SEASON 2024

5 주차

지수/로그함수와 좌표 세팅

SEOL:NAME
THE SIGNATURE

설레임

테마별
기출분석집

설레임 모의고사
Team SeolName

05 지수/로그함수와 좌표 세팅

[수학I]에서는 지수함수, 로그함수의 구체적인 성질을 물어보지 않다는 점에 주목하기!

STYLE 01

좌표설정의 첫 번째 이야기 – 좌표 편리성과 연립방정식에 관해..

지수함수와 로그함수는 [수학 I]에서 처음 배우는 함수이기 때문에 구체적인 성질을 배우지 않아!

단순히 **그래프의 개형, 점근선, 정의역, 치역** 등등만 정의하고 쑝쑝 넘어가버려

또한 [수학 I]에서는 지수/로그함수의 미분과 적분을 배우지 않기 때문에

지수함수, 로그함수의 구체적인 성질을 분석할 필요가 없지~~

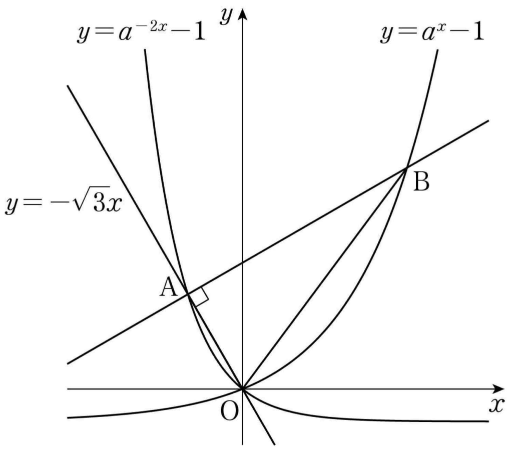
무서워하지 말고 이것만 기억해. 지수/로그함수 문제는 **좌표설정 그 자체**야.

[2022학년도 10월 학력평가 21번]

그림과 같이 $a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선

$$y=a^{-2x}-1,\ y=a^{x}-1$$

이 있다. 곡선 $y=a^{-2x}-1$과 직선 $y=-\sqrt{3}x$가 서로 다른 두 점 O, A에서 만난다. 점 A를 지나고 직선 OA에 수직인 직선이 곡선 $y=a^{x}-1$과 제1사분면에서 만나는 점 B라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3}:\sqrt{19}$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



우리만의 실전 풀이

THINKING!

위의 문제에 앞서 기본적인 좌표 설정하는 방법을 연습해볼까? 다음 예제를 살펴보자.

예제 1	함수 $y=2^x$ 와 직선 $x=t$ 와의 교점 P 의 좌표를 나타내시오.
예제 2	함수 $y=3^x$ 와 직선 $y=-x+2$ 와의 교점 P 의 좌표를 나타내시오.
예제 3	함수 $y=\frac{1}{2}\log_2 x$ 와 직선 $y=-x$ 와의 교점 P 의 좌표를 나타내시오.

예제 1 과 예제 2/3 과의 가장 큰 차이점은 무엇일까?

예제 1 은 **지수함수, 로그함수**와 **축과 평행한 직선**과의 관계이고,

예제 2/3 은 **지수함수, 로그함수**와 **일차함수**와의 관계라는 점이야.

난이도로 분류를 해보자면 예제 1 ≪ 예제 2 < 예제 3 정도 될 것 같아.

예제 1 정답

함수 $y=2^x$ 와 직선 $x=t$ 와의 교점 설정 방법은 단 한 가지야. ⇒ $\mathrm{P}(t,\ 2^t)$

예제 2 정답

함수 $y=3^x$ 와 직선 $y=-x+2$ 와의 교점 설정 방법은 여러 가지가 존재해.

$\mathrm{P}(t,\ 3^t)$, $\mathrm{P}(2t,\ 9^t)$, $\mathrm{P}(\log_3 t,\ t)$, $\mathrm{P}(\log_3 5t,\ 5t)$, $\mathrm{P}(t,\ -t+2)$, $\mathrm{P}\left(\frac{3}{t},\ -\frac{3}{t}+2\right)$ 등등이지.

아마 보통의 사람이라면 $\mathrm{P}(t,\ 3^t)$, $\mathrm{P}(t,\ -t+2)$ 를 애용할 거야.

하지만 문제에 따라서는 그렇지 않은 경우도 존재하기에 우리는 좌표설정을 배워야하는 거지.

예제 3 정답

함수 $y=\frac{1}{2}\log_2 x$ 와 직선 $y=-x$ 와의 교점 설정 방법도 예제 2 와 같이 여러 가지 방법이 존재해.

$\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}\log_2 t\right)$, $\mathrm{P}\left(2^t,\ \frac{t}{2}\right)$, $\mathrm{P}(4^t,\ t)$, $\mathrm{P}(t, -t)$ 등등이야.

아마 보통의 사람이라면 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}\log_2 t\right)$, $\mathrm{P}\left(2^t,\ \frac{t}{2}\right)$, $\mathrm{P}(t,\ -t)$ 을 애용할 거야.

진짜 그게 최선일까?

함수와 순서쌍의 정의만 알고 있어도 누구나 좌표설정은 할 수 있어. 하지만 수능은 타임어택..!!

누구나 할 수 있는 파트를 이제부터는 아무나 따라하기는 어렵게 우리만의 법칙을 만들어보자.

예제 2 에서는 $\mathrm{P}(t,\ 3^t)$, $\mathrm{P}(t,\ -t+2)$ 같이 대다수의 좌표설정이 최선의 방법이야.

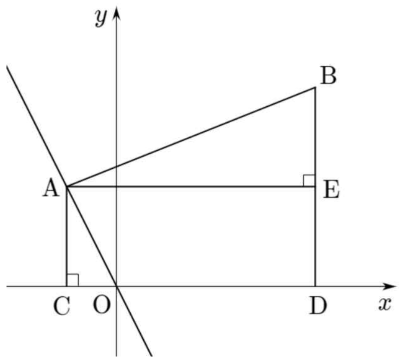
예제 3 에서도 대다수의 사람들이 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}\log_2 t\right)$, $\mathrm{P}\left(2^t,\ \frac{t}{2}\right)$, $\mathrm{P}(t,\ -t)$ 와 같이 좌표설정을 할거야,

하지만 우리는 $\mathrm{P}(4^t,\ t)$ 와 같이 설정해보자.

WHY?? ① 분수의 계산보다 정수의 계산이 더 수월하기 때문에
② 로그의 계산보다 지수의 계산이 더 수월하기 때문에

문제를 해설하면서 더 자세히 설명해볼게.

STEP 1 **좌표설정의 첫 걸음.. (흔한 풀이)**



[흔한 풀이] $\overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{3} : \sqrt{19}$ 과 피타고라스 정리를 이용하여

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{3}k$, $\overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{19}k$, $\overline{\mathrm{AB}} = 4k$ 라고 할 거야. (단, $k > 0$)

$\triangle\mathrm{ACO}$ 에서 피타고라스의 정리를 다시 이용하여 $\overline{\mathrm{OC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}k$, $\overline{\mathrm{AC}} = \frac{3}{2}k$ 를 알아내겠지.

비슷한 방법으로 $\triangle\mathrm{AEB}$ 에서 피타고라스의 정리를 이용하여 $\overline{\mathrm{AE}} = 2\sqrt{3}k$, $\overline{\mathrm{BE}} = 2k$ 를 알아낸 후 점 A, 점 B 의 좌표를 설정할거야.

$\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k,\ \frac{3}{2}k\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}k,\ \frac{7}{2}k\right)$ 으로 말이지.

그리고 나선 점 A 가 곡선 $y = a^{-2x} - 1$ 위에 있으며,

점 B 가 곡선 $y = a^x - 1$ 위에 있다는 사실을 이용해서 풀겠지.

$$\begin{cases} \frac{3}{2}k = a^{\sqrt{3}k} - 1 \\ \frac{7}{2}k = a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k} - 1 \end{cases}$$

연립방정식을 이용해서 풀면 문제가 풀릴거야!

사실 위의 풀이방법으로 풀어도 아무런 문제가 없어!
하지만 분수의 계산이나 지수가 분수인 것이 조금 거슬리지 않니?
정수의 계산이 분수의 계산보다 수월하다는 것은 누구나 아는 사실이야.
그렇기 때문에 처음 좌표를 설정할 때부터 **분수를 최소화**하는 방법으로 풀이하려고 해!

↓

STEP 2 **좌표설정의 첫 걸음.. (분수에 유의하며)**

[우리의 풀이] $\overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{3} : \sqrt{19}$은 JUST 비율이야!

즉, $\overline{\mathrm{OA}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}k$, $\overline{\mathrm{OB}} = \dfrac{\sqrt{19}}{4}k$ 또는 $\overline{\mathrm{OA}} = 6\sqrt{3}k$, $\overline{\mathrm{OB}} = 6\sqrt{19}k$

으로 길이를 설정해도 아무 상관없다는 의미이지. (단, $k > 0$)

그렇다면 우리는 풀이하기 편한 방향으로 좌표를 설정해야 하지 않을까?

예를 들면, 분수의 계산이나 무리수의 계산보다는 정수의 계산에 초점을 맞추어 좌표를 설정해야 할 거야. 또한 큰 정수보다는 작은 정수의 계산이 더 편하겠다, 맞지?

함께 길이를 설정해보자!

길이를 어떻게 설정하는 것이 분수가 최소화되면서 작은 정수의 계산을 도모할 수 있을까?

아마도 $\overline{\mathrm{OA}} = 2\sqrt{3}k$, $\overline{\mathrm{OB}} = 2\sqrt{19}k$ 일거야.

흔한 풀이를 참고하면 좌표를 설정했을 때, 분모가 2인 분수가 나온다는 것을 알 수 있지.

그러한 사실을 바탕으로 처음 길이에 2를 곱해주는 거야!

모든 길이의 비율이 2배가 되었으므로 자연스레 좌표도 두 배의 비율로 나오게 될거야.

결과는 다음과 같아. $\mathrm{A}(-\sqrt{3}k,\ 3k)$, $\mathrm{B}(3\sqrt{3}k,\ 7k)$

연립방정식을 흔한 풀이와 비교해 보면 훨씬 간단하다는 것을 한 눈에 볼 수 있을거야.

[흔한 풀이] $\begin{cases} \dfrac{3}{2}k = a^{\sqrt{3}k} - 1 \\ \dfrac{7}{2}k = a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k} - 1 \end{cases}$ VS 우리의 풀이: $\begin{cases} 3k = a^{2\sqrt{3}k} - 1 \\ 7k = a^{3\sqrt{3}k} - 1 \end{cases}$

우리가 문제를 풀 때 좌표를 항상 흔한 풀이를 참고해서 설정할 수는 없잖아?

그렇기에 많은 연습을 토대로 계산량을 줄이는 방법을 스스로 연구해 나가야 해.

열심히 기출분석을 하며 비슷한 유형의 좌표설정 문제를 연습해보도록 하자!

↓

STEP 3 **초월함수(지수함수, 로그함수)와 일차함수 연립의 방법론**

우리는 일반적으로 지수함수, 로그함수와 일차함수의 연립방정식의 정확한 해를 구하기 어려워.

그렇기 때문에 평가원에서는 눈에 띄는 정수의 해 제시 또는 아주 간단한 방정식으로 소거 등을 통해 문제를 제작하지!

보통 미지수가 2개인 연립방정식으로 통해 미지수의 값을 구하도록 문제를 출제하는데 연립방정식의 기본을 몰라 틀리는 경우가 많아 ㅠㅠ

연립방정식의 풀이 방법에는 크게 두 가지가 있어.

①	대입법

②	소거법

고등학생인데 너무 무시하는 거 아니냐고? 잘 들어봐~
연립방정식이 나오게 되면 학년이 올라갈수록 대입법보다는 소거법을 더 많이 사용하게 될거야.
이때 우리는 한번쯤은 고민해봐야할 문제가 있어.
두 미지수 중에 어떤 미지수를 소거해야 답을 더 빠르고 정확하게 구할 수 있을까? 라는 질문이야.

아주 쉬운 예시를 들어줄게.

예제 1 연립방정식 $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$ 에서 $\dfrac{x}{2}$ 의 값을 구하시오.

풀이 1 x를 소거한 풀이

$\begin{cases} 2x+2y=8 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$ 이기 때문에 $y=2$ 이다.

$y=2$를 위의 식에 대입하면 $x=2$라는 값이 나오게 되며

$\therefore \ \dfrac{x}{2}=1$

풀이 2 y를 소거한 풀이

$\begin{cases} 3x+3y=12 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$ 이기 때문에 $x=2$ 이다.

$\therefore \ \dfrac{x}{2}=1$

우리가 구해야 되는 것은 x의 값이므로 y를 소거시킴으로서 풀이 양을 줄일 수 있어.

" **풀이 1** , **풀이 2** 모두 풀리는데 굳이 **풀이 2** 로 풀어야 돼? "

라고 말하는 친구들이 있을거야. 우리의 목표는 뭐라고?

'누구나 할 수 있는 파트를 이제부터는 아무나 따라하기 어렵게 우리만의 법칙을 만들어보자!'

2022학년도 10월 학력평가 21번에서 결국 구하라는 것이 선분 AB의 길이이므로
우리가 궁금한 것은 $8k$의 값, 즉, k의 값이지.
문제에서 사용된 연립방정식으로 더 설명을 해볼게.

연립방정식의 $\begin{cases} 3k=a^{2\sqrt{3}k}-1 \\ 7k=a^{3\sqrt{3}k}-1 \end{cases}$ 의 해를 구해야해.

소거법을 활용해서 풀이할건데 먼저 우리는 무엇을 소거할 것인지 정해야해. 맞지?

① k의 일차항을 소거하자.　　　② a를 소거하자.

어떤 방법이 더 편할까? 잠깐 시간을 줄 테니까 고민해봐!

자, 됐지? 정답은... 2번 풀이가 더 편하겠다!

WHY?? 우리가 구해야 되는 목표값을 먼저 알아야지! k의 값이므로 k를 소거시키면 안 되겠지!
따라서 a를 소거함으로써 k의 값을 바로 구할 수 있다는 결론이 나와.

[흔한 풀이] ① k의 일차항을 소거하자.

$$\begin{cases} 21k = 7a^{2\sqrt{3k}} - 7 \\ 21k = 3a^{3\sqrt{3k}} - 3 \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이므로 $7a^{2\sqrt{3k}} - 7 = 3a^{3\sqrt{3k}} - 3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$a^{\sqrt{3k}} = t$로 치환하여 ㉡을 정리하면

$3t^3 - 7t^2 + 4 = 0$

$t = -\dfrac{2}{3}$ 또는 $t = 1$ 또는 $t = 2$이다.

$k > 0$이므로 $t > 1$이며 $t = 2$이다.

$t = 2$를 ㉠에 대입하면

$k = 1$이므로 선분 AB의 길이는 8이다.

왜 흔한 풀이인가?
원래 주어진 연립방정식이 각각 $3k$, $7k$와 다른 식을 비교하고 있으므로 상수만 곱하면 둘이 같다고 두긴 훨씬 편하다. 하지만 이게 최선의 풀이일까?

[우리의 풀이] ② a를 소거하자.

$$\begin{cases} \{3k+1\}^3 = \{a^{2\sqrt{3k}}\}^3 \\ \{7k+1\}^2 = \{a^{3\sqrt{3k}}\}^2 \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이므로 $\{3k+1\}^3 = \{7k+1\}^2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

직관적으로 ㉡에서 $k = 1$이라는 것이 보이긴 하지만 정리를 해보자면

$27k^3 - 22k^2 - 5k = 0$

$k = -\dfrac{5}{27}$ 또는 $k = 0$ 또는 $k = 1$이다.

따라서 선분 AB의 길이는 8이다.

[흔한 풀이] ① k의 일차항을 소거하자. VS [우리의 풀이] ② a를 소거하자.

이번에는 어때??
[우리의 풀이]가 더 편하고 빠를 것 같지 않아? a를 소거했을 때는 단순한 이차방정식만 나오기 때문에 훨씬 풀이방향이 직관적이지. 연립방정식을 풀 때는 '둘이 같다고 두기 편한 형태'를 소거하기 보다도 **소거한 뒤의 상황이 편해지는 방향**으로 소거하는 것이 좋다고 말할 수 있는 대목이야.

우리가 구하려는 값을 먼저 파악한 다음 풀이를 구상하는 습관을 갖도록 연습해 봐.
사소한 차이가 크나큰 결과를 만든다는 것! 꼭 잊지 말아줘!

STYLE 02

좌표설정의 두 번째 이야기 – 닮음과 연립일차방정식에 관해..

STYLE 01은 지수의 밑이 주어지지 않은 지수함수의 좌표 편리성에 대해 다루었어.
또한 일차식으로만 이루어진 연립방정식이 아닌 JUST 미지수가 2개인 연립방정식이었지.
STYLE 02는 삼각형의 닮음을 이용해 두 개의 문자를 하나의 문자로 변환시키는 연립일차방정식에 관해 다룰거야.
잠시 미지수와 방정식관의 관계에 대해 말해볼게.

미지수가 n개일 때 서로 다른 방정식이 n개 주어지면 해가 존재한다. (단, n은 자연수)

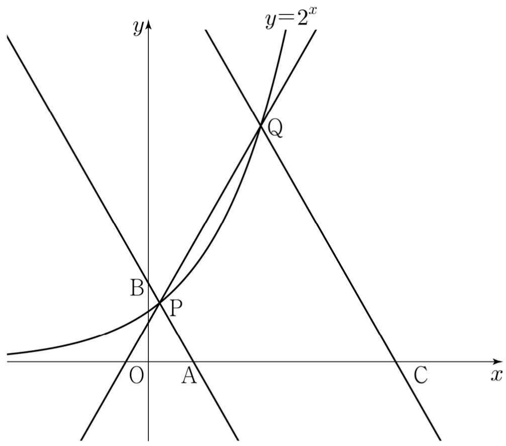
당연한 얘기지만 이러한 사실을 간과하는 학생들이 많아.
즉, 미지수가 2개일 때, 서로 다른 방정식을 2개 찾았음에도 불구하고 계속해서 다른 방정식을 찾는 실수를 저지르는 경우가 많다는 거지.
앞에서도 강조를 했지만 수능은 타임어택!! 모든 조건, 모든 좌표를 모두 구할 필요가 없다는 뜻이야.
이 문제를 풀기 위한 최소한의 조건과 최소한의 식으로 문제를 풀이하는 연습을 해보자.

[2023학년도 9월 모의평가 21번]

그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]



우리만의 실전 풀이

THINKING!

풀이를 시작하기 앞서 문제를 보고 무엇이 생각나니?
지수함수, 로그함수와 일차함수의 연립으로 되어있네! STYLE 01에서도 논의한 부분이지만 일반적으로 지수함수, 로그함수와 일차함수의 연립방정식은 풀이할 수 없어. 따라서 다른 조건이 분명 존재할거야.
기울기의 합이 0인 직선 여러 개가 제시되었고, 변의 길이비가 주어졌네.
이정도 밖에 생각을 못했다고?
괜찮아 앞으로 STEP 1/2/3 을 거치면서 어떠한 생각과정을 거쳐야 하는지 알아볼거니까!

STEP 1 삼각형의 닮음. 어디까지 아니?

중학생 때 배운 삼각형의 닮음 모두 기억할거야.
닮음이란 한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소한 도형이 다른 도형과 합동일 때를 말해.
삼각형의 닮음 조건은 크게 3가지가 있지.

①	SSS 닮음	②	SAS 닮음	③	AA 닮음

다음 세 가지 조건을 '지수함수와 로그함수' 단원에서 빈출되는 순서대로 말해볼래?

바로 ③ ⇒ ② ⇒ ① 순서야.
순서를 잘 살펴보면 다음 결론은 얻을 수 있어.

각에 대한 닮음이 빈출된다는 것!

왜 그럴까?
쉽게 생각해보면 조건이 적을수록 어렵지 않겠어? (SSS 닮음, SAS 닮음(조건 3) > AA 닮음(조건 2))
너무 근거 없는 이유라고? 그럼 다음과 같이 생각해보자.
문제를 출제하는 입장에서 길이 조건을 2개 이상이나 주면서 닮음이라는 것을 알려주고 싶을까?
또 길이비는 각도 조건보다 알아차리기 쉽기 때문에 학생들이 문제를 수월하게 접근한단 말이야!
이유를 말하자면 끝이 없으니 여기서 줄일게.

본론으로 돌아와서 우리에게 중요한 닮음 조건은 뭐라고??
바로 **각도가 포함된 조건**이라고!
그렇다면 각도 조건을 어떻게 간접적으로 알려주는지 같이 알아보자.
이 문제에서는 기울기를 통해서 각도 조건을 알려주고 있어.
일차함수의 기울기는 $\tan\theta$로써 표현되므로 기울기가 같다는 뜻은 시초선과 동경(일차함수)이 이루는 각의 크기가 같다는 뜻이며 삼각형의 닮음 조건 중 각도 조건에 부합해.

위의 문제에서는 두 기울기의 합이 0이 되는 두 직선이 제시되어 있어.

이런 경우에는 기울기와 각도 조건의 관계는 어떻게 될까?

기울기 m을 $\tan\theta$라고 표현하자.

이때, 기울기 $-m$은 $-\tan\theta$으로 표현 가능하겠지?

또한 가울기가 $-m$인 직선이 시초선과 이루는 각의 크기를 α라고 한다면 다음 사실을 만족해.

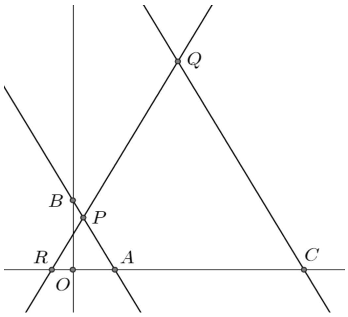
$\tan\alpha = -\tan\theta = \tan(\pi-\theta)$ (삼각함수 단원에서 배운 각 변환 공식을 활용) …… ㉠

$\therefore\ \alpha = \pi - \theta$

아하! 기울기는 삼각형의 각도 조건을 간접적으로 알려주는 힌트구나!

다음부터는 문제의 기울기 조건을 표면적으로만 이해하지 말고 각, 삼각형의 닮음 등등과 관련지어 이해해보자.

풀이로 다시 돌아와 보자.



이제 문제를 보는 시각이 조금 달라졌을까?

$$\triangle OCQ \backsim \triangle OAP \ \text{(AA 닮음)}$$

㉠을 이용하면 $\triangle OCQ$와 $\triangle OAP$는 이등변삼각형이라는 것도 알 수 있지.

변의 길이비를 이용하여 좌표를 설정하는 것은 STEP 2 에서 알려줄게.

STEP 2 **닮음 관계를 찾았는데 문제를 틀렸다고? - 좌표와 길이는 다른 것!**

[흔한 풀이] $\triangle OCQ \backsim \triangle OAP$이며 $\overline{AB}=4\overline{PB}$, $\overline{CQ}=3\overline{AB}$이므로

$\overline{PB}:\overline{PA}:\overline{QC}=1:3:12$라는 관계식이 나와.

닮음의 성질로 인해 $4\overline{OP}=\overline{OQ}$이므로

$b=4a$, $2^b = 4\times 2^a$ …… ㉡

$\begin{cases} b=4a \\ b=a+2 \end{cases}$ $\quad \therefore\ a=\dfrac{2}{3},\ b=\dfrac{8}{3}$

이렇게 구해서 '다 풀었다!'라고 생각하고 다음 문제로 넘어갔는데 채점을 해보니 틀린 친구들도 있을거야.

혹시 STEP 1 의 오류가 있다는 것을 알았니?

알아차리지 못했다면 STEP 1 에서 찾아보겠어?

사소한 차이긴 하지만 $\triangle OCQ \backsim \triangle OAP$이 아닌 $\triangle RCQ \backsim \triangle RAP$라는 점이야.

내가 해설하기 쉽도록 점 R 을 임의로 지정한 점이고, 문제에서는 원점만을 점 O 으로 정의했기 때문에 헷갈릴 수 있어. 또한 이러한 실수가 이 문제의 오답률을 높이는 원인이 되었지.

처음에는 누구든지 당연히 $\triangle RCQ \backsim \triangle RAP$ 을 생각하고 풀이를 시작했을거야.
하지만 점 R 과 점 O 이 헷갈렸기 때문에 오답을 구한 것이라고 말하겠지.
왜 이러한 상황이 생겼다고 생각해?
아직 머릿속에 **좌표**와 **길이**가 명확히 구분되어 있지 않기 때문이야.
좌표는 원점 $(0,\ 0)$을 기준으로 하여 **위치**를 나타낸 것이고,
길이는 어떤 두 점 사이의 **거리**를 나타낸 것이야.
[수학Ⅱ]를 공부했다면 알겠지만 **위치**와 **거리**는 엄연히 다른 것이고,
그 말은 즉슨 **좌표**와 **거리**도 분명히 다르다는 뜻이야.
ⓛ의 두 개의 식은 모두 **길이**를 이용한 식이 아닌 **좌표**를 이용한 식이라는 거지.

STEP 3 미지수가 2개이면 방정식 2개만 - 좌표와 길이에 유의하며..

[우리의 풀이] $\triangle RCQ \backsim \triangle RAP$ 이며, $\triangle RCQ$ 와 $\triangle RAP$ 는 이등변삼각형임을 이용해서 a, b 의 관계를 밝혀내보자. (좌표와 길이에 유의하며..)

$\overline{AB}=4\overline{PB}$, $\overline{CQ}=3\overline{AB}$ 이므로 $\overline{PB}:\overline{PA}:\overline{QC}=1:3:12$ 라는 관계식이 나와.
점 A 의 좌표는 $A(4a,\ 0)$임을 알 수 있으며, 이등변삼각형의 성질에 따라 $R(-2a,\ 0)$이야.
또한, 닮음의 성질을 통해 $4\overline{RP}=\overline{RQ}$ 를 알 수 있으며 한 직선 위에 점 P, 점 Q, 점 R 이 존재해.
따라서 x 좌표 간의 관계: $4\times\{a-(-2a)\}=b-(-2a)$ …… ⓒ
y 좌표 간의 관계: $4\times 2^{a}=2^{b}$ …… ⓔ

$$\begin{cases} b=10a \\ b=a+2 \end{cases}$$

$$\therefore\ a=\frac{2}{9},\ b=\frac{20}{9}$$

이렇게만 풀면 정말 BEST 풀이라고 할 수 있지.
하지만 문제를 풀 때 목표를 정해두지 않으면 돌아가기 마련이야.
예를 들면 ⓒ, ⓔ을 구한 상태에서 a, b 의 관계식을 더 찾으려고 하는 경우 말이야.
이미 답을 구했는데 말이지. 항상 기억하자! 수능은 뭐라고? 타임어택이라고!

미지수가 2개일 때 서로 다른 방정식 2개만 구하면 풀 수 있다는 것을 알잖아!

방정식 2개만 구하면 바로 답을 구하고 넘어가도 된다는 말이지.
꼭 기억해줘!

STYLE 03

좌표설정의 마지막 이야기 – 역함수 관계에 관해..

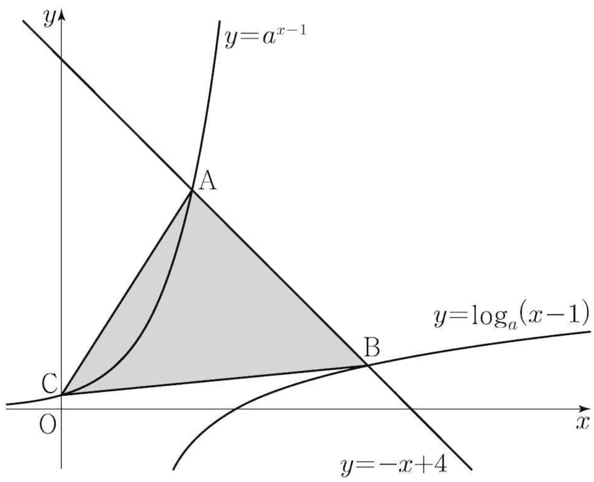
로그를 처음 배울 때 기억나니? 지수의 역이라는 것으로 정의하면서 우리에게 설명을 해.
이를 통해 우리는 밑이 같은 지수함수와 로그함수는 역함수 관계에 놓여있다는 것을 알아.
하지만 지수함수, 로그함수 문제에서 좌표를 설정할 때 역함수 관계를 간과하는 경우가 많지.
역함수 관계를 이용하면 좌표설정할 때 훨씬 수월해진다는 것을 꼭 기억하자!

[2022학년도 9월 모의평가 21번]

$a>1$인 실수 a에 대하여 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\ y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



우리만의 실전 풀이

THINKING!

문제를 보면 처음에는 정말 쉬워 보일거야. 함수가 간단하거든.
또한 이 문제는 밑이 주어지지 않았고, 2022학년도 10월 학력평가 21번을 떠올리게 해.
하지만 2022학년도 10월 학력평가 21번처럼 좌표를 설정한 다음 연립방정식으로만 풀이하면 아마 답을 구하지 못할 거야. 이 문제는 문제의 본질을 꿰뚫지 못한다면 상당히 어려운 방법으로 풀게 만들어 놓았거든.
거의 모든 사람들이 풀지 못하는 방법으로..
문제에서 원하는 본질은 무엇일까??

STEP 1 **STYLE 01처럼 풀 수 있을거 같은데? - 수능에서 멸망하는 지름길..**

위의 문제를 두 함수의 대칭성 없이 JUST 2022학년도 10월 학력평가 21번처럼 좌표만을 설정해서 풀어볼게. 마지막으로 경고하지만 절대 이렇게 풀지마! 문제의 본질을 꿰뚫지 못하면 생기는 엄청난 파장에 대해 설명하려고 이런 풀이를 설명하는 것이니까..!

흔한 풀이도 아닌 미친 풀이(따라하지 마세요)

점 A의 좌표를 $\mathrm{A}\left(t,\ a^{t-1}\right)$라고 하자.

$a^{t-1}=-t+4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

점 B의 좌표를 $\mathrm{B}\left(t+2, a^{t-1}-2\right)$라고 할 수 있으므로

$a^{t-1}-2=\log_a(t+1)$

위의 식에 ㉠을 대입하여 정리하면

$a^{-t+2}=t+1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 통해 ㉡을 정리하면

$\dfrac{a}{4-t}=t+1$

$a=(t+1)(4-t) \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$(t+1)^{t-1}(4-t)^{t-1}=-t+4$

$(t+1)^{t-1}(4-t)^{t-2}=1$

$(t+1)^{t-1}=(4-t)^{2-t}$

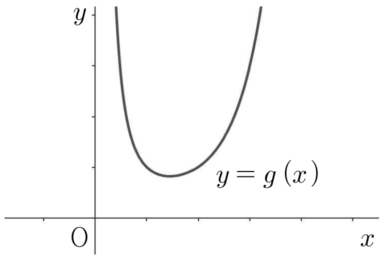
함수 $g(x)=x^{x-2}$를 정의하자.

$g(t+1)=g(4-t)$를 만족시키는 실수 t를 구하면 된다.

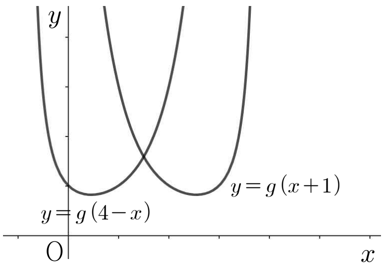
$g(x)=x^{x-2}$를 x에 대해 미분하면

$g'(x)=x^{x-2}\left(\ln x+\dfrac{x-2}{x}\right)$

함수 $g(x)$의 개형은 다음과 같다.



또한 함수 $g(x+1)$와 $g(4-x)$의 그래프는 다음과 같다.



두 함수는 대칭성에 의해 $t=\frac{3}{2}$에서 오직 하나의 근을 갖는다.

곧, $a=\frac{25}{4}$이므로 점과 직선 사이의 거리에 따라 $S=\frac{96}{25}$이다.

이렇게 문제의 본질을 무시하고 풀이를 해보았어. 어때?
아마도 이렇게 풀면 이 문제만 풀다가 수능이 끝나지 않을까?
이제 문제의 본질을 꿰뚫어야 하는 이유를 알았니?
그럼 STEP 2 에서 우리의 풀이를 해볼게.

STEP 2 ‘대칭성’ 그것이 바로 이 문제의 본질..!

STEP 1 에서는 ‘대칭성’ 없이 풀이를 해보았어. STEP 1 처럼 풀면 안 된다는 것은 알겠지?
본론으로 돌아와 역함수에 대해 설명해볼게.
역함수란 원함수의 정의역과 치역이 바뀐 함수야. 당연히 개념적인 부분을 알고 있으리라 믿고 넘어갈게.
원함수와 역함수의 중요한 성질이 몇 가지 존재해.

① $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$
② 함수 $f(x)$와 함수 $f^{-1}(x)$는 직선 $y=x$에 대해 대칭이다.

위의 문제는 ①, ②번 성질을 활용해서 풀어야 하는 문제야.
또한 ①, ②번 성질이 이 문제의 본질이고.
혹시 몰라서 그런데 함수 $y=a^x$, 함수 $y=\log_a x$가 서로 역함수 관계인 것은 알고 있지?

알고 있다고 생각하고 넘어갈게.

이 문제에서 역함수의 성질을 떠올리기 어려운 이유는 무엇일까?

바로 함수의 평행이동 때문이야.

함수 $y=a^{x-1}$와 함수 $y=\log_a(x-1)$는 각각 함수 $y=a^x$, 함수 $y=\log_a x$를 x축 방향으로 1만큼 평행이동 한 함수야.

따라서 원래는 두 함수가 직선 $y=x$에 대해 대칭이었다면 평행이동 후에는 직선 $y=x-1$에 대해 대칭이게 돼.

우리는 하나의 일반화된 사실을 얻을 수 있는데 다음과 같아.

함수 $f(x)$와 함수 $f^{-1}(x)$의 그래프를 모두 x축으로 a만큼, y축으로 b만큼 평행이동 했을 때, 평팽이동 된 두 함수는 직선 $y-b=x-a$에 대해 대칭이다.

외우진 말고, 두 함수가 똑같이 평행이동하면 대칭축이었던 $y=x$도 똑같이 평행이동해야 하니까 위와 같은 결과가 나타난다고 이해하면 좋을 것 같아.

↓

STEP 3 좌표 설정 - 기울기의 개념적 이해를 바탕으로..

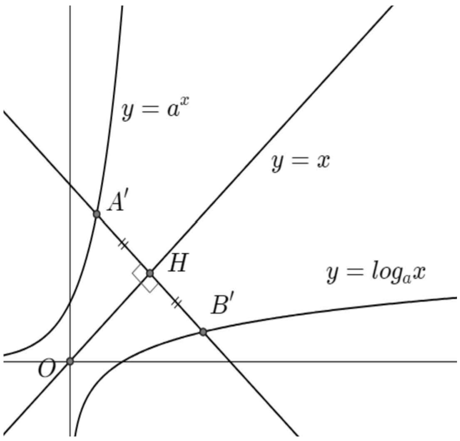
좌표 설정을 하기 이전에 일차함수의 기울기가 무엇인지 알아볼까?

기울기란 x 방향만큼 변화한 것에 비례하여 y 방향으로 얼마나 변화했는지를 나타내는 값이야.

기울기 m은 다음과 같이도 나타내지.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},\quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

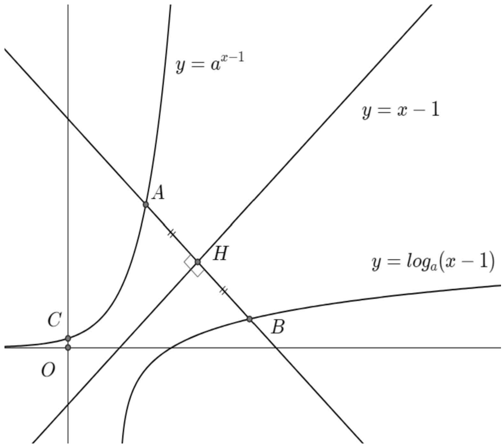
기울기의 개념을 유의한 후 설명을 이어나가 볼게.



역함수의 성질에 따라 직선 OH와 직선 $\mathrm{A'B'}$이 직교하면

점 $\mathrm{A'}$과 점 $\mathrm{B'}$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이야.

다음 성질을 유지한 채 x축 방향으로 모든 함수가 1만큼 평행이동 한 상황이 문제의 상황이지.



따라서 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{2}$ 이며 직선 AB의 기울기가 -1이므로 점 H를 $\mathrm{H}(t,\ t-1)$으로 설정하면

$\mathrm{A}(t-1,\ t)$, $\mathrm{B}(t+1,\ t-2)$ 이야.

왜? 기울기의 -1일 때는 x방향으로 k만큼 변화했을 때, y방향으로 $-k$만큼 변화한다는 의미이기 때문이지

점 H는 두 직선의 교점이므로 $t=\dfrac{5}{2}$ 이고,

그러므로 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

곧, $a=\dfrac{25}{4}$ 이며 따라서 점과 직선 사이의 거리에 따라 $S=\dfrac{96}{25}$ 이야.

정리하자면,

STEP 2 에서는 기울기를 통해 삼각형의 닮음을 발견했다면,

STEP 3 에서는 기울기의 정의를 통해 좌표설정을 도왔어.

SEOL:NAME, The Signature [테크닉 총정리]

CHECK 01 **좌표설정은 계산하기 편리하도록**

① 무리수보다는 유리수로 좌표 설정
② 분수보다는 정수로 좌표 설정
③ 로그보다는 지수로 좌표 설정

CHECK 02 **목표설정 후 연립방정식에서 소거시킬 요소 결정**

[예제] 연립방정식 $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$ 에서 $\frac{x}{2}$ 의 값을 구하시오.

목표설정 ⇒ x 의 값
1) x 을 소거하자.
2) y 를 소거하자. ☑

CHECK 03 **기울기가 삼각형의 닮음의 조건이 될 수도**

삼각형의 닮음 조건

①	SSS 닮음	②	SAS 닮음	③	AA 닮음

빈출 경향 ❸ ≫ ❷ ≫ ❶

기울기 m 을 $\tan\theta$ 라고 표현하고 기울기가 $-m$ 인 직선이 시초선과 이루는 각의 크기를 α 라고 한다면 다음 사실을 만족한다.

$$\tan\alpha = -\tan\theta = \tan(\pi-\theta)$$

기울기를 통해 삼각형의 각도 조건 파악 가능하다.

CHECK 04 **좌표와 길이는 다른 것**

좌표 원점을 기준으로 하여 **위치**를 나타낸 것

길이 어떤 두 점 사이의 **거리**를 나타낸 것

위치와 **거리**는 엄연히 다른 것이므로 (by 수학Ⅱ) **좌표**와 **길이**도 분명히 다르다.

CHECK 05 **미지수와 방정식의 관계**

미지수가 n개일 때 서로 다른 방정식이 n개 주어지면 풀이 가능하다.

(단, n은 자연수, 방정식의 해가 고교 과정에서 구해지지는 않을 수 있다.)

CHECK 06 **지수함수와 로그함수의 대칭성**

함수 $y=a^x$, 함수 $y=\log_a x$가 서로 역함수 관계이다.

역함수 관계에 있는 함수는 다음 성질을 따른다.

① $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

② 함수 $f(x)$와 함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대해 대칭이다.

③ 함수 $f(x)$와 함수 $f^{-1}(x)$를 모두 x축으로 a만큼, y축으로 b만큼 평행이동 했을 때,
평팽이동한 두 함수는 직선 $y-b=x-a$에 대해 대칭이다.

PRACTICE
기출문제 ATTACK

001 [2011학년도 수능 나형 16번]

두 함수 $f(x)=a^x$과 $g(x)=\log_b x$의 교점의 개수를 k라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a\neq 1,\ a>0,\ b\neq 1,\ b>0$) [4점]

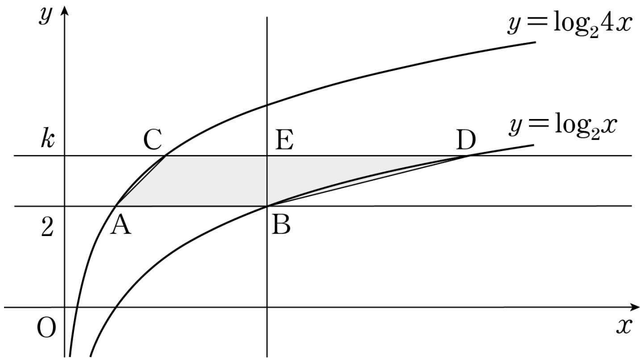
〈보 기〉

ㄱ. $a=\frac{1}{2},\ b=2$이면, $k=1$이다.
ㄴ. $a=b=\sqrt{2}$이면, $k=2$이다.
ㄷ. $ab>2$이면, $k=2$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

002 [2019학년도 3월 가형 27번]

그림과 같이 직선 $y=2$가 두 곡선 $y=\log_2 4x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k\ (k>2)$가 두 곡선 $y=\log_2 4x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 CD와 만나는 점을 E라 하면 점 E는 선분 CD를 $1:2$로 내분한다. 사각형 ABDC의 넓이를 S라 할 때, $12S$의 값을 구하시오. [4점]



003 [2019학년도 10월 가형 14번]

곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 점 중 한 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=(\sqrt{2})^x+a$와 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 6일 때, 상수 a의 값은? (단, $0<a<4$이고, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

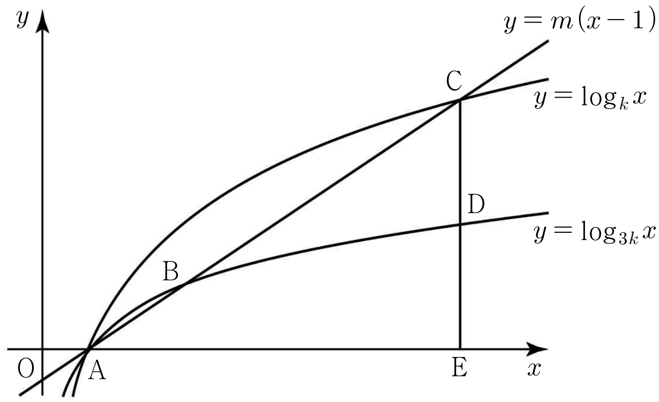
004 [2020학년도 7월 가형 27번]

$k>1$ 인 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$가 만나는 점을 A라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=m(x-1)$이 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{3k}x$, x축과 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 세 삼각형 ADB, AED, BDC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 ADB의 넓이의 3배이다.

(나) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 AED의 넓이의 $\frac{3}{4}$배이다.

$\frac{k}{m}$의 값을 구하시오. [4점]



005 [2020학년도 10월 나형 21번]

두 곡선 $y=2^{-x}$과 $y=\left|\log_2 x\right|$가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1 < x_2$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $\dfrac{1}{2} < x_1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

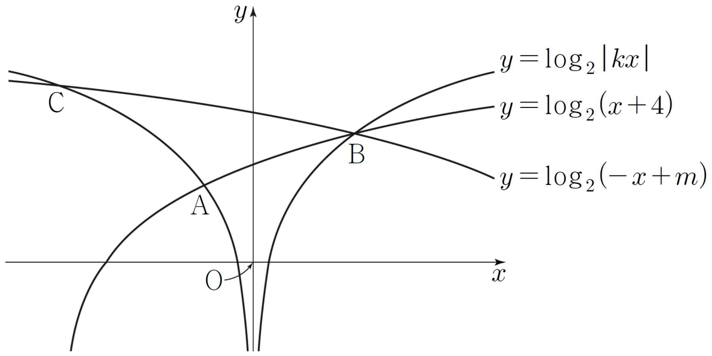
ㄴ. $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$

ㄷ. $y_1 - y_2 < \dfrac{3\sqrt{2}-2}{6}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

006 [2021학년도 4월 15번]

그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_2|kx|$와 $y=\log_2(x+4)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 점 B를 지나는 곡선 $y=\log_2(-x+m)$이 곡선 $y=\log_2|kx|$와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1 < x_2$이고, m은 실수이다.) [4점]



〈 보 기 〉

ㄱ. $x_2=-2x_1$이면 $k=3$이다.

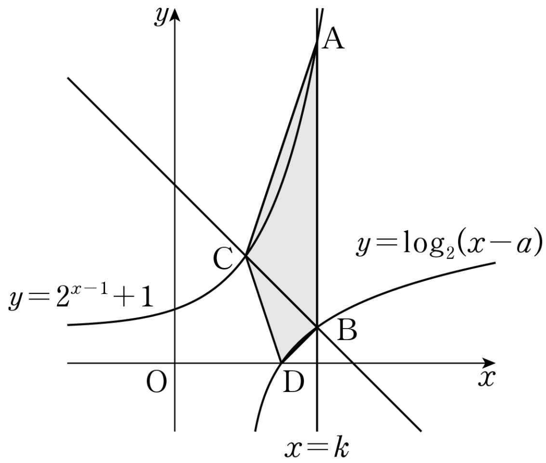
ㄴ. ${x_2}^2=x_1x_3$

ㄷ. 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때, $m+k^2=19$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

007 [2022학년도 3월 11번]

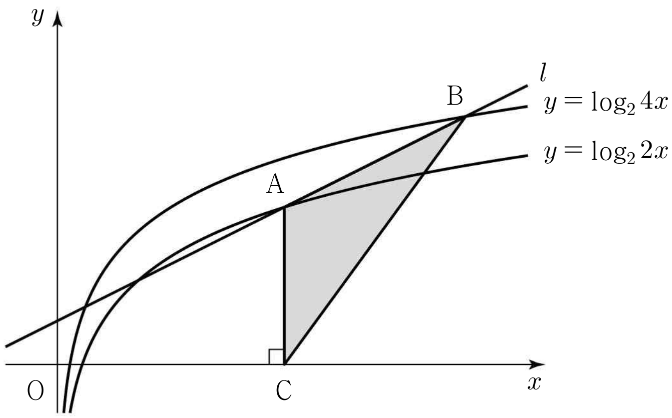
그림과 같이 두 상수 a, k에 대하여 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2^{x-1}+1$, $y=\log_2(x-a)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-1}+1$과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$일 때, 곡선 $y=\log_2(x-a)$가 x축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0<a<k$) [4점]



① 14　② 13　③ 12　④ 11　⑤ 10

008 [2022학년도 7월 11번]

기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선 l 이 곡선 $y=\log_2 2x$ 와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x 좌표가 큰 점을 A 라 하고, 직선 l 이 곡선 $y=\log_2 4x$ 와 만나는 두 점 중 x 좌표가 큰 점을 B 라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$ 일 때, 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발 C 에 대하여 삼각형 ACB 의 넓이는? [4점]



① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6

009 [2018학년도 사관학교 가형 18번]

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 a_n이라 하자.

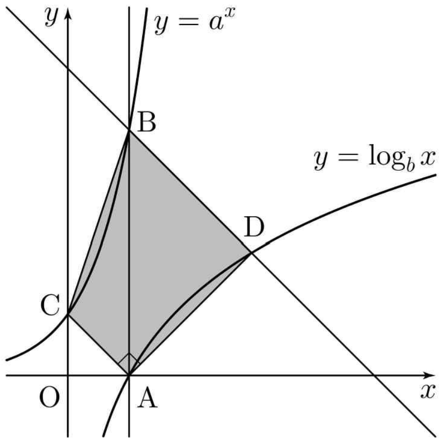
(가) 한 변의 길이가 n이고 네 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 자연수이다.
(나) 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_{16} x$와 각각 서로 다른 두 점에서 만난다.

a_3+a_4의 값은? [4점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

010 [2020학년도 사관학교 가형 16번]

그림과 같이 1보다 큰 두 상수 a, b에 대하여 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점을 B라 하고, 점 $\mathrm{C}(0,\ 1)$에 대하여 점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{AC}} \perp \overline{\mathrm{AD}}$이고, 사각형 ADBC의 넓이가 6일 때, $a \times b$의 값은? [4점]



① $4\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ 8 ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

011 [2021학년도 사관학교 나형 21번]

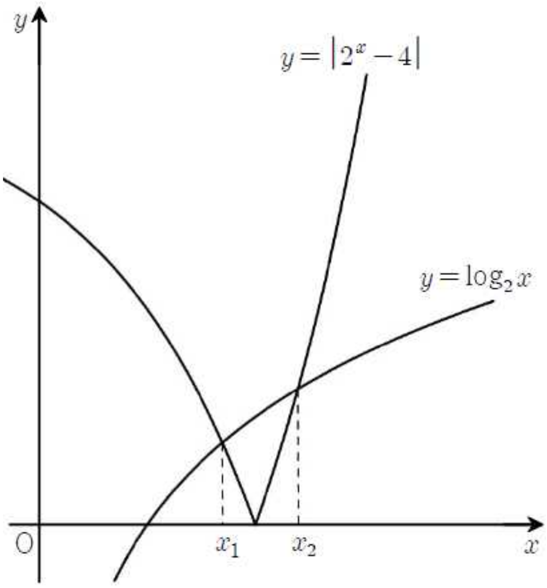
두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$

ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1}) < 3$

ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2} > 8+\log_2(\log_3 6)$



① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

012 [2022학년도 사관학교 13번]

$a > 1$인 실수 a에 대하여 좌표평면에 두 곡선

$$y = a^x,\ y = \left| a^{-x-1} - 1 \right|$$

이 있다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. 곡선 $y = \left| a^{-x-1} - 1 \right|$은 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.

ㄴ. $a = 4$이면 두 곡선의 교점의 개수는 2이다.

ㄷ. $a > 4$이면 두 곡선의 모든 교점의 x좌표의 합은 -2보다 크다.

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

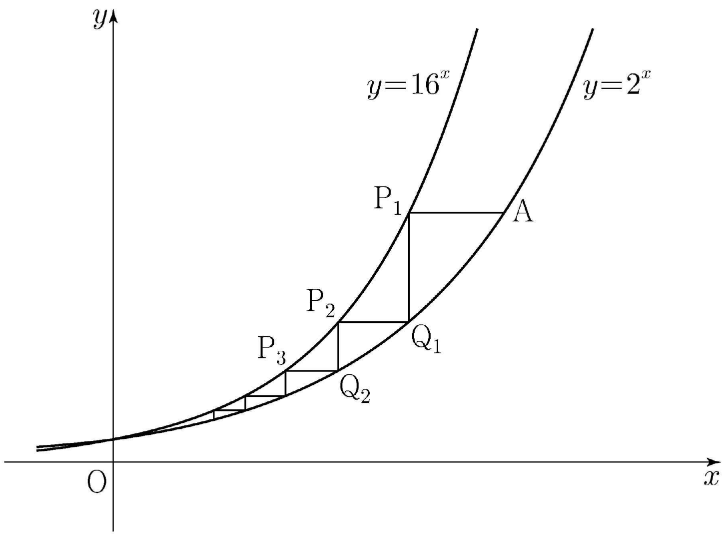
013 [2023학년도 6월 13번]

두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64,\ 2^{64})$이 있다. 점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.

점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \dfrac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48　② 51　③ 54　④ 57　⑤ 60



기출문제 ATTACK 정답 및 해설

빠른 정답

1	④	2	54	3	④	4	12	5	⑤
6	③	7	⑤	8	⑤	9	①	10	②
11	②	12	②	13	①				

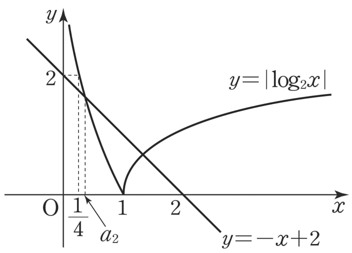
해 설

001

[정답] ④

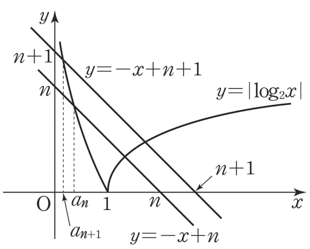
$$y=|\log_2 x|=\begin{cases}\log_2 x & (x\geq 1)\\ -\log_2 x & (0<x<1)\end{cases}$$

ㄱ. (거짓) $x=\dfrac{1}{4}$일 때, $y=-\log_2\dfrac{1}{4}=2$이므로 곡선 $y=|\log_2 x|$는 점 $\left(\dfrac{1}{4},\ 2\right)$를 지난다.



위의 그림에서 $y=-x+2$와 $y=|\log_2 x|$의 그래프의 교점의 x좌표인 a_2는 $\dfrac{1}{4}$보다 크다. 즉, $a_2>\dfrac{1}{4}$이다.

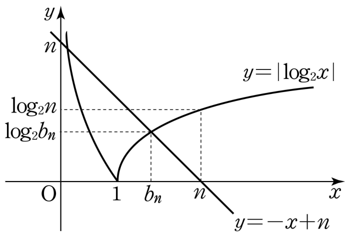
ㄴ. (참)



위의 그림에서 $y=-x+n$과 $y=|\log_2 x|$의 그래프의 교점의 x좌표인 a_n은 $y=-x+n+1$과 $y=|\log_2 x|$의 그래프의 교점의 x좌표인 a_{n+1}보다 크다.

$\therefore\ a_{n+1}<a_n \quad \therefore\ 0<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$

ㄷ. (참)



위의 그림에서 $\log_2 b_n < \log_2 n$

$\therefore\ n-\log_2 b_n > n-\log_2 n$ …… ㉠

이때, $-b_n+n=\log_2 b_n$에서 $n-\log_2 b_n=b_n$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $b_n > n-\log_2 n$

한편, 위의 그림에서 $b_n < n$이므로 $n-\log_2 n < b_n < n$

위의 부등식을 자연수 n으로 나누면 $1-\dfrac{\log_2 n}{n} < \dfrac{b_n}{n} < 1$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

002

[정답] 54

점 A 의 x 좌표를 a 라 하면 점 $\mathrm{A}(a,\ 2)$는 곡선 $y=\log_2 4x$ 위의 점이므로

$2=\log_2 4a$, 곧, $a=1$이다.

따라서 점 A 의 좌표는 $(1,\ 2)$, 점 B 의 x 좌표를 b 라 하면 점 $\mathrm{B}(b,\ 2)$는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로

$2=\log_2 b$, 곧, $b=4$이다.

따라서 점 B 의 좌표는 $(4,\ 2)$

점 C 의 x 좌표를 c 라 하면 점 $\mathrm{C}(c,\ k)$는 곡선 $y=\log_2 4x$ 위의 점이므로

$k=\log_2 4c$, 곧, $c=2^{k-2}$이다.

따라서 점 C 의 좌표는 $(2^{k-2},\ k)$

점 D 의 x 좌표를 d 라 하면 점 $\mathrm{D}(d,\ k)$는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로

$k=\log_2 d$, 곧, $d=2^k$이다. 따라서 점 D 의 좌표는 $(2^k,\ k)$

점 E 의 x 좌표는 점 B 의 x 좌표와 같으므로 4 이고, 점 E 가 선분 CD 를 $1:2$ 로 내분하므로

$4=\dfrac{1\times 2^k+2\times 2^{k-2}}{1+2}=\dfrac{2\times 2^{k-1}+2^{k-1}}{3}=2^{k-1}$

$2^2=2^{k-1} \Rightarrow k=3$

따라서 $\mathrm{C}(2,\ 3)$, $\mathrm{D}(8,\ 3)$, $\mathrm{E}(4,\ 3)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=6$, $\overline{\mathrm{BE}}=1$이고,

사각형 ABDC 의 넓이 S는 $S=\dfrac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}})\times\overline{\mathrm{BE}}=\dfrac{1}{2}\times(3+6)\times 1=\dfrac{9}{2} \Rightarrow$ 따라서 $12S=54$이다.

003

[정답] ④

두 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$와 $y=(\sqrt{2})^x+a$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 직선 AB는 직선 $y=x$에 수직이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(2t,\ t)\ (t>0)$이라 하면 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(t,\ 2t)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}\,t$이다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\frac{3}{2}t,\ \frac{3}{2}t\right)$

삼각형 OAB는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$인 이등변삼각형이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$6=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\,t\times\frac{3\sqrt{2}}{2}t=\frac{3}{2}t^2$이므로 $t=2$

즉 $\mathrm{A}(4,\ 2)$가 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$ 위의 점이므로

$2=\log_{\sqrt{2}}(4-a)$, $(\sqrt{2})^2=4-a$

따라서 구하는 상수 a의 값은 2이다.

004

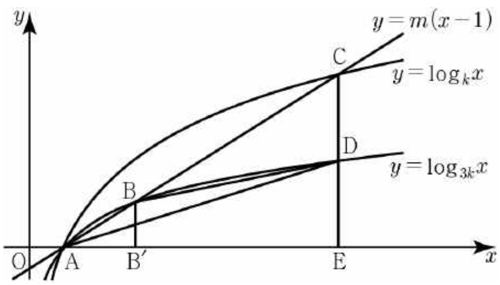
[정답] 12

조건 (가)에 의하여 삼각형 ADB의 넓이를 S라 하면 삼각형 BDC의 넓이는 $3S$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:3$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=3\overline{\mathrm{AB}}$이고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 B′이라 하면 $\overline{\mathrm{B'E}}=3\overline{\mathrm{AB'}}$이다.

$\overline{\mathrm{AB'}}=a$라 하면 $\overline{\mathrm{B'E}}=3a$이므로

$\mathrm{B}(a+1,\ \log_{3k}(a+1))$, $\mathrm{C}(4a+1,\ \log_k(4a+1))$, $\mathrm{D}(4a+1,\ \log_{3k}(4a+1))$ 이다.



조건 (나)에 의하여 삼각형 AED의 넓이는 $4S$이고 삼각형 AEC의 넓이는 $8S$이므로 D는 선분 CE의 중점이다.

$\log_k(4a+1)=2\log_{3k}(4a+1) \Rightarrow \frac{\log_k(4a+1)}{\log_k k}=\frac{2\log_k(4a+1)}{\log_k 3k}$

$\log_k 3k=2$에서 $k^2=3k$이므로 $k=3$

세 점 A, B, C가 직선 $y=m(x-1)$ 위에 있으므로

$m=\frac{\log_9(a+1)-0}{(a+1)-1}=\frac{\log_3(4a+1)-0}{(4a+1)-1}$에서

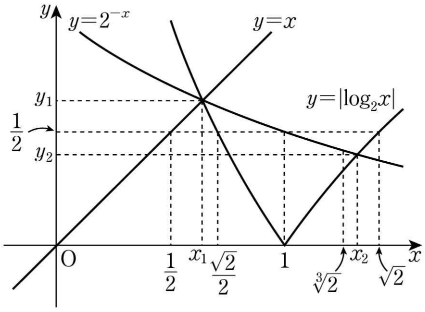
$2\log_3(a+1)=\log_3(4a+1) \Rightarrow (a+1)^2=4a+1$

$a^2-2a=0$이고, $a>0$이므로 $a=2 \Rightarrow m=\frac{\log_9 3}{2}=\frac{1}{4}$, 따라서 $\frac{k}{m}=12$

005

[정답] ⑤

$y=2^{-x}$, $y=\left|\log_2 x\right|$, $y=x$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $0<x<1$일 때, 두 곡선 $y=2^{-x}$, $y=-\log_2 x$의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$x_1=y_1$이고 $x_1<1$, $y_1<1$

그림에서 $y=2^{-x}$은 감소함수이므로 $2^{-1}<2^{-x_1}=y_1$ 즉, $\dfrac{1}{2}<y_1=x_1$

한편, $-\log_2\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}<y_1=-\log_2 x_1$이고

$y=-\log_2 x$는 감소함수이므로 $x_1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ 그러므로 $\dfrac{1}{2}<x_1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (참)

ㄴ. $2^{-\sqrt[3]{2}}=\dfrac{1}{2^{\sqrt[3]{2}}}$이고 $\log_2\sqrt[3]{2}=\dfrac{1}{3}$

그런데 $8<9$이므로 $2^{\frac{3}{2}}<3$ …… ㉠

$\sqrt[3]{2}$와 $\dfrac{3}{2}$을 각각 세제곱하면 $(\sqrt[3]{2})^3<\left(\dfrac{3}{2}\right)^3$이므로 $\sqrt[3]{2}<\dfrac{3}{2}$ 즉, $2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}$…… ㉡

㉠, ㉡에서 $2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}<3$이므로 $\log_2\sqrt[3]{2}<2^{-\sqrt[3]{2}}$ $\Rightarrow$ 그러므로 $\sqrt[3]{2}<x_2$

또, $\log_2\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}$, $2^{-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2^{\sqrt{2}}}$

$\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{2^{\sqrt{2}}}$이므로 $\log_2\sqrt{2}>2^{-\sqrt{2}}$

그림에서 $x_2<\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ 그러므로 $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$ (참)

ㄷ. $y_1=x_1$이므로 ㄱ에서 $\dfrac{1}{2}<y_1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$y_2=\log_2 x_2$이고 $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$,

$\log_2\sqrt[3]{2}<\log_2 x_2<\log_2\sqrt{2}$이므로 $\dfrac{1}{3}<y_2<\dfrac{1}{2}$

그러므로 $y_1-y_2<\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{6}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

006

[정답] ③

ㄱ. $\log_2|kx_1| = \log_2(x_1+4)$에서 $x_1 < 0$이므로

$$-kx_1 = x_1+4,\ x_1 = \frac{-4}{k+1}$$

$\log_2|kx_2| = \log_2(x_2+4)$에서 $x_2 > 0$이므로

$$kx_2 = x_2+4,\ x_2 = \frac{4}{k-1}$$

$x_2 = -2x_1$에서 $\dfrac{4}{k-1} = \dfrac{8}{k+1}$, $k+1 = 2k-2$, $k=3$ (참)

ㄴ. $\log_2|kx_2| = \log_2(-x_2+m)$에서 $x_2 > 0$이므로

$$kx_2 = -x_2+m,\ m = (k+1)x_2 = \frac{4(k+1)}{k-1}$$

$\log_2|kx_3| = \log_2(-x_3+m)$에서 $x_3 < 0$이므로

$$-kx_3 = -x_3+m,\quad x_3 = \frac{-m}{k-1} = \frac{-4(k+1)}{(k-1)^2}$$

그러므로

$$x_1x_3 = \frac{-4}{k+1}\times\frac{-4(k+1)}{(k-1)^2} = \left(\frac{4}{k-1}\right)^2 = {x_2}^2 \text{ (참)}$$

ㄷ. ${x_2}^2 = x_1x_3$에서 $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_3}{x_2}$, $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{-k-1}{k-1} = -1-\dfrac{2}{k-1} < -1$

$\dfrac{x_2}{x_1} = r\,(r < -1)$이라 하면 $x_2 = x_1r$, $x_3 = x_1r^2$

세 점 A, B, C의 y좌표를 각각 y_1, y_2, y_3이라 하면

두 직선 AB, AC의 기울기의 합이 0이므로

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} = \frac{\log_2|kx_2|-\log_2|kx_1|}{x_1(r-1)}+\frac{\log_2|kx_3|-\log_2|kx_1|}{x_1(r^2-1)}$$

$$= \frac{\log_2\left|\frac{x_2}{x_1}\right|}{x_1(r-1)}+\frac{\log_2\left|\frac{x_3}{x_1}\right|}{x_1(r^2-1)}$$

$$= \frac{\log_2(-r)}{x_1(r-1)}+\frac{2\log_2(-r)}{x_1(r^2-1)} = 0$$

에서 $1+\dfrac{2}{r+1} = 0$, $r = -3$

$x_2 = x_1r$에서 $\dfrac{4}{k-1} = \dfrac{12}{k+1}$, $k+1 = 3k-3$, $k=2$이고,

$m = \dfrac{4(k+1)}{k-1} = 12$이므로 $m+k^2 = 16$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

007

[정답] ⑤

점 A 의 좌표는 $(k,\ 2^{k-1}+1)$ 이고 $\overline{AB}=8$ 이므로 점 B 의 좌표는 $(k,\ 2^{k-1}-7)$ 이다.

직선 BC 의 기울기가 -1 이고 $\overline{BC}=2\sqrt{2}$ 이므로 두 점 B, C 의 x 좌표의 차와 y 좌표의 차는 모두 2 이다.

따라서 점 C 의 좌표는 $(k-2,\ 2^{k-1}-5)$ 이다.

한편 점 C 는 곡선 $y=2^{x-1}+1$ 위의 점이므로

$2^{k-3}+1=2^{k-1}-5$

$\frac{1}{2}\times 2^k-\frac{1}{8}\times 2^k=6,\ 2^k=16$

$k=4$

즉, $A(4,\ 9)$, $B(4,\ 1)$, $C(2,\ 3)$ 이다.

점 B 가 곡선 $y=\log_2(x-a)$ 위의 점이므로

$1=\log_2(4-a),\ 4-a=2,\ a=2$

점 D 의 x 좌표는 $x-2=1$ 에서 3

사각형 ACDB 의 넓이는 두 삼각형 ACB, CDB 의 넓이의 합이고 $\overline{BC}\perp\overline{BD}$ 이므로

$\frac{1}{2}\times 8\times 2+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=10$

008

[정답] ⑤

두 점 A , B 의 좌표를 각각 $A(a,\ \log_2 2a)$, $B(b,\ \log_2 4b)$ $(a<b)$ 라 하자.

직선 AB 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{\log_2 4b-\log_2 2a}{b-a}=\frac{1}{2}$ 에서

$\log_2 4b-\log_2 2a=\frac{1}{2}(b-a)$

$\overline{AB}=\sqrt{(b-a)^2+(\log_2 4b-\log_2 2a)^2}=\sqrt{(b-a)^2+\frac{1}{4}(b-a)^2}$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\times(b-a)=2\sqrt{5}$

$b-a=4$ ⋯ ㉠

$\log_2 4b-\log_2 2a=\log_2\frac{2b}{a}=2$, $b=2a$ ⋯ ㉡

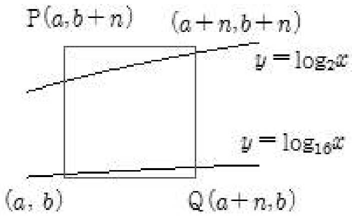
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=4$, $b=8$

$A(4,\ 3)$, $B(8,\ 5)$, $C(4,\ 0)$

따라서 삼각형 ACB 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$

009

[정답] ①



한 변의 길이가 3이거나 4인 꼭짓점의 좌표가 모두 자연수인 정사각형의 변은 그림과 같이 좌표축에 평행인 것뿐이다.

네 꼭짓점의 좌표를 그림과 같이 두면, 점 P 는 $y=\log_2 x$ 위에, Q 는 $y=\log_{16}x$ 아래에 있을 때 조건 (나)를 만족한다.

따라서 $\log_2 a < b+n$, $b<\log_{16}(a+n)$

즉, $a<2^{b+n}$, $a+n>2^{4b}$ 이므로 $2^{4b}-n<a<2^{b+n}$이다.

(ⅰ) $n=3$이면 $2^{4b}-3<a<2^{b+3}$ 에서

$b=1$이면 $16-3<a<16$ -- $a=14$, 15

$b\geq 2$이면 $2^{4b}-3>2^{b+3}$이므로 불가능, $\therefore\ a_3=2$

(ⅱ) $n=4$이면 $2^{4b}-4<a<2^{b+4}$ 에서

$b=1$ 이면 $16-4<a<32$ -- $a=13$, $\cdots$, 31

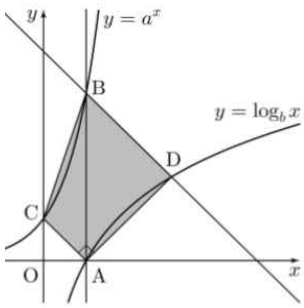
$b\geq 2$이면 $2^{4b}-4>2^{b+4}$이므로 불가능, $\therefore\ a_4=19$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\therefore\ a_3+a_4=2+19=21$

010

[정답] ②



A$(1, 0)$, B$(1, a)$, C$(0, 1)$, D$(k, k-1)$에서

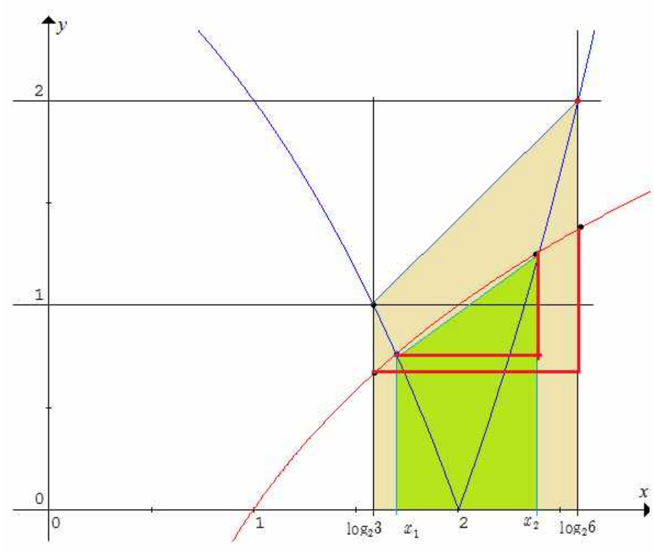
$1+a=k+(k-1)$, $6=\dfrac{1}{2}\times a\times k$, $k-1=\log_b k$

을 연립하여 풀면 $k=3$, $a=4$, $b=\sqrt{3}$

$\therefore\ ab=4\sqrt{3}$

011

[정답] ②



ㄱ. 그림에서 $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$ 임은 자명하다.

ㄴ. 그림에서 색칠한 사다리꼴의 넓이에서 $\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(2^{x_2} - 2^{x_1}) < \frac{3}{2}$이다.

ㄷ. 그림에서 빨간 직각삼각형의 높이에서

$(2^{x_2} - 4) - (4 - 2^{x_1}) < \log_2(\log_2 6) - \log_2(\log_2 3)$

$2^{x_1} + 2^{x_2} < 8 + \log_2(\log_3 6)$

012

[정답] ②

ㄱ. $x = -1$을 대입하면 $|a^0 - 1| = 0$ (참)

ㄴ. $x < -1$인 곳에서는 교점이 반드시 생긴다.

$x > 0$인 곳에서 교점을 조사해 보면,

$a^x = 1 - a^{x-1}$, $a^x + a^{-x-1} = 1$

이때 산술-기하 평균에서 $a^x + a^{-x-1} \geq 2\sqrt{a^{-1}}$이므로 $a = 4$일 때 등호 성립조건에 부합한다.

따라서 $4^x = 4^{-x-1}$ 즉, $x = -\frac{1}{2}$에서 접하고, 그러므로 두 점에서 만난다. (참)

ㄷ. $x < -1$에서의 교점은 -2보다 크고 -1보다 작다.

$x > -1$에서의 교점은 $a^x = 1 - a^{x-1}$을 풀면 $t = 1 - \frac{1}{at}$ ($\because$ $a^x = t$로 치환)

즉, $at^2 - at + 1 = 0$, 이때 $a^\alpha \times a^\beta = \frac{1}{a} = a^{-1}$이므로 두 근의 합은 -1이다.

따라서 모든 교점의 x좌표의 합은 -3과 -2 사이이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

013

[정답] ①

점 A의 x좌표는 64이고 점 Q_1의 x좌표는 x_1이다.

이때 두 점 A와 P_1의 y좌표가 같으므로

$2^{64}=16^{x_1}$에서

$2^{64}=2^{4x_1}$

$4x_1=64$에서

$x_1=16$

같은 방법으로 모든 자연수 n에 대하여 두 점 P_n, Q_n의 x좌표는 x_n으로 서로 같고, 두 점 Q_n, P_{n+1}의 y좌표는 같으므로

$2^{x_n}=16^{x_{n+1}}$

즉,

$2^{x_n}=2^{4x_{n+1}}$

이므로

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n$$

따라서 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 16, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$x_n=16\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=2^4\times2^{-2n+2}=2^{6-2n}$$

한편,

$x_n<\frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이므로

$x_5\geq\frac{1}{k}$이고 $x_6<\frac{1}{k}$

이어야 한다.

$x_5\geq\frac{1}{k}$에서 $2^{-4}\geq\frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{16}\geq\frac{1}{k}$에서 $k\geq16$ …… ㉠

$x_6<\frac{1}{k}$에서 $2^{-6}<\frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{64}<\frac{1}{k}$에서 $k<64$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $16\leq k<64$이므로 자연수 k의 개수는 $64-16=48$이다.