2024학년도 장시인 모의고사 4회 15번.

모든 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 수열 a_n은 다음 조건을 만족한다.

(가) $n-1 \leq x < n$에서 $f'(x) = a_n\ (a_n \leq 2k)$이고, $f(2n-2) = 2kn-2k$이다.
(나) $\displaystyle\sum_{m=1}^{2024}\left(a_{2m-1} + a_{2m} - \frac{k}{1012}\right) = \sum_{m=1}^{2023}(a_{2m-1} - a_{2m})$이다.

$\displaystyle\int_0^{4048} f(x)dx = 4047 \times 2025k$, $f(4047) = 4047 + k$일 때, $k = \dfrac{q}{p}$이다. $q-p$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2024학년도 장시인 모의고사 4회 15번 해설.

모든 자연수 n에 대하여 성립하는 수열이 제시되었으므로 대입을 통해 양상을 관찰한다.

$n=1$ 대입: $0 \leq x < 1$에서 $f'(x) = a_1$이다. $f(0) = 0$이다.

$n=2$ 대입: $1 \leq x < 2$에서 $f'(x) = a_2$이다. $f(2) = 2k$이다.

$n=3$ 대입: $2 \leq x < 3$에서 $f'(x) = a_3$이다. $f(4) = 4k$이다.

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

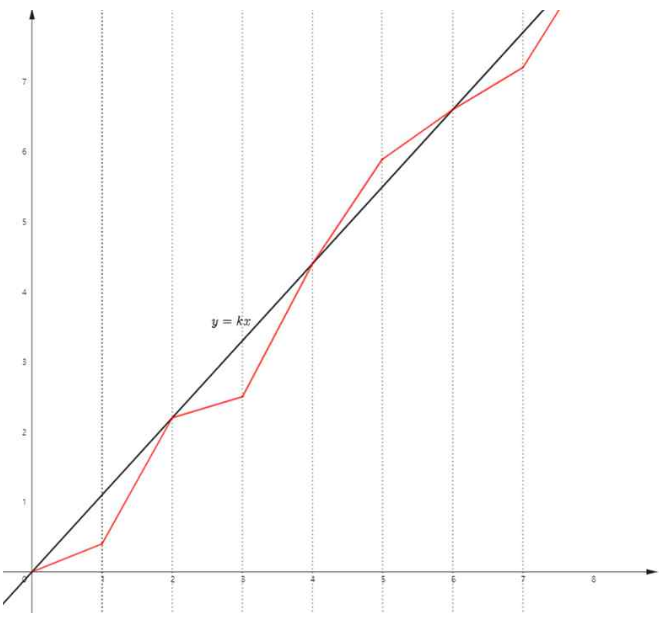
이하의 과정을 통해 자연수를 기점으로 구간별로 정의된 함수의 기울기가 달라짐을 알 수 있다.

또한, a_n의 각 항들은 상수이고 $f(x)$가 연속이므로 $f(x)$는 기울기가 다른 직선들이 무수히 많이 이어져 있는 함수이다.

$f(2n-2) = k(2n-2)$의 식 정리 혹은 위와 같은 귀납적 대입으로 $f(x)$와 $y = kx$가

$x = 0, 2, 4, 6 \cdots$에서 교점을 가짐을 알 수 있다.

따라서 $f(x)$는 일반적으로 아래와 같은 개형이다.



여기서 일반성을 잃지 않고 함수 $f(x)$가 점 $(1, p)$를 지난다고 가정하면 $a_1 = p$이다.

이때 $a_2 = \frac{2k-p}{1}$이므로 $2k-p$고, (나)에서 $a_{2k-1} + a_{2k}$(k는 자연수) 형태가 관찰되므로 두 항의 합을 구하면 $a_1 + a_2 = 2k$이다.

이후의 함수에서도 개형이 같은 방식으로 전개된다.

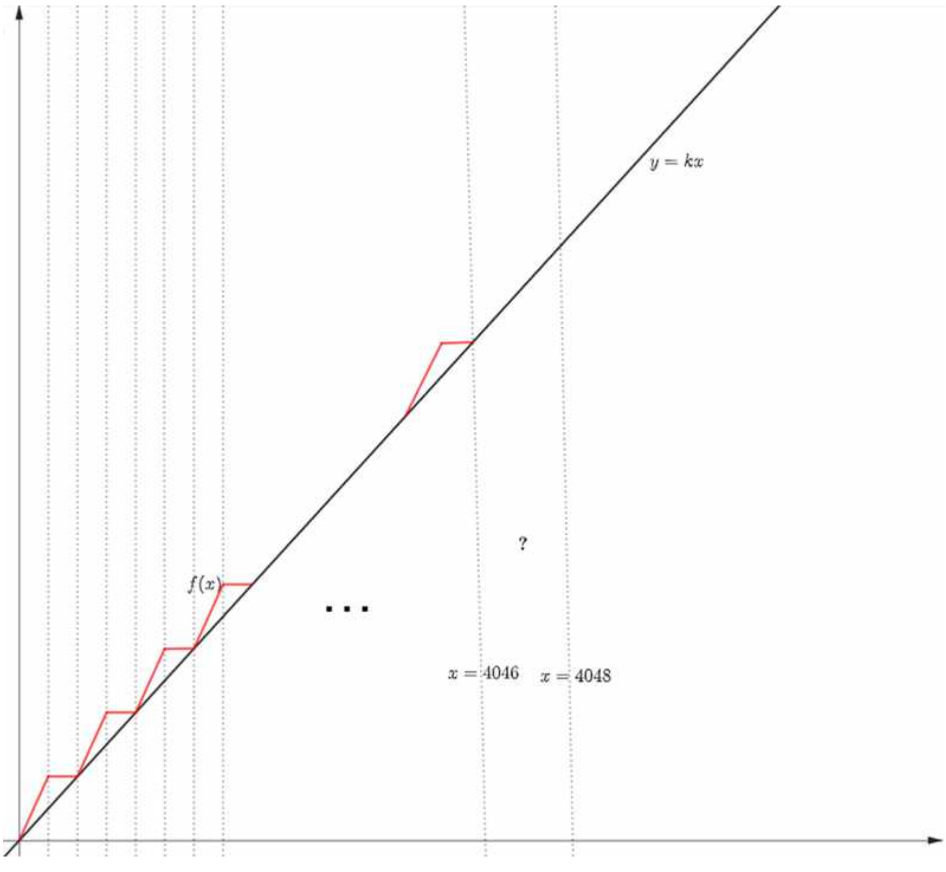
$\therefore a_{2k-1} + a_{2k}$은 항상 $2k$로 같다.

$$\sum_{m=1}^{2024} \left(a_{2m-1} + a_{2m} - \frac{k}{1012}\right) = \sum_{m=1}^{2024} \left(2k - \frac{k}{1012}\right) = 4046k$$

$a_{2m-1} + a_{2m}$을 구했고 a_n의 최댓값을 알고 있으므로 $a_{2m-1} - a_{2m}$의 범위를 구할 수 있다.

a_{2m-1}이 최대가 될 때 a_{2m}은 최소가 되고 $a_{2m-1} = 2k$, $a_{2m} = 0$으로 $a_{2m-1} - a_{2m}$도 최대이다.

이때 $\sum_{m=1}^{2023} (a_{2m-1} - a_{2m})$의 값이 $\sum_{m=1}^{2023} 2k = 4046k$로 등식을 만족시키므로, 함수 $f(x)$는 $x = 4046$까지 기울기가 $2k$, 0으로 번갈아 나오는 함수이다.



문제에서 $x = 4048$까지 정적분 값을 제시하고 있으므로 $x = 4046$부터 $x = 4048$까지 범위의 아직 정해지지 않은 부분을 구할 수 있다.

$\int_0^{4046} f(x)$의 값은 $y = kx$ 아래 부분의 큰 삼각형의 넓이에서 $y = kx$ 위쪽 부분의 작은 삼각형의 넓이를 2023배 한 값을 더하면 구해지므로, $\frac{1}{2} \times 4046 \times 4046k + 2023 \times k = 2023 \times 4047k$이다.

즉, 남은 부분에서 $2\times4047k$의 정적분 값이 나와야 한다.
이때 $x=4046, x=4048$과 $y=kx$ 및 x축으로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이는 $4047k\times2$이므로 위에서 구한 값과 같다. 즉, $4046\le x<4048$에서 $f(x)=kx$이다.
따라서 $f(4047)=4047+k$에서 $4047k=k+4047, 4046k=4047$이다.
$k=\dfrac{4047}{4046}$이고 분모와 분자의 두 수가 연속하는 자연수로 서로소이므로, 정답은 1이다.