출제 및 해설 : 띵수학 연구실 (정다움, 양민석, 김서천)

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	⑤	12	①	23	③	23	④	*	*
2	⑤	13	③	24	②	24	⑤	*	*
3	②	14	④	25	⑤	25	①	*	*
4	①	15	⑤	26	④	26	②	*	*
5	④	16	2	27	①	27	③	*	*
6	④	17	18	28	②	28	①	*	*
7	③	18	20	29	151	29	8	*	*
8	②	19	33	30	76	30	28	*	*
9	①	20	162						
10	④	21	119						
11	③	22	56						

공통과목

1. 정답) ⑤ [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : $\left(\dfrac{2^{\sqrt{3}}}{2^{2-\sqrt{3}}}\right)^{\sqrt{3}+1}=2^{(2\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+1)}=2^4=16$

2. 정답) ⑤ [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속]

해설 : $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x}}{x-3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x}\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x}\right)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{(x-3)\left(\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x}\right)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{x}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 정답) ② [수학Ⅰ - 삼각함수]

해설 : $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}=3$에서 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$이고

$\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$, $\sin\theta<0$이다.

$\tan\theta=\dfrac{1}{3}=\dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt{10}}}{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서 $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$이다.

4. 정답) ① [수학Ⅱ - 적분]

해설 : $g'(x)=f'(x)$의 양변을 부정적분하면

$g(x)=f(x)+C$ (C는 적분상수)

$=x^3+2x+C$

$f(1)=g(2)$에서

$3=12+C$, $C=-9$이다.

$g(1)=f(1)-9=-6$

5. 정답) ④ [수학Ⅰ - 수열]

해설 : 등차중항의 성질에 의해

$a_n-a_{n+1}+a_{n+2}=2a_{n+1}-a_{n+1}=a_{n+1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{5}(a_n - a_{n+1} + a_{n+2}) = \sum_{n=1}^{5} a_{n+1}$$
$$= a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$
$$= 5a_4 = 30$$

즉, $a_4 = 6$이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 할 때,

$a_4 - a_1 = 3d = 4$에서 $d = \frac{4}{3}$이다.

$a_4 \times a_5 = 6 \times \frac{22}{3} = 44$

6. 정답) ④ [수학Ⅱ - 미분]

해설 : 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

실수 전체의 집합에서 연속이고,

$\lim_{x \to 0-} g(x) = g(0) = \lim_{x \to 0+} g(x)$이다.

즉, $10 = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x}$이므로 $f(0) = 0$, $f'(0) = 10$에서

$f(x) = ax^2 + 10x\,(a \neq 0)$이다.

함수 $g(x) = \begin{cases} ax + 10 & (x > 0) \\ 3(x+2)^2 - 2 & (x \le 0) \end{cases}$

이 $x = 0$에서 미분가능하므로

$\lim_{h \to 0+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$이고

$a = 12$이다.

따라서 $f(x) = 12x^2 + 10x$이고 $f(-2) = 48 - 20 = 28$이다.

7. 정답) ③ [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : $a \ge 0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x = 2$에서 최댓값을 가지므로

$f(2) = 2^{2a+2} - 3 = 6$에서 $2^{2a} = \frac{9}{4}$, $a = \log_2 \frac{3}{2}$이다.

$a < 0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x = -1$에서 최댓값을 가지므로

$f(-1) = 2^{-a+2} - 3 = 6$에서 $2^{-a} = \frac{9}{4}$, $a = \log_2 \frac{4}{9}$이다.

모든 a의 값의 합은 $\log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{9} = \log_2\left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{9}\right) = \log_2 \frac{2}{3}$이다.

8. 정답) ② [수학Ⅱ - 미분]

해설 : 함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 1$의 도함수 $f'(x)$가

$f'(x) = x^2 - 3x + 1$이므로

점 $\mathrm{A}(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는 -1이다.

이에 따라 점 B에서의 접선의 기울기는 1이고

$f'(x) = x^2 - 3x + 1 = 1$에서 $x = 0$ 또는 $x = 3$이므로

점 B의 x좌표는 0 또는 3이다.

$f(1) = \frac{5}{6}$에서 $\mathrm{A}\left(1, \frac{5}{6}\right)$이고

$\mathrm{B}(0, 1)$일 때, 직선 AB의 기울기는 $-\frac{1}{6}$이다.

$\mathrm{B}\left(3, -\frac{1}{2}\right)$일 때, 직선 AB의 기울기는 $-\frac{2}{3}$이다.

따라서 직선 AB의 기울기의 최솟값은 $-\frac{2}{3}$이다.

9. 정답) ① [수학Ⅰ - 수열]

해설 : $n = 1$일 때, $|a_2 - a_1| = a_2 + 2$에서 $a_1 = 2$이므로 $a_2 = 0$이다.

$n \ge 2$일 때, $|a_{n+1} - a_n| = \sum_{k=1}^{n}|a_{k+1} - a_k| - \sum_{k=1}^{n-1}|a_{k+1} - a_k|$

$= a_{n+1} - a_n + 2n$

에서 $a_{n+1} - a_n = -n$이다.

$a_9 = a_2 + \sum_{n=2}^{8}(a_{n+1} - a_n) = 0 - \sum_{n=2}^{8} n = -\sum_{n=1}^{8} n + 1 = -35$

10. 정답) ④ [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속]

해설 : 조건 (가)에서 $f(x) = x^2 - 1$ 또는 $f(x) = -x^2 + 1$이고

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

각 구간 $(-\infty, -1]$, $(-1, 1)$, $[1, \infty)$ 내에서 $f(x)$의 함수식은

동일하다.

조건 (나)에서 $f(-2) < g(0) < g(2)$이므로

$f(-2) = -3$, $g(0) = -1$, $g(2) = 1$이고

구간 $(-\infty, 1)$에서 $f(x) = -x^2 + 1$

구간 $[1, \infty)$에서 $f(x) = x^2 - 1$이다.

$f(-2) + f(0) + f(3) = -3 + 1 + 8 = 6$

11. 정답) ③ [수학Ⅰ - 삼각함수]

해설 : 조건 (가)에서 $f(1) = a\cos b\pi = 2$, $g(1) = b\cos\pi + a + b = a = 2$

이므로 $a = 2$, $\cos b\pi = 1$이다.

이때, $\cos b\pi = 1$에서 $b = 2, 4, 6, \cdots$이다.

조건 (나)에서

$M=2b+a=2b+2,\ m=-a=-2$이고

$4a<M-m<8a \Leftrightarrow 8<2b+4<16$에서

$2<b<6$이므로 $b=4$이다.

$a+b=2+4=6$

12. 정답) ① [수학Ⅱ - 미분]

해설 : $f(0)=0$과 조건 (가)에서

$x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+3x\ge 0$이므로

함수 $f(x)+3x$의 $x=0$에서의 미분계수는 0 이상이고,

$(f(x)+3x)'=f'(x)+3$에서 $f'(0)\ge -3$이다.

조건 (나)에서 $x<0$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x)\le f(-1)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고 $f'(-1)=0$이다.

$f(0)=0$에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx$라 둘 때,

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이고,

$f'(0)\ge -3$에서 $b\ge -3$이고

$f'(-1)=3-2a+b=0$에서 $a=\dfrac{b+3}{2}$이다.

$f(1)=1+a+b=\dfrac{3}{2}b+\dfrac{5}{2}$고

$b\ge -3$에서 $f(1)\ge -2$이므로 $f(1)$의 최솟값은 -2이다.

13. 정답) ③ [수학Ⅰ - 수열]

해설 : $n=5$일 때, $a_6=\begin{cases} a_5-2^5 & (a_5>0) \\ a_5+5^2 & (a_5\le 0)\end{cases}$이므로

$a_5=50$ 또는 $a_5=-7$이다.

$a_5=50$일 때, 가능한 a_1 ~ a_4의 값은 아래표와 같다.

a_4	66
a_3	74
a_2	78
a_1	80

이때, $a_2\times a_3\le 0$을 만족시키지 않는다.

$a_5=-7$일 때, 가능한 a_1 ~ a_4의 값은 아래표와 같다.

a_4	9			-23
a_3	17	0		-32
a_2	21	4	-4	-36
a_1	23	6	-5	-37

이때, $a_2\times a_3\le 0$을 만족시키는 경우의 a_1의 값은 -5 또는 6이고

$(-5)\times 6=-30$이다.

14. 정답) ④ [수학Ⅱ - 적분]

해설 : $v(t)=(at-2)(t-2)=at^2-(2a+2)t+4$에서

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3 v(t)\,dt=\left[\frac{a}{3}t^3-(a+1)t^2+4t\right]_1^3$$

$$=\frac{26}{3}a-8(a+1)+8=\frac{2}{3}a$$

이다. 시각 $t=2$에서 $t=3$까지 점 P의 움직인 거리는

(1) $0<a\le\dfrac{2}{3}$일 때,

$$\int_2^3 |v(t)|\,dt=\left[-\frac{a}{3}t^3+(a+1)t^2-4t\right]_2^3$$

$$=-\frac{19}{3}a+5(a+1)-4=-\frac{4}{3}a+1$$

이고 조건 (나)에 의해 $\dfrac{2}{3}a=-\dfrac{4}{3}a+1,\ a=\dfrac{1}{2}$이다.

(2) $\dfrac{2}{3}<a<1$일 때,

$v\left(\dfrac{2}{a}\right)=0$에서 시각 $t=\dfrac{2}{a}$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸고

$2<\dfrac{2}{a}<3$이므로 조건 (가)에 모순이다.

(3) $a\ge 1$일 때,

$$\int_2^3 |v(t)|\,dt=\left[\frac{a}{3}t^3-(a+1)t^2+4t\right]_2^3$$

$$=\frac{19}{3}a-5(a+1)+4=\frac{4}{3}a-1$$

이고 조건 (나)에 의해 $\dfrac{2}{3}a=\dfrac{4}{3}a-1,\ a=\dfrac{3}{2}$이다.

(1), (2), (3)에서

(ⅰ) $v(t)=\left(\dfrac{1}{2}t-2\right)(t-2)=\dfrac{1}{2}t^2-3t+4$ 또는

(ii) $v(t)=\left(\frac{3}{2}t-2\right)(t-2)=\frac{3}{2}t^2-5t+4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리는

(i) $\int_0^1\left|\frac{1}{2}t^2-3t+4\right|dt=\int_0^1\left(\frac{1}{2}t^2-3t+4\right)dt$

$=\left[\frac{1}{6}t^3-\frac{3}{2}t^2+4t\right]_0^1$

$=\frac{8}{3}$

(ii) $\int_0^1\left|\frac{3}{2}t^2-5t+4\right|dt=\int_0^1\left(\frac{3}{2}t^2-5t+4\right)dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_0^1$

$=2$

이므로 최댓값은 $\frac{8}{3}$이다.

15. 정답) ⑤ [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : $k>1$이므로

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 교점을 갖고

교점의 x좌표에서 함수 $h(x)=|f(x)-g(x)|$는 최솟값 0을 갖는다.

이때, 조건 (가)에 의해 $h(0)=0$이고

$h(0)=|f(0)-g(0)|$

$=|a^{-1}+1+a^0-k|=|a^{-1}+2-k|=0$

에서 $k=a^{-1}+2$이다. …… ㉠

$x<0$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $h(x)=g(x)-f(x)$이므로

구간 $(0,\infty)$에서 $h(x)$는 감소함수이고 $0<h(x)<k-1$이다.

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$이므로

구간 $(0,\infty)$에서 $h(x)$는 증가함수이고 $h(x)>0$이다.

즉, 방정식 $h(x)=h(t)$가 오직 하나의 실근만을 가질 때,

$h(t)\geq k-1$이고, 조건 (나)에 의해 $h(1)=k-1$이다.

$h(1)=|f(1)-g(1)|$

$=f(1)-g(1)$

$=a^2+1+a-k$

$=k-1$

에서 $k=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a+1$이다. …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\frac{1}{a}+2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a+1$

$a^3+a^2-2a-2=0$

$(a+1)(a^2-2)=0$

$a>1$이므로 $a=\sqrt{2}$, $k=\frac{\sqrt{2}}{2}+2$이다.

$a+k=\frac{4+3\sqrt{2}}{2}$

16. 정답) 2 [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : $\log_3 45-\frac{\log_2 5}{\log_2 3}=\log_3 45-\log_3 5=\log_3 9=2$

17. 정답) 18 [수학Ⅱ - 미분]

해설 : 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 최소이므로 $x=-1$에서 극소이다.

$f'(x)=8x^3+a$에서

$f'(-1)=-8+a=0$, $a=8$이다.

$f(-1)=2-8+b=2$, $b=8$이다.

$f(x)=2x^4+8x+8$이므로 $f(1)=2+8+8=18$이다.

18. 정답) 20 [수학Ⅰ - 수열]

해설 : 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 할 때,

$a_6-a_2=a_4+a_6-(a_2+a_4)$

$=(a_1+a_3)\times r^3-(a_1+a_3)\times r$

$=2r^3-2r=\frac{3}{4}$

에서 $8r^3-8r-3=(2r+1)(4r^2-2r-3)=0$이고

r은 유리수이므로 $r=-\frac{1}{2}$이다.

$a_1+a_3=a_1(1+r^2)=\frac{5}{4}a_1=2$에서

$a_1=\frac{8}{5}$, $a_n=\frac{8}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

$\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_7}=(-20)+40=20$

19. 정답) 33 [수학Ⅱ - 적분]

해설 : $\int_{-2}^{2}(t-1)f(t)\,dt=k$라 할 때, $f(x)=kx^2+2$이다.

$$\int_{-2}^{2}(t-1)f(t)dt$$

$$=\int_{-2}^{2}(t-1)(kt^2+2)dt$$

$$=\int_{-2}^{2}(kt^3-kt^2+2t-2)dt$$

$$=-2k\times\int_0^2 t^2dt-4\int_0^2 1dt$$

$$=-2k\times\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2-4\times[t]_0^2=-\frac{16}{3}k-8=k$$

$\frac{19}{3}k=-8$에서

$k=-\frac{24}{19}$, $f(x)=-\frac{24}{19}x^2+2$이다.

$f(1)=\frac{14}{19}$이고 $p=19$, $q=14$이고 $p+q=33$이다.

20. 정답) 162 [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속]

해설 : 극한 $\lim_{x\to0}\frac{f(x-a)}{x}$가 실수 S로 수렴하므로 $f(-a)=0$이다.

$f(-a)=(-2-a)\{(-a)^3+a\}=(a+2)a(a-1)(a+1)=0$에서

$a=-2$일 때,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x+2)}{x}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^3-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(x^3-2)$$

$$=6$$

이므로 $S=6$이다.

$a=-1$일 때,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x+1)}{x}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x^3-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x-2)(x^2+x+1)$$

$$=-3$$

이므로 $S=-3$이다.

$a=0$일 때,

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(x-2)x^3}{x}=\lim_{x\to0}(x-2)x^2=0$이므로 $S\neq0$에

모순이다.

$a=1$일 때,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x-1)}{x}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x-2)(x^3+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}(x-2)(x^2-x+1)$$

$$=-9$$

이므로 $S=-9$이다.

모든 S의 값의 곱은 $6\times(-3)\times(-9)=162$이다.

21. 정답) 119 [수학Ⅰ - 삼각함수]

해설 : 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2=4^2+5^2-2\times4\times5\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=21$$

에서 $\overline{BC}=\sqrt{21}$이다.

삼각형 AMC에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{MC}^2=2^2+5^2-2\times2\times5\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=19$$

에서 $\overline{MC}=\sqrt{19}$이다.

두 삼각형 AMC, BMC의 넓이가 같으므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AM}\times\overline{AC}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\overline{MC}\times\overline{BC}\times\sin(\angle BCM)$에서

$\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{19}\times\sqrt{21}}{2}\times\sin(\angle BCM)$이고

$\sin(\angle BCM)=\frac{5}{\sqrt{7}\times\sqrt{19}}$이다.

원주각의 성질에 의해 $\angle BDC=\pi-\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$이고

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}=\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BDC)}$에서

$\angle BCM=\angle BCD$이므로

$\frac{\overline{BD}}{\frac{5}{\sqrt{7}\times\sqrt{19}}}=\frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$이고

$\overline{BD}=\frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{5}{\sqrt{7}\times\sqrt{19}}=\frac{10}{\sqrt{19}}$이다.

$\overline{\mathrm{BD}}^2=\frac{100}{19}$에서 $p=19,\ q=100,\ p+q=119$이다.

22. 정답 : 56 [수학Ⅱ - 미분]

해설 : 조건 (가)에서

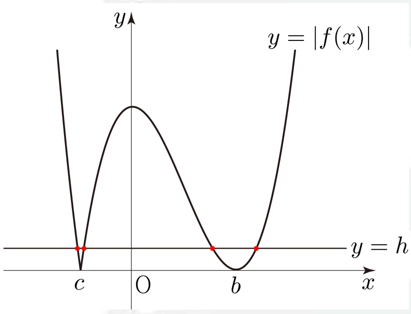
$t\to\infty$일 때, 방정식 $|f(x)|=\frac{4}{f(t)}$의 실근이 존재하므로

$\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$이고, $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.

$t\to\infty$일 때, $\frac{4}{f(t)}\to 0+$이고, $\lim_{t\to\infty}g(t)=4$이므로

0 근방의 양수 h에 대하여

방정식 $|f(x)|=h$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



이에 따라 곡선 $y=f(x)$는 x축에 접하고,

$f(x)=k(x-b)^2(x-c)\,(k>0)$라 둘 수 있다.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이므로 $b>0$이고

$f'(0)=k(0-b)^2+2k(0-b)(0-c)$

$\quad=kb(b+2c)=0$

에서 $b=-2c,\ f(x)=k(x+2c)^2(x-c)$이다.

이때, $x=0$에서 극댓값 2를 가지므로

$f(x)=kx^2(x-d)+2$라 둘 수 있고

계수비교법에 의해 $d=-3c,\ f(x)=kx^2(x+3c)+2$이다.

방정식 $f(t)\times|f(x)|=4$의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$는

$\frac{4}{f(t)}<0$ 또는 $f(t)=0$일 때, $g(t)=0$

$0<\frac{4}{f(t)}<2$일 때, $g(t)=4$

$\frac{4}{f(t)}=2$일 때, $g(t)=3$

$\frac{4}{f(t)}>2$일 때, $g(t)=2$이다.

즉, $g(t)$는 $f(t)=0$ 또는 $f(t)=2$인 t에서만 불연속이다.

(ⅰ) $f(t)=0$일 때

$t=-2c$ 또는 $t=c$이고

$\lim_{t\to-2c+}g(t)=\lim_{t\to-2c-}g(t)=2$이므로 $\lim_{t\to-2c}g(t)=2$

$\lim_{t\to c+}g(t)=2,\ \lim_{t\to c-}g(t)=0$이므로 $\lim_{t\to c}g(t)$는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $f(t)=2$일 때

$t=0$ 또는 $t=-3c$이고

$\lim_{t\to0+}g(t)=\lim_{t\to0-}g(t)=2$이므로 $\lim_{t\to0}g(t)=2$

$\lim_{t\to-3c+}g(t)=4,\ \lim_{t\to-3c-}g(t)=2$이므로 $\lim_{t\to-3c}g(t)$는 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 따라 $\lim_{t\to a}g(t)$의 값이 존재하지 않는 모든 실수 a의 값의 합은 $c-3c=-2c$이고 조건 (나)에 의해

$-2c=2$에서 $c=-1$이다.

즉, $f(x)=k(x-2)^2(x+1)$이고

$f(0)=4k=2$에서 $k=\frac{1}{2}$이다.

$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x+1)$이고 $f(6)=56$이다.

확률과 통계

23. 정답) ③ [확률과 통계 - 경우의 수]

해설 : $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r\times(2x)^r\times\left(\frac{1}{x}\right)^{6-r}={}_6\mathrm{C}_r\times2^r\times x^{2r-6}$이므로

$r=3$일 때 상수항이고

${}_6\mathrm{C}_3\times2^3=20\times8=160$

24. 정답) ② [확률과 통계 - 확률]

해설 : $\mathrm{P}(A^C\cup B)=\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\{1-\mathrm{P}(A)\}+\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$

$= \frac{7}{12}$

25. 정답) ⑤ [확률과 통계 - 통계]

해설 : 이 고등학교 학생들의 등교시간을 확률변수 X라 하면

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(45, 6^2)$을 따른다.

이 고등학교 학생들을 대상으로 16명을 임의추출하여 조사한

등교시간을 확률변수 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}(X)$, $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{16}}$ 이므로

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(45, \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X} \geq 42) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{42-45}{\frac{3}{2}}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \geq -2)$$
$$= \mathrm{P}(Z \geq 0) + \mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 0)$$
$$= 0.5 + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)$$
$$= 0.9772$$

26. 정답) ④ [확률과 통계 - 경우의 수]

해설 : (i) 양 끝에 X, X가 오는 경우

x, x, x, y, y, Y를 나열하는 경우의 수를 구하면

$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$

(ii) 양 끝에 X, Y가 오는 경우

왼쪽 끝에 X, 오른쪽 끝에 Y가 놓인다고 하자.

왼쪽에서 두 번째 자리에는 X가 놓일 수 없으므로

왼쪽 끝에 놓이지 않은 대문자 X의 자리를 정하는

방법의 수는 5

x, x, x, y, y를 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$

따라서 (ii)이면서 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$2 \times 5 \times 10 = 100$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $60 + 100 = 160$

27. 정답) ① [확률과 통계 - 통계]

해설 : $g(0) = \frac{1}{3} + k$, $g(1) = k$, $g(2) = \frac{1}{3} + k$이고

함수 $g(x)$가 확률변수 Y의 확률밀도함수가 되려면

함수 $y = g(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x = 2$로 둘러싸인

부분의 넓이가 1이 되어야 하므로

$2 \times \left\{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} + 2k\right) \times 1\right\} = 1$에서 $k = \frac{1}{3}$이다.

$$\mathrm{P}(k \leq X \leq k+1) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{4}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9}\right)$$
$$= \frac{5}{18}$$

28. 정답) ② [확률과 통계 - 확률]

해설 : 주머니 A에서 꺼낸 3개의 공 중 흰 공의 개수를 a,

검은 공의 개수를 b라 할 때, 모든 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$이다.

순서쌍 (a, b)가 $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$일 확률을 각각 구하면

$(1, 2)$일 확률은 $\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3} = \frac{1}{5}$,

$(2, 1)$일 확률은 $\frac{{}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3} = \frac{3}{5}$,

$(3, 0)$일 확률은 $\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3} = \frac{1}{5}$이다.

주머니 B에는 여섯 개의 공이 들어 있었고, 주머니 A에서 3개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 뒤 주머니 B에서 2개의 공을 꺼내는 시행을 하면, 주머니 B에 남은 흰 공과 검은 공의 개수의 합은 항상 7이다.

이때, 주머니 B에 남아 있는 흰 공의 개수를 c,

검은 공의 개수를 d라 할 때, 모든 순서쌍 (c, d)는

$(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$

이고 $|c-d| \geq 3$을 만족하는 경우는

$(2, 5)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$의 세 경우이다.

순서쌍 (a, b)에 따라 경우를 나누어 살펴보자.

(i) (a, b)가 $(1, 2)$인 경우

주머니 A에서 3개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣었을 때, 주머니 B에 들어 있는 흰 공의 개수는 4, 검은 공의 개수는 5이다.

이때, $|c-d| \geq 3$을 만족하는 경우 중 가능한 순서쌍 (c, d)는 $(2, 5)$ 뿐이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{5} \times \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \frac{1}{30}$

(ii) (a, b)가 $(2, 1)$인 경우

주머니 A에서 3개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣었을 때,
주머니 B에 들어 있는 흰 공의 개수는 5,
검은 공의 개수는 4이다.
이때, $|c-d| \geq 3$을 만족하는 경우 중 가능한 순서쌍 $(c,\ d)$는 $(5,\ 2)$ 뿐이므로 구하는 확률은

$$\frac{3}{5} \times \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \frac{1}{10}$$

(iii) $(a,\ b)$가 $(3,\ 0)$인 경우
주머니 A에서 3개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣었을 때,
주머니 B에 들어 있는 흰 공의 개수는 6,
검은 공의 개수는 3이다.
이때, $|c-d| \geq 3$을 만족하는 경우 중 가능한 순서쌍 $(c,\ d)$는 $(5,\ 2)$ 또는 $(6,\ 1)$이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{5} \times \left(\frac{{}_6\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2} + \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} \right) = \frac{7}{60}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주머니 B에 남아 있는 흰 공의 개수와 검은 공의 개수의 차가 3 이상일 확률은

$\frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{7}{60} = \frac{1}{4}$이고

이 중에서 주머니 A에서 검은 공을 꺼낸 경우는 (i), (ii)이므로

구하는 조건부확률은 $\dfrac{\frac{1}{30} + \frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{15}$

29. 정답) 151 [확률과 통계 - 통계]

해설 : 주사위를 한 번 던질 때 나온 눈의 수가
6의 약수일 확률은 $\frac{2}{3}$, 6의 약수가 아닐 확률은 $\frac{1}{3}$이다.
주사위를 12번 던질 때 나온 눈의 수가 6의 약수인 횟수를 확률변수 Y라 하면 나온 눈의 수가 6의 약수가 아닌 횟수는 $12-Y$이다.
이때, 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(12,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로
$\mathrm{E}(Y)=8,\ \mathrm{V}(Y)=\frac{8}{3}$이다.
시행을 12번 반복한 이후 상자에는
숫자 1이 적힌 공 Y개와
숫자 2가 적힌 공 $12-Y$개가 들어 있으므로
12개의 수의 평균은

$$X = \frac{Y+2(12-Y)}{12} = 2 - \frac{Y}{12}$$

따라서 $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\left(2-\frac{Y}{12}\right) = 2 - \frac{1}{12} \times \mathrm{E}(X) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$\mathrm{V}(X) = \mathrm{V}\left(2-\frac{Y}{12}\right) = \frac{1}{12^2} \times \mathrm{V}(Y) = \frac{1}{12 \times 12} \times \frac{8}{3} = \frac{1}{54}$

$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{V}(X) + \{\mathrm{E}(X)\}^2 = \frac{1}{54} + \frac{16}{9} = \frac{97}{54}$$

따라서 $p=54,\ q=97$이므로 $p+q=151$이다.

30. 정답) 76 [확률과 통계 - 경우의 수]

해설 : 조건 (가)에 의해
$f(1)$이 홀수이면 $f(3),\ f(5)$는 홀수이고
$f(2),\ f(4)$는 짝수이다.
$f(1)$이 짝수이면 $f(3),\ f(5)$는 짝수이고
$f(2),\ f(4)$는 홀수이다.
$f(1)$이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 경우를 나누어 함수 f의 개수를 구하자.

(i) $f(1)$이 홀수인 경우
$f(1),\ f(3),\ f(5)$는 중복을 허락하여
1, 3, 5 중 하나이고
조건 (나)에 의하여
${}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10$
$f(2),\ f(4)$는 중복을 허락하여 2, 4 중 하나이므로
$2^2=4$
따라서 (i)의 경우 주어진 조건을 모두 만족시키는
함수 f의 개수는
$10 \times 4 = 40$

(ii) $f(1)$이 짝수인 경우
$f(1),\ f(3),\ f(5)$는 중복을 허락하여
2, 4 중 하나이고
조건 (나)에 의하여
${}_2\mathrm{H}_3 = {}_4\mathrm{C}_3 = 4$
$f(2),\ f(4)$는 중복을 허락하여 1, 3, 5 중 하나이므로
$3^2=9$
따라서 (ii)의 경우 주어진 조건을 모두 만족시키는
함수 f의 개수는
$4 \times 9 = 36$

(i), (ii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는
$40+36=76$

미적분

23. 정답) ④ [미적분 - 미분법]

해설 : $f'(x) = 2e^{2x} + e^{-x}$에서 $f'(0) = 2+1 = 3$

24. 정답) ⑤ [미적분 - 적분법]

해설 : $\cos x = t$로 치환하면 $-\sin x = \frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{1}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=-\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t^3}dt$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{-3}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}t^{-2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=-\frac{1}{2}+2$$
$$=\frac{3}{2}$$

25. 정답) ① [미적분 - 수열의 극한]

해설 : 양수 a와 3의 대소에 따라 경우를 나누어 살펴보자.

(ⅰ) $a>3$인 경우

$0<\frac{3}{a}<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 3^n+b\times 2^n}{a^n+b\times 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\times\left(\frac{3}{a}\right)^n+b\times\left(\frac{2}{a}\right)^n}{1+b\times\left(\frac{3}{a}\right)^n}=0$$

에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $0<a<3$인 경우

$0<\frac{a}{3}<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 3^n+b\times 2^n}{a^n+b\times 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+b\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{a}{3}\right)^n+b}=\frac{a}{b}$$

이고 $\frac{a}{b}=1$, 곧 $a=b$이므로 $a>b$를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $a=3$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 3^n+b\times 2^n}{a^n+b\times 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 3^n+b\times 2^n}{3^n+b\times 3^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+b\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+b}$$
$$=\frac{3}{1+b}$$

$\frac{3}{1+b}=3$에서 $b=2$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$$

26. 정답) ② [미적분 - 미분법]

해설 : $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$이므로 함수 $f(x)$는

최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로

θ의 값에 관계 없이 최솟값을 갖는다.

$$f(x)=\sin\theta\left(x^2+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}x\right)$$
$$=\sin\theta\left(x+\frac{\cos^2\theta}{2\sin\theta}\right)^2-\frac{\cos^4\theta}{4\sin\theta}$$

따라서 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 모든 실수 θ에 대하여

$g(\theta)=-\frac{\cos^2\theta}{2\sin\theta}$, $h(\theta)=-\frac{\cos^4\theta}{4\sin\theta}$이고

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{2h(\theta)-g(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\times\left(-\frac{\cos^4\theta}{4\sin\theta}\right)-\left(-\frac{\cos^2\theta}{2\sin\theta}\right)}{\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\cos^2\theta-\cos^4\theta}{\theta\times 2\sin\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\theta\times 2\sin\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\cos^2\theta\times\sin^2\theta}{\theta\times 2\sin\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\cos^2\theta\times\sin\theta}{2\theta}$$
$$=\frac{1}{2}$$

27. 정답) ③ [미적분 - 적분법]

해설 : $1\le k\le n$인 자연수 k에 대하여 $x_k=2+\frac{2}{n}k$이고

$f(x)=1+\ln x$이므로 $f'(x)=\frac{1}{x}$이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x_k, f(x_k))$에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{x_k}(x-x_k)+1+\ln x_k$이므로

이 직선의 x절편은 $a_k=-x_k\ln x_k$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(2+\frac{2}{n}k\right)\ln\left(2+\frac{2}{n}k\right)\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(2+\frac{2}{n}k\right)\ln\left(2+\frac{2}{n}k\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_2^4 (x\ln x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\times\left\{\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_2^4 - \int_2^4 \frac{1}{2}x\,dx\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\times\left\{(8\ln 4 - 2\ln 2) - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_2^4\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\times\{14\ln 2 - (4-1)\}$$

$$= \frac{3}{2} - 7\ln 2$$

28. 정답) ① [미적분 - 미분법]

해설 : 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 정의되었으므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

$g'(x)=\dfrac{f(x)-(x-a)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$에서

$h(x)=f(x)-(x-a)f'(x)$라 하면

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고

도함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 2인 일차함수이므로

함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 이차함수이다.

이때, $h(a)=f(a)>0$이므로 이차방정식 $h(x)=0$은

서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 $h(x)=-(x-\alpha)(x-\beta)$로 나타낼 수 있다.

$g'(\alpha)=g'(\beta)=0$이고

$x=\alpha$에서 $g'(x)$의 부호는 $(-)$에서 $(+)$로 바뀌므로

함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이고

$x=\beta$에서 $g'(x)$의 부호는 $(+)$에서 $(-)$로 바뀌므로

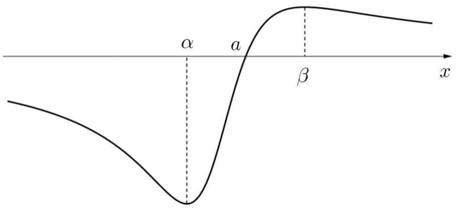
함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극대이다.

한편, 방정식 $g(x)=0$은 유일한 실근 a를 갖고,

$x<a$에서 $g(x)<0$, $x>a$에서 $g(x)>0$,

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



x에 대한 방정식 $g(x)=g(t)$의 서로 다른 실근의 개수는

모든 실수 t에 대하여 1 또는 2이므로

서로 다른 실근의 개수가 홀수이면 그 개수는 1이고

방정식 $g(x)=g(t)$의 실근의 개수가 1이 되도록 하는

모든 실수 t의 값은 α, β, a이다.

이때, $\alpha<a<\beta$이고 $a>0$이므로

$\alpha+\beta+a=6$, $\alpha\times\beta\times a=0$을 만족시키기 위해

$\alpha=0$, $\beta=6-a$이다.

$h(x)=f(x)-(x-a)f'(x)=-x(x+a-6)$에서

$f(x)=x^2+bx+c$라 하고 양변을 비교하자.

$f'(x)=2x+b$이므로

$(x^2+bx+c)-(x-a)(2x+b)=-x^2-ax+6x$

$(x^2+bx+c)-(2x^2-2ax+bx-ab)=-x^2-ax+6x$

$-x^2+2ax+c+ab=-x^2-ax+6x$에서

$2a=-a+6$, $c=-ab$이므로

$a=2$, $c=-2b$에서 $f(x)=x^2+bx-2b$

이때, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로

이차방정식 $x^2+bx-2b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2+8b<0$, 곧 $-8<b<0$

$f'(x)=2x+b$에서 $f'(1)=2+b$이고

$|2+b|=3$에서 $b=-5$

따라서 $f(x)=x^2-5x+10$이고 $f(3)=4$

29. 정답) 8 [미적분 - 수열의 극한]

해설 : 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 모두 d이므로

$a_n=nd$, $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}d$이다.

$b_n=\dfrac{(n+3)a_n}{S_n}$이라 하자.

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)a_n}{S_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)\times nd}{\frac{n(n+1)}{2}d}$$

$$=2$$

이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(n+3)a_n}{S_n}-\frac{(n+4)a_{n+1}}{S_{n+1}}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\cdots+(b_n-b_{n+1})\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(b_1-b_{n+1})$$

$$=b_1-2\ \left(\because \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=2\right)$$

$$= \frac{(1+3)a_1}{S_1} - 2$$

$$= 4 - 2$$

$$= 2$$

$$S_{n+2} = \frac{(n+2)(n+3)}{2} d$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_{n+2}} = \frac{2}{d} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{2}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$= \frac{2}{3d}$$

에서 $\frac{2}{3d} = 2$이므로 $d = \frac{1}{3}$, $a_n = \frac{n}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{3n+2} a_{3n+5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{3n+2}{3} \times \frac{3n+5}{3}}$$

$$= 9 \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$$

$$= 3 \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5} \right)$$

$$= \frac{3}{5}$$

$p=5$, $q=3$이므로 $p+q=8$

30. 정답) 28 **[미적분 - 적분법]**

해설 : 양수 t에 대하여 두 곡선 $y=\sin x$, $y=t\cos x$가

$0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하면

$\sin f(t) = t \cos f(t)$에서

$\tan f(t) = t$ ⋯ ㉠

$$S(t) = \int_0^{f(t)} (t\cos x - \sin x)\, dx$$

$$= \Big[t\sin x + \cos x \Big]_0^{f(t)}$$

$$= t\sin f(t) + \cos f(t) - 1 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠에서 $\sin f(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, $\cos f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$이므로

㉡에서

$$S(t) = \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} - 1$$

$$= \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+1}} - 1$$

$$= \sqrt{t^2+1} - 1$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} t\,S(t)\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} \left(t\sqrt{t^2+1} - t \right) dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}t^2 \right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{3}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$p = \frac{5}{3}$, $q = -\frac{2}{3}$이므로 $12(p-q) = 12 \times \frac{7}{3} = 28$