta$

$\rightarrow f(\theta)=-2\cos\theta.$



$\sin(\angle O'BM)=\frac{\overline{O'M}}{\overline{O'B}}$

$=\frac{r+R\cos\theta}{r}$

$=\frac{r-2r\cos^2\theta}{r}$

$=1-2\cos^2\theta$

$=g(\theta).$

$\triangle ABC \rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{2R\sin(\angle BAC)}{2R\sin(\angle ABC)}$

$=\frac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$

$=h(\theta)$

$f(\alpha)=\frac{6}{5},\ g(\beta)=\frac{1}{5},\ h\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\sqrt{3}.$ 27