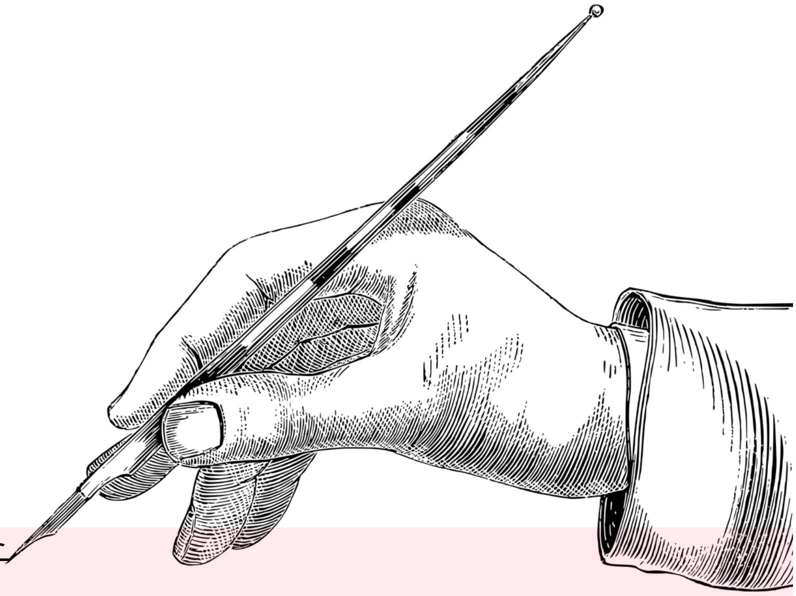


합성 함수

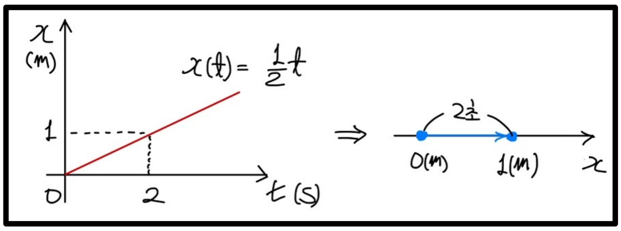
24 수능 미적분 대비 version

By URdokzon

합성함수

$f(g(x))$ $\rightarrow$ f의 정의역 자리에 g가 들어있는 형태입니다. 일반적으로 이때 f를 겉함수, g를 속함수라고 칭합니다. 중요한 것은 결국 g가 f의 정의역 역할을 한다는 것입니다.

이때 세세히 생각해보면, $(f \circ g)(x)$가 정확한 형태이므로, x라는 정의역을 갖는 g라는 함수의 치역인 $g(x)$가 f의 정의역이 되는 것이므로, g의 치역이 f의 정의역으로 기능합니다. 이를 완전히 이해하기 위해 이제 수2나 미적분 끝 단원인 위치-속도-가속도 그래프의 내용을 들고 와보겠습니다.



그림이 조금 어설프지만, 일단 보겠습니다. 간단한 위치-시간 그래프입니다. $x(t)=\dfrac{1}{2}t\ (0 \leqq t \leqq 2)$ 점이 0초 때 원점에 있다가, 2초 동안 오른쪽으로 $1(\mathrm{m})$지점까지 이동한 것을 그래프로 나타냈네요. 속도는 그래프의 기울기인 $\dfrac{1}{2}\mathrm{m/s}$로 일정한 등속도 운동을 했습니다. 즉, $x(t)$그래프가 좌표 '평면'에 있다고 해서 점의 운동이 평면에서 일어나는 것이 아니라 오른쪽 그림처럼 점의 운동은 수직선인 x축에서만 일어난다는 겁니다. 즉, $x(t)$의 치역이 그대로 점이 운동하는 x축 (정의역)으로 반영됩니다.
이때 그래프의 기울기는 점의 이동속도를 반영할 뿐, 점의 자취에 대해서는 아무 영향을 끼치지 못합니다. 그래프가 구불구불하게 증가했다고 하더라도 시작점이 0이고 도착점의 치역이 1이면 결국엔 x축 위를 $0 \sim 1$만큼 이동했다는 것이니 결국 자취는 똑같이 사진의 파란색 화살표일 겁니다.

그러면 도대체 이게 합성함수랑 무슨 상관이라는 것일까요?

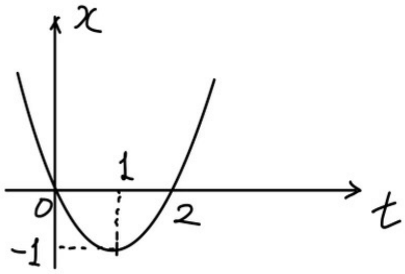
$y=f(g(x))$ $\rightarrow$ $y'=f'(g(x))\times g'(x)$이므로 도함수의 값이 0이 되는 곳은 $f'(g(x))=0$일 때와 $g'(x)=0$일 때 총 두 가지입니다. 각각 의미를 따로 따져봅시다.

$f'(g(x))=0$ $\rightarrow$ $f'(t)=0$일 때 $g(x)=t$를 만족하는 x _ Case 1.
$g'(x)=0$ $\rightarrow$ 말 그대로 $g'(x)=0$을 만족하는 x _ Case 2.

이 두 가지의 기하적 의미는 전혀 다릅니다. 실제로 합성함수를 그려보면서 이를 알아봅시다.

Question. $f(x)=x(x-2)$라고 할 때, $f(f(x))$의 그래프 모양은?

Step 1. $y=f(x)$를 잠시 $x=f(t)$로 생각하여 위치-시간 그래프로 생각해봅시다.

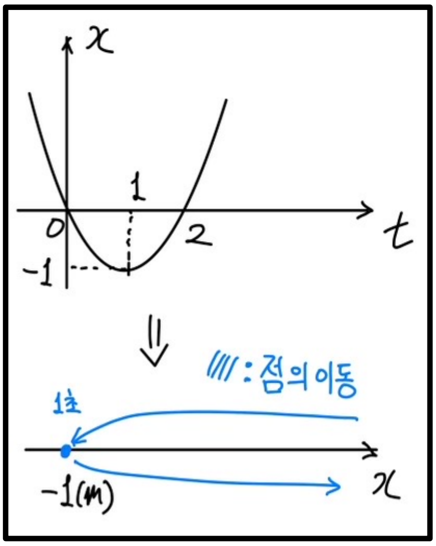


$x(t)$그래프를 해석할 건데 모양만 빌려온 것이니 시간이 음수일 때도 가능하다고 우선 생각하고 해봅시다.

$t = -\infty \to 1$: 위치가 $\infty \to (-1)$의 변화를 보이네요.
$t = 1 \to \infty$: 위치가 $(-1) \to \infty$의 변화를 보이네요.

이제 그림으로 이를 나타내봅시다.

Step 2. $x(t)$ 그래프의 의미를 생각해보며 점의 이동을 파악합시다.



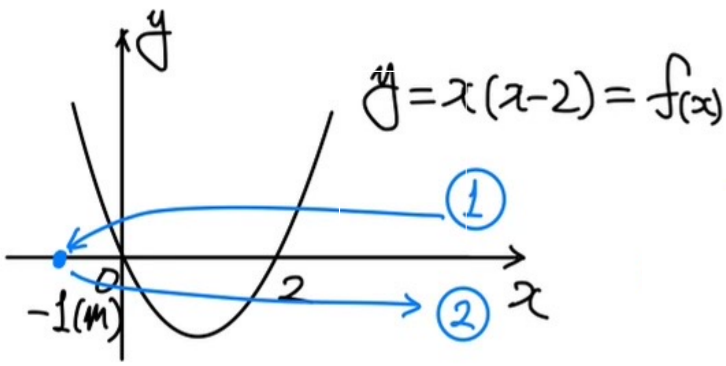
파란색이 점의 이동입니다.

한 가지 유의할 점은 점의 이동이 달라지는 경계가 $t=1$ 이라는 것입니다. 1초일 때가 관건이네요..

지금까지 우리가 해온 것은 $y=f(x)$를 $x=f(t)$라고 생각하고 $x(t)$라는 위치 그래프로 점의 이동을 파란색으로 표현한 겁니다. 그러나 우리가 최종적으로 그려야 할 것은 $f(f(x))$입니다. 이를 $f(f(t)) = \{y=f(x)\} \circ \{x=f(t)\}$로 생각하고 그림을 그립시다.

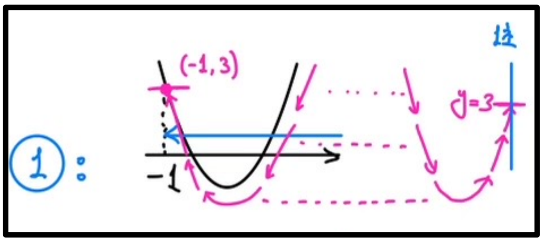
우리가 찾은 $x=f(t)$ 즉 파란색 점의 이동을 그대로 $y=f(x)$의 정의역에 넣어서 그리면 합성함수를 그릴 수 있다는 겁니다.

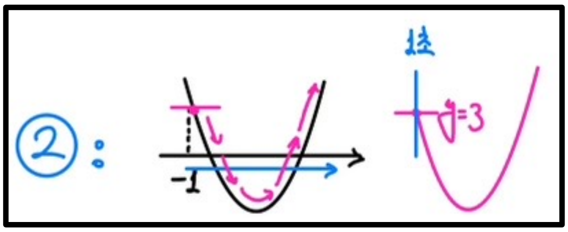
파란색 점의 이동이 바로 속함수의 치역이니까요. 이때 기울기는 중요하지 않습니다. 단순히 얼마에서 얼마로 단조 증가 단조 감소하느냐를 경계만 잘 나누어 표기하면 됩니다. 우리가 그리는 것은 그냥 그래프 즉, 점의 자취이지 속도는 필요 없으니까 말이에요. 이를 그림으로 표현해보겠습니다.



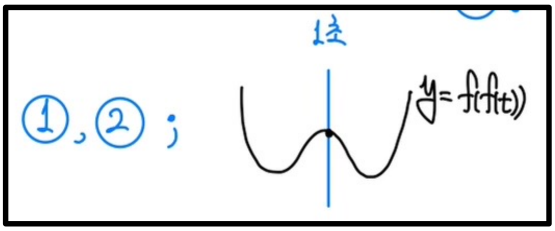
Step 3. 점의 이동에 따라 겉함수를 읽으면서 합성함수를 그립시다.

속함수 $x=f(t)$의 치역을 ①과 ②로 나누었습니다. 각각 $\infty \to (-1)$ / $(-1) \to \infty$의 변화입니다.





파란색이 $x=f(t)$, 분홍색이 새로 그려질 $y=f(f(t))$의 그래프입니다. 이제 둘을 합쳐야겠죠.

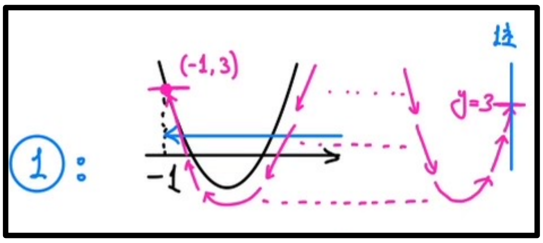


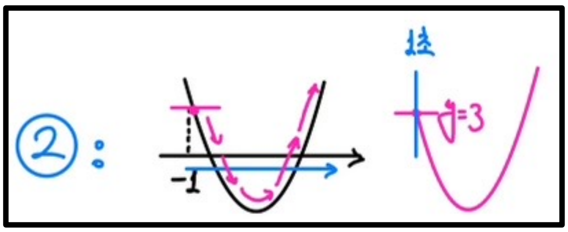
여기서 한 가지 의문이 들어야 합니다. 분명히 각각의 그림을 보아 1초의 경계 좌우에서 첨점을 가졌는데 왜 둥글게 둘을 연결해놨느냐는 겁니다.

그 이유는 앞서서 나누었던 Case 1과 Case 2 때문입니다.

$f'(g(x))=0$ $\to$ $f'(t)=0$일 때 $g(x)=t$를 만족하는 x _ Case 1.
$g'(x)=0$ $\to$ 말 그대로 $g'(x)=0$을 만족하는 x _ Case 2.

Case 1의 경우 우리가 그린 그림에서 어떤 것을 의미하는지 살펴봅시다.





겉함수의 극점을 속함수가 지나는 것이 Case 1의 의미입니다. 위의 두 그림에서 파란색의 속함수가 검은색의 겉함수를 지나는 상황이니 결국 Case 1의 극점은 분홍색 그래프들의 각각의 극점일 겁니다.

그러나 Case 2의 경우 속함수 $x=f(t)$의 극점 즉, 1초라는 경계였습니다. 즉, 속함수가 의미하는 '점의 이동'이 U턴을 하는 경우를 총칭합니다. 우리는 지금까지 속함수를 바탕으로 그린 '점의 이동'을 밖

의 겉함수에 넣어 합성함수를 그려왔습니다. 이를 이용해서 다시 Case들을 해석하면,

Case 1. 점의 이동으로 그린 겉함수의 극점 $\rightarrow$ $f'(g(x))=0$
Case 2. 속함수가 U턴을 하는 기점 $\rightarrow$ $f(g(x))$에서 $g'(x)=0$

그러니까 결국 아까 따로 따로 그린 겉함수 ①과 ②를 합치는 경계는 Case 2의 근이므로 자동적으로 $g'(x)=0$에 의해 $f'(g(x)\times g'(x)$가 0이 되면서 둥글게 연결이 되는 겁니다. 따라서 속함수의 극점에 따라 경계를 나누어 Case 1을 각각 그리고, Case 2에 의해 각 그림들을 부드럽게 연결시켜주는 것이 합성함수를 그리는 방법인 겁니다.

정리해봅시다.

속함수는 모양이 중요한 게 아니라 치역만 있으면 된다는 것이죠. 따라서 겉함수의 정의역으로 작동할 수 있도록 [정의역화]의 과정으로써 경계를 나누어 시작점과 끝점을 챙길 겁니다. 아까의 상황의 경우,

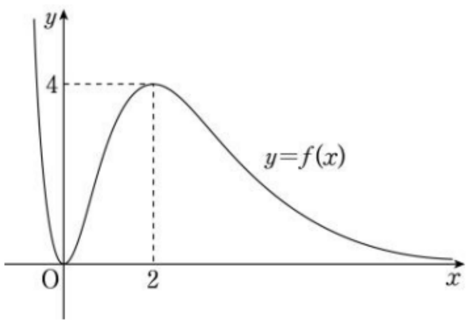
$t=-\infty\rightarrow 1:$ 위치가 $\infty\rightarrow(-1)$의 변화를 보이네요.
$t=1\rightarrow\infty:$ 위치가 $(-1)\rightarrow\infty$의 변화를 보이네요.

이 과정이 정의역화일 겁니다.

Manual _
1. 속함수의 치역을 정의역화
2. 정의역화된 속함수의 치역을 구간별로 겉함수에 대입해 그린다.
3. 각각 그린 함수들을 부드럽게 연결해준다 by Case 2

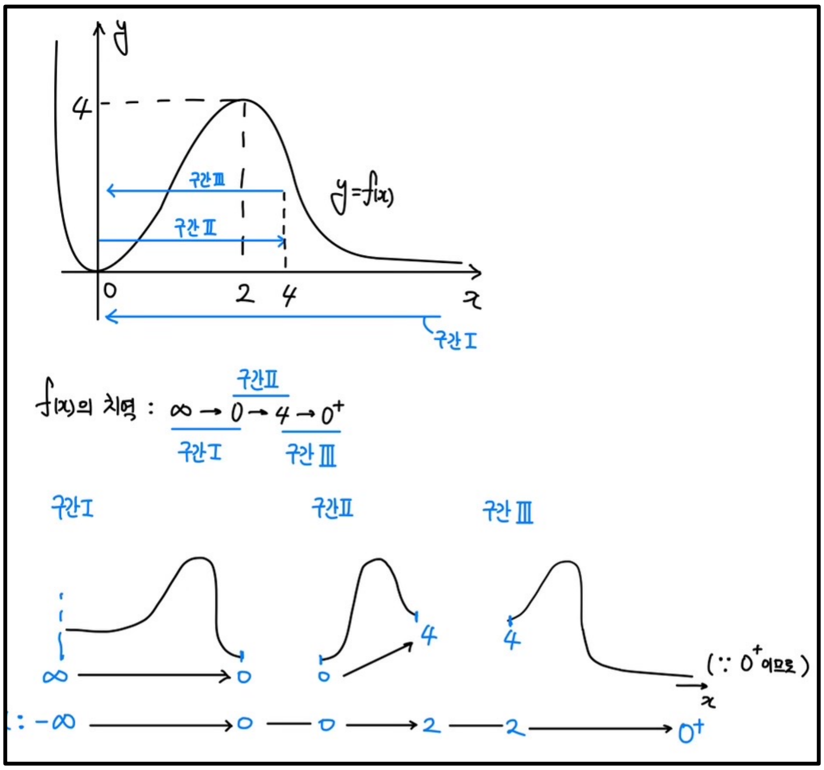
연습해봅시다.

그림은 함수 $f(x)=x^2e^{-x+2}$ 의 그래프이다.

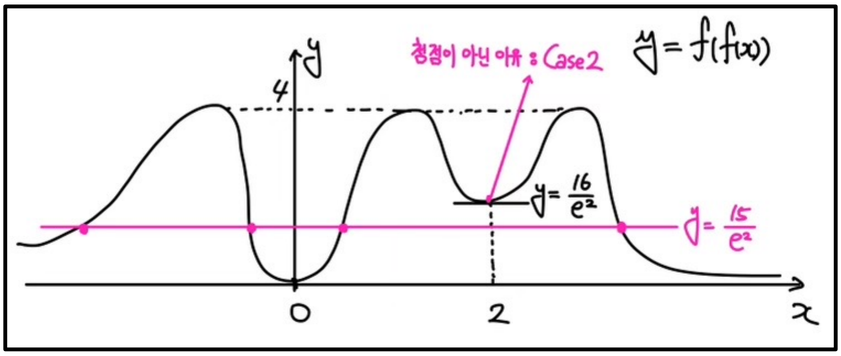


함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$ 의 교점의 개수를 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$)

1. 속함수의 치역을 정의역화한다 : $\infty \to 0 \to 4 \to 0^+$
2. 정의역화된 속함수의 치역을 겉함수에 대입해 그린다.



3. 각각 그린 함수들을 부드럽게 연결해준다.



이제 앞으로 Case 1과 Case 2가 합성함수의 극점이 생길 수 있는 모든 가능성이라는 것을 염두에 두고 문제를 풀어보고자 합니다. 합성함수를 그리지 않아도 풀리는 문제가 많지만 연습 시에는 꼭 그려보는 것을 추천합니다. 그릴 줄 안다는 건 합성함수에 대한 이해의 정도가 깊어진다는 것이기에 공부의 측면에서 그리라고 한 것이니 유념하시길 바랍니다. :)

2019.09.30. 가형

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
(나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
(다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$)

저랑 같이 풀어보겠습니다.

(가) : $h(x)$ 실근의 개수를 알려줌. → $\{\alpha | f(\alpha)=0\}$일 때, $g(x)=\alpha$의 근이 4개.
(나) : $x=0$에서의 $h(x)$의 모양을 알려줌.
(다) : $h(x)$와 $y=8$의 교점 개수를 알려줌.

과연 어떤 조건 먼저 해석해야 할까요?

(가), (다) : $h(x)$의 전체 모양을 알아야 실근 개수 구할 수 있음.
(나) : $h(x)$의 $x=0$ 주변에서의 모양만 알아도 구할 수 있음.

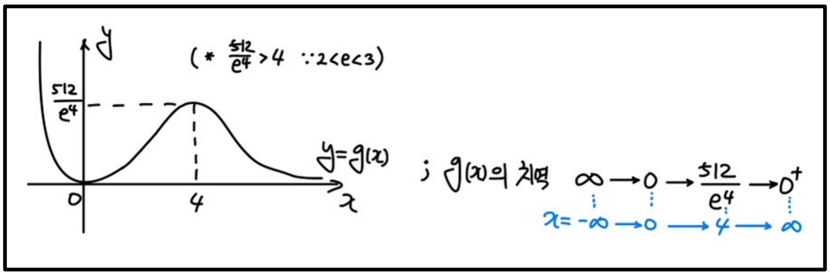
우리는 $h(x)$는커녕, $f(x)$도 그리지 못합니다.
정확히 말하면, h의 조건을 f를 구하는 데에 이용해야 답인 $f'(5)$의 값을 구하겠죠.
따라서, $h(x)$의 전체가 아닌 '일부'만을 다루는 (나) 조건을 이용해야 합니다. 방금 한 작업은 합성함수 킬러 문제에서 어떤 조건부터 건드려야 할지의 지표가 되므로 기억해둡시다.

그럼 (나) 조건부터 찬찬히 확인해봅시다.

(나) : $h(x)$는 $x=0$에서 극소를 가진다

$f(g(x))$를 미분해보면, $h'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$이네요. $g'(x)$의 부호를 $x=0$ 주변에서 살펴봅시다.

한 번 $g(x)$를 그려볼까요?



$g'(x)$는 $x=0$ 주위에서 $(-)\to(+)$.
$h'(x)$는 $x=0$ 주위에서 $(-)\to(+)$ ($\because h(x)$ has 극소)

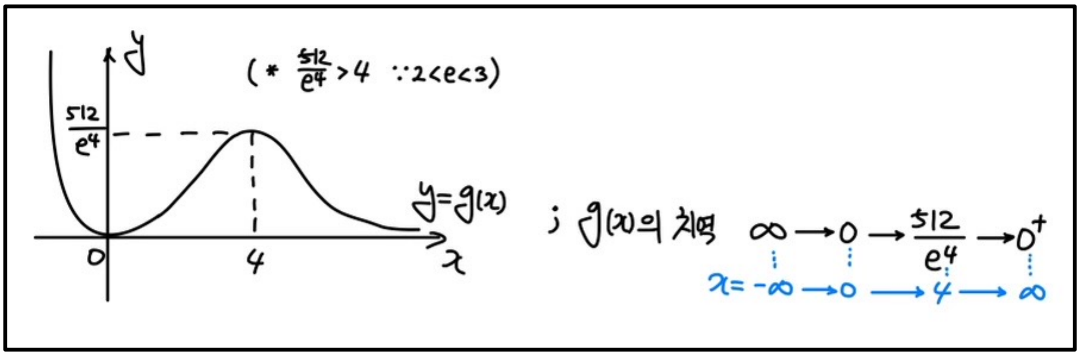
즉, $f'(g(x))$는 부호가 $x=0$ 주위에서 $(+)$
$f'(g(x))$는 $f'(\ )$의 정의역에 $g(x)$가 들어감. $g(x)$의 함숫값을 $f'(g(x))$가 새로운 합성함수라 생각하고 봅시다.

$g(x)$의 치역은 $x=0$ 주위에서 $0^+\to0\to0^+$이므로 $f'(g(x))$는 $f'(x)$를 $0^+\to0\to0^+$순으로 읽어주면 됩니다.

따라서, $x \geqq 0$에서 f의 부호는 $(+)$가 될 겁니다. 이제 다음 조건을 살펴보러 갑시다.

(가) : $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
→ $\{\alpha \mid f(\alpha)=0\}$일 때, $g(x)=\alpha$의 근이 4개. (α의 개수는 여러 개일 수 있습니다.)

$g(x)$ 그래프를 다시 생각해봅시다.



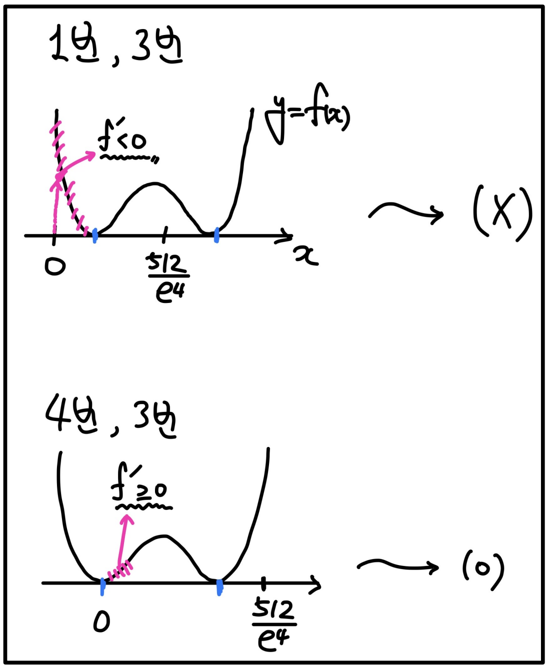
여기에 $y=\alpha$를 여러 개를 슥슥 그려서 총 교점의 개수가 4개여야 합니다.

1. $\alpha > \dfrac{512}{e^4}$: 1개
2. $\alpha = \dfrac{512}{e^4}$: 2개
3. $0 < \alpha < \dfrac{512}{e^4}$: 3개
4. $\alpha = 0$: 1개
5. $\alpha < 0$: 0개

이 여러 가지를 합쳐서 총 4개가 되어야 합니다.
살펴보시면, (1개+3개) / (2개+1개+1개)의 조합뿐이네요. 번호로 바꿀게요.
(1개+3개) : 1번과 3번, 4번과 3번
(2개+1개+1개) : 2번과 1번과 4번

α의 개수는 $f(\alpha)=0$이므로 $f(x)=0$의 근의 개수와 같습니다. (2개+1개+1개)의 조합은 근이 3개인거죠. 하지만, 발문에서 뭐라 그랬나요?

→ $f(x)$의 최솟값이 0이다. 근이 3개면 절대 최솟값이 음수일 수밖에 없습니다. 따라서, (1개+3개)의 조합만 가능합니다. 그럼 결국, 1개의 주인이 1번이나 4번이겠죠. 둘을 구별해야 합니다. 그림으로 살펴봅시다!

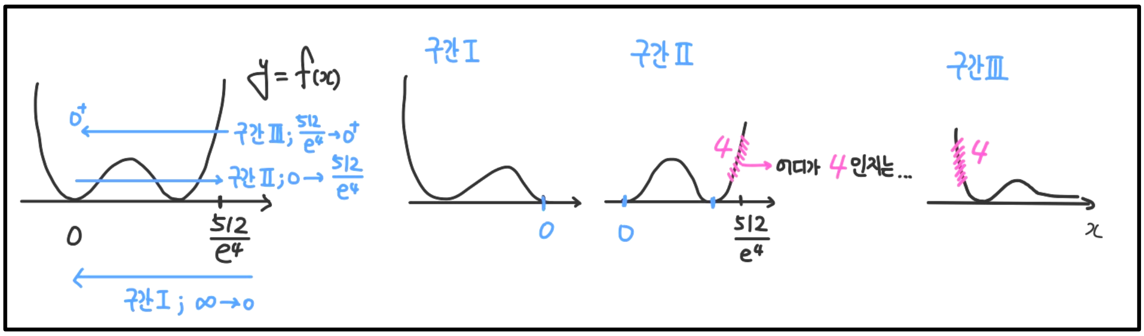


(나)로 판별됨.

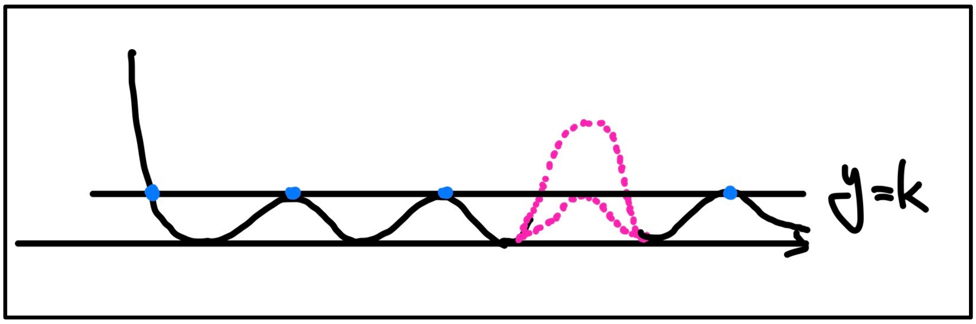
어떤 문제가 나와도 이렇게 차근차근 풀 수 있도록 ‘유형화’를 잘 해놓으시길 바랍니다.

각설하고, 이제 (다) 조건을 봐봅시다.

$h(x)=8$의 실근 개수를 알기 위해 $h(x)$를 이제 그냥 그려버립시다.
다만, ‘$f(x)=0$’의 0이 아닌 근이 정확히 나오지 않고 범위로 나와 있기 때문에 정확히는 그려지지 않을 겁니다. 그 점 감안해서 그려보자고요.



각 구간 별로 그린 걸 합칩시다. (분홍색은 높이가 미정)



$k<8$: 분홍색이 $y=8$과 최대 교점 개수인 2개를 이루어줘도 교점이 3개네요 (X)
$k=8$: 분홍색 구간 제외 4개의 교점이므로 분홍색 구간의 최댓값 > 8이면 (O)
$k>8$: 분홍색 구간 제외 7개의 교점이네요. (X)

따라서 $k=8$이 확정적이네요. 아마 분홍색 구간 최댓값을 구하면 8보다는 클텐데, 필요하면 나중에 식 세울 때 씁시다. 그렇다면 결국 겉함수인 $f(x)$, 4차함수의 극댓값$=k=8$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-p)^2$이라고 하면, 극댓값$=f(\frac{p}{2})=\frac{p^4}{32}=k=8$
$\therefore\ p^4=32\times 8 \rightarrow p=4,\ f'(5)=30$ (답)

분명히 식으로 풀어도 풀 수 있겠지만, 합성함수를 그리는 데에 익숙해진 사람은 눈으로도 슥슥 그려버릴 수 있습니다. 그렇기에, 식으로 푸는 걸 즐겨하는 사람들도 이 방법을 알고 있다면, 검토할 때 써도 되고, 케이스를 점검할 때 대충 그려보고 바로 안되는 걸 확인하면 정확하고 빠르게 합성함수 문제를 풀 수 있을 겁니다. 그리고 조건들이 함수 전체를 그려야 하는 건지, 일부분만 그려도 되는 건지에 따라 문제 풀이 순서가 달라진다는 것을 잊지 마시길 바랍니다. 마지막으로 예제 몇 개만 더 살펴봅시다.

2022학년도 9월 29번

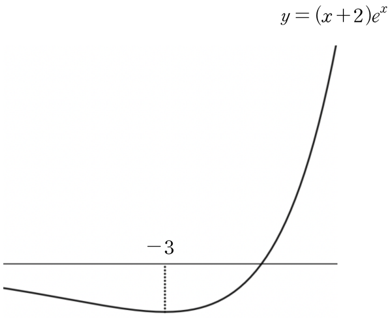
1. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x) = \{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다. (나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 실수이다.)

해설 _ 24

$g(x)=(x+2)e^{x} \circ f(x)$



(가) $g(x)$ has 최대 at $x=a$

$f(x)$가 속함수이므로 $y=(x+2)e^{x}$의 정의역이 $y=f(x)$의 치역이다. 한편, $f(x)$는 이차함수이므로 최대가 있거나 최소가 존재한다. $y=(x+2)e^{x}$가 최대가 존재하려면, 정의역의 최소가 존재해야 한다 ($\because$ $g(\infty)=\infty$, $g(-\infty)=0-$)

$\rightarrow$ $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수, $f'(a)=0$

$f(x)$의 치역: $-\infty \rightarrow f(a) \rightarrow -\infty$

$g(x)$가 최소를 가지려면 겉함수인 $y=(x+2)e^{x}$의 최소를 $f(x)$가 지나야 한다.

$\therefore$ $x=b, b+6$에서 $f(x)$는 $y=-3$과 만난다. $\rightarrow$ $\dfrac{(b+(b+6))}{2}=a=b+3$

$f(x)$는 최대인 $x=b+3$에서 x축 방향으로 3 이동하면, y좌표가 -9 변한다.

$f(x)$를 평행이동하여 꼭짓점을 원점으로 가져왔다고 생각하면 $(3, -9)$를 지나는 것이므로 최고차항의 계수가 -1임을 바로 알 수 있다.

$f(x)=0$이려면 꼭짓점인 $x=b+3$ 기준으로 y좌표가 -6 변했으므로 x좌표는 $\sqrt{6}$ 변해야 한다.

$\therefore$ $(\alpha-\beta)^{2}=(\sqrt{6}-(-\sqrt{6}))^{2}=24$ (답)

2021학년도 수능 30번

2. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2 \pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.

(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고, 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$ 일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)

해설 _ 29

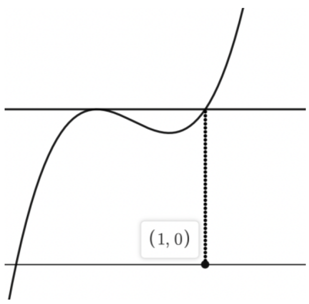
$h(x)=\sin^2\pi x$라고 하자. $g(x)=(f\circ h)(x)$

(가): $g(x)$의 극대가 3개면, 사이사이에 최소한 극소가 2개 존재한다.
따라서 극점이 5개 이상임을 알 수 있다.
$g'(x)=f'(h(x))\times h'(x)$ $\rightarrow$ $0<x<1$에서 $h(x)$의 치역은 $0\rightarrow1\rightarrow0$이다.
$h'(x)=0$의 근의 개수는 $0<x<1$에서 1개이다. 따라서 $f'(h(x))$에서 4개 이상이 있어야 한다. $0\rightarrow1$에서 $f'(x)=0$의 근의 개수가 2개 이상이어야 한다.

$f(x)$는 3차이므로 2개가 최대 개수이다. 따라서, $0<x<1$: $f(x)$의 극점 2개가 모두 O
이때 극대가 만들어질 수 있는 경우의 수는 $f(x)$의 극대를 $h(x)$가 지나거나, $f(x)$가 증가하는 부분에서 $h(x)$가 극대여야 한다.

(나): $g(x)$의 최대가 $\frac{1}{2}$이고,

이를 (가)와 연관지어 그림을 그리면 다음과 같다.



$y=\frac{1}{2}$

문제는 (나)의 '$g(x)$ 최소가 0'이라는 조건이다.

겉함수인 $f(x)$의 정의역이 현재 $0\rightarrow1$이므로,
최소는 $f(x)$의 극소이든지, $f(0)$이든지 둘 중 하나이다.

이는 $x=0$의 위치가 어디인지가 중요하다.

ⅰ) $f(x)$의 극솟값이 0일 때
삼차함수의 높이가 $\frac{1}{2}$이다. $4\times1\times(k)^3=\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $k=\frac{1}{2}$ 이러면 $x=0$이 변곡점이다.
그러면 (가)에서 $0<x<1$에 $f(x)$의 극대가 없고 극소만 있으므로 모순이다.

ⅱ) $f(0)=0$일 때
$f(x)$의 한 칸을 k라고 하자. 0과 1 사이에 $3k$가 있으므로 $0<3k<1$

$$f(x)=(x-(1-3k))^2(x-1)+\frac{1}{2}$$

$$f(0)=(3k-1)^2\times(-1)+\frac{1}{2}=0 \rightarrow (3k-1)^2=\frac{1}{2} \rightarrow k=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ (\because 3k<1)$$

$$\therefore\ f(2)=\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(2-1)+\frac{1}{2}=5-2\sqrt{2} \rightarrow 5^2+(-2)^2=29 \text{ (답)}$$

2017년 7월 교육청 가형 30번

3. 상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수인 이차함수 $f(x)$가 있다. 함수 $g(x)$가

$$g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}$$

일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $4\sqrt{e}$이다.
(다) 방정식 $g(x)=4\sqrt{e}$의 근은 모두 유리수이다.

$|f(-1)|$의 값을 구하시오.

해설 _ 71

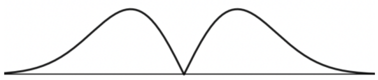
$f(x)$와 $f'(x)$가 같이 있을 때는 대칭성을 중심으로 봐야 한다. → $f(x)=a(x-b)^2+c$

$g(x)=|2a(x-b)|e^{a(x-b)^2+c}$ → $x=b$ 대칭, $x=b$에서 첨점 (극소)

(가): $g(x)$ has 극소 at $x=2$

(나): $g(x)$ has 최대(극대) → $a>0$면, $g(\infty)=\infty$ $\therefore\ a\leq 0$

이를 토대로 $g(x)$를 그려보자.



→ $b=2$

$y'=2a\left(1+2a(x-2)^2\right)e^{a(x-2)^2+c}$ → 극대 at $(x-2)^2=-\dfrac{1}{2a}$의 근 (앞으로 s로 명명)

$g(s)=\left|\ 2a\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2a}\right)}\times e^{-\frac{1}{2}+c}\right|=4\sqrt{e}$ ⋯ ㉠

(다): a와 c, s 모두 유리수이다. 이를 토대로 ㉠을 풀어보자.

$c-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ → $c=1$, $\sqrt{-2a}=4$ → $a=-8$

$\therefore$ $f(x)=-8(x-2)^2+1$ → $|f(-1)|=71$ (답)

2021학년도 사관학교 가형 30번

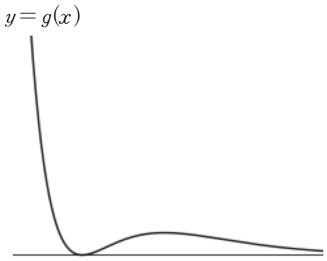
4. 두 함수 $f(x)=x^2-ax+b\ (a>0)$, $g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$에 대하여 상수 k와 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(0)<h(4)$
(나) 방정식 $\lvert h(x)\rvert=k$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그중 가장 큰 실근을 α라 할 때 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

$f(1)=-\frac{7}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+16b$의 값을 구하시오.

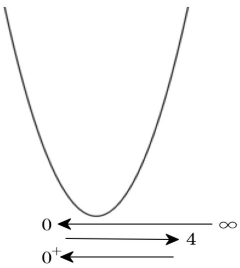
(단, $\frac{5}{2}<e<3$이고, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이다.)

해설 _ 6



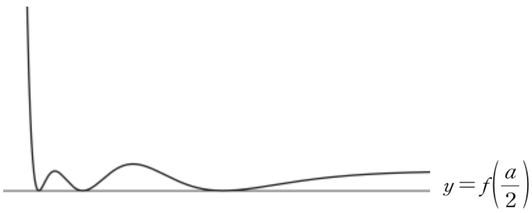
$g(x)$의 치역을 따보자 $\cdots$ $\infty \to 0 \to 4e^{-2} \to 0^{+}$
$g(x)$의 치역을 $f(x)$의 정의역으로 밀어 넣으면 된다.

$f(x)$의 대칭축 $x=\dfrac{a}{2}>0$이다. 이를 그림에 나타내자.



0에서 $4e^{-2}$까지 읽을 때, $h(0)<h(4)$이므로 4가 0보다 대칭축으로부터 떨어진 거리가 크다. 그래서 왼쪽의 그림처럼 되는 것이다.

이를 토대로 합성함수를 직접 그려보자.



(나): $h(x)=\pm k$
→ 두 개의 선(k와 $-k$)을 그려서 교점 개수를 확인하자. 조건에서 α가 h의 극소라고 하였으니, $-k$의 위치가 바로 $h(x)$의 극솟값이라는 걸 안다.

7개는 (3+4)이므로, $-k$가 $h(x)$의 극솟값과 같고 $+k$가 $h(x)$의 작은 극댓값과 같으면 된다.
→ $-k=(f$의 최소$)$, $k=f(0)=b$

한편, $f(1)=1-a+b=-\dfrac{7}{32}$이므로 연립하자. ($f$의 최소)$=f\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{2}+a-\dfrac{39}{32}=\dfrac{39}{32}-a$

→ $4a^2-32a+39=0$ → $a=\dfrac{3}{2}, \dfrac{13}{2}$ 이다.

이때 대칭축 $\dfrac{a}{2}$가 0에 4보다 더 가까이 있음을 고려하면, $a=\dfrac{3}{2}$ (확정) → $b=\dfrac{9}{32}$

$\therefore$ $a+16b=\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}=6$ (답)

5. 최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고, $\alpha \geq 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \cdots$ 라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\dfrac{2}{5}$이다.

(나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)}=\dfrac{1}{g(\alpha_2)}+\dfrac{1}{2}$

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오. (단, $0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

해설 _

원래 함수에 역수를 취하면 어떤 일이 벌어질까? $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$ → 원래 함수의 도함수인 $f'(x)$ 앞에 $(-)$가 붙어 부호만 바뀐 것을 알 수 있다. 따라서, 뒤집어서 생각하고 극대는 극소로, 극소는 극대로 바꿔주면 된다는 것을 알 수 있다. 따라서 이 문제의 경우에도 $\frac{1}{g(x)}$인 $y=2+\sin(f(x))$만 보아도 된다는 것이다.

(가): $2+\sin f(0)=\frac{5}{2} \rightarrow \sin f(0)=\frac{1}{2} \rightarrow f(0)=\frac{\pi}{6}\ (\because\ 0<f(0)<\frac{\pi}{2})$

(나): $\sin f(\alpha_5)=\sin f(\alpha_2)+\frac{1}{2}$

$y=\sin f(x) \rightarrow y'=f'(x)\times\cos f(x) \rightarrow \alpha$ 는 $f'(x)$의 근이거나 $\cos f(x)$의 근임을 알 수 있다. $\cos f(x)=0$을 만족하려면 $f(x)=\pm\frac{\text{홀수}}{2}\pi$ 이며 이때 $\sin f(x)=\pm 1$이다. α_1은 이를 충족하지 않으므로 $f'(x)=0$의 근일 것이다. (나)에 의해 α_5와 α_2 중 하나는 $f'(x)$의 근이고, 다른 하나는 $\cos f(x)=0$의 근이어야 한다. 둘다 $\cos f(x)$의 근이면 sin값이 각각 ± 1 중 하나인데 둘의 차이가 $\frac{1}{2}$이니 말이다.

$f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 $x=0$에서 극대를 갖고, 극소는 $x=\alpha_2$와 $x=\alpha_5$ 중 하나일 것이다. $f(x)$를 이제부터 살살 그리면서 극점과 $y=\pm\frac{\text{홀수}}{2}\pi$와의 교점에서는 점을 찍자. 그 점들이 모두 α일 것이다.

Case 1. 만약 α_2가 극소라면?

$y=-\frac{\pi}{2}$ 위에서 극솟값이 생겨야 $x=0$ 이후로 극점이 없다가 α_2에서 처음으로 극점이 생길 것이다. 극소를 지나면 $y=\frac{\pi}{2}$에서 $\alpha_3,\ \cdots,\ y=\frac{5}{2}\pi$ 와의 교점에서 α_5가 생길 것이다. 이때 $\sin$값은 1이므로 $\sin f(\alpha_2)=\frac{1}{2}$여야 한다. 그러나 $f(\alpha_2)$의 범위는 열린구간 $(-\frac{\pi}{2},\ f(0))$ 였으므로, 불가능하다. $\cdots$ 모순

Case 2. α_5가 극소라면?

α_2는 $y=-\frac{\pi}{2}$와의 교점에서 생길 것이고, α_4는 $y=-\frac{5}{2}\pi$ 와의 교점에서 생기며, α_5는 f의 극점으로부터 생기므로 α_5는 열린구간 $(-\frac{7}{2}\pi,\ -\frac{5}{2}\pi)$에 있어야 한다. $\sin f(\alpha_2)=-1 \rightarrow \sin f(\alpha_5)=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(\alpha_5)=-\frac{17}{6}\pi \rightarrow$ 극댓값과 극솟값의 차이가 $\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{17}{6}\pi\right)=3\pi \rightarrow 4(6\pi)k^3=3\pi \rightarrow k=\frac{1}{2}$

(k란 변곡점으로부터 극대나 극소 중 아무 점과의 x좌표 거리를 말함) $\rightarrow f(x)=6\pi x^2(x-\frac{3}{2})+\frac{\pi}{6}$

$\rightarrow g'(x)=\frac{-f'(x)\times\cos f(x)}{\{2+\sin f(x)\}^2} \rightarrow g'\left(-\frac{1}{2}\right)=-3\sqrt{3}\pi \rightarrow a^2=27$ (답)

6. 2019학년도 4월 30번

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b 는 정수)에 대하여 함수

$$g(x)=e^{f(x)}-f(x)$$

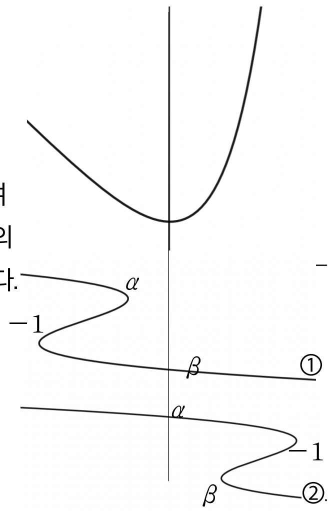
는 $x=\alpha$, $x=-1$, $x=\beta$ $(\alpha<-1<\beta)$에서만 극값을 갖는다. 함수 $y=|g(x)-g(\alpha)|$가 미분 가능하지 않은 점의 개수가 2일 때, $\{f(-1)\}^2$의 최댓값을 구하시오.

해설 _

우선 $h(x)=e^x-x$라고 하면, $g(x)=(h\circ f)(x)$임을 알 수 있다.

속함수인 $f(x)$는 삼차함수이며 극대와 극소를 각각 M, m 라 할 때, 치역은 $-\infty\to M\to m\to\infty$ 임을 알 수 있다. 물론 극값이 없을 수도 있을 테다.

$h(x)$는 0에서 갖는 극소 하나가 유일한 극값이며, 비뚤어진 포물선 모양이다.
따라서 $g(x)$가 극점을 가지려면, $f(x)$가 $y=0$을 관통하거나(Case 1), $f(x)$가 직접 근을 갖는 수밖에(Case 2) 없다. $f(x)$가 극점이 없으면, g의 극점도 하나여야 하는데, 문제에서 3개의 극점을 가지므로 말이 되지 않는다. Case 2가 두 개의 극점이므로, Case 1에서는 단 하나만 나와야 하므로 $f(x)$는 실근을 하나만 가진다.
이에 따라 α, β에서는 극소를, -1에서는 극대를 가짐을 알 수 있다.



어차피 g는 사차함수처럼 세 극점을 가지는데 $y=|g(x)-g(\alpha)|$가 두 곳에서만 미분이 가능하지 않으려면 어떤 개형을 가져야 할까?

g가 가질 수 있는 극소는 h의 극소거나(Case 1), h의 극소보다는 조금 크지만 f가 Case 2로 만든 극소일 것이다.
$y=|g(x)-g(\alpha)|$가 두 곳에서만 미분이 불가능하려면, $g(\alpha)>g(\beta)$여야 할 것이다. 즉, $g(\beta)$가 Case 1이어야 하므로 오른쪽의 그림 중 $f(x)$의 형태는 ①이어야 한다. $\to f(x)=x(x^2+ax+b)\to\beta=0$, $D=a^2-4b<0$
$f'(-1)=3-2a+b=0$ / 아직 $\alpha<-1$이 식에 반영이 되지 않았다.

근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha+(-1)=-\dfrac{2a}{3}<(-1)+(-1)=-2\to a>3$

정리하면, $a^2-4b=a^2-8a+12=(a-2)(a-6)<0$, $a>3\to a$ can be 4, 5
$f(-1)=a-b-1=-a+2\to\ \therefore\ a=5$일 때, 9 (답)

이러한 문제에서의 가장 중요한 점은 속함수 $f(x)$의 개형에 따라 그림이 어떻게 달라지는지이다.
어차피 $g(x)$는 극소 2개에 극대 1개일 수밖에 없다. 극소를 발이라고 생각하면, 발 두 개짜리 함수인 것이다.
이때 Case1의 발은 Case 2의 발보다 작거나 같다. 어차피 Case 2는 h의 극소이자 최소인 Case 1의 발보다 크거나 같다는 얘기이다. 매우 당연하다. 그럼 둘의 사이가 멀어질수록 발의 길이 차는 커질 것이고 가까워질수록 발의 길이는 비슷해져서 균형을 이룰 것이다. ①은 오른발이 왼발보다 밑에, ②는 왼발이 오른발보다 밑에 있는 모양일 것이다. 이렇게 값이 달라짐에 따라 최종적인 합성함수가 어떻게 그려질지 연속적으로 머리에서 떠올리는 연습을 어떤 문제에서든지 해야 합성함수에 대한 시야가 늘 것이다.

7. 2020학년도 7월 교육청 30번

함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$와 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=e^{af(x)}+bf(x)\ (0<x<12)$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_m$ (m은 자연수)라 할 때, m 이하의 자연수 n에 대하여 α_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) n이 홀수일 때, $\alpha_n=n$이다. (나) n이 짝수일 때, $g(\alpha_n)=0$이다.

함수 $g(x)$가 서로 다른 두 개의 극댓값을 갖고 그 합이 e^3+e^{-3}일 때,

$$m\pi\times\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}g(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=pe^3+qe$$

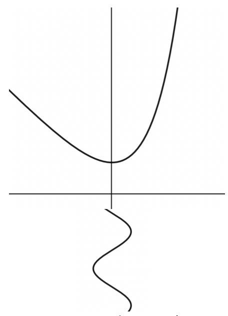
이다. $p-q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 정수이다.)

해설 _

$h(x)=e^{ax}+bx$라 하면, $g(x)=(h\circ f)(x)$이다. $h'(x)=ae^{ax}+b$이므로 $e^{ax}=-\dfrac{b}{a}$일 때 극값을 가진다.

따라서 g가 극값을 가지려면 $e^{af(x)}=-\dfrac{b}{a}$이거나 $f(x)$가 자체적으로 극값을 가져야 한다.

$g'(x)=h'(f(x))\times f'(x)\rightarrow f$의 경우 극대와 극소 모두 함숫값이 각각 동일하다.



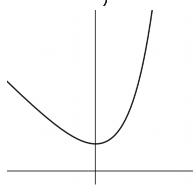
if $a>0$

$e^{ax}=-\dfrac{b}{a}$에서 b는 음수임이 나온다. h는 극소를 가지며 비뚤어진 양의

이차함수 모양이다. 따라서 Case 1은 항상 극소를 가질 것이다.

Case 2 : f가 극대를 가질 때 g도 극대를, f가 극소를 가질 때 g는 극대를 가짐을

그림에서 알 수 있다. 극대는 2종류(Case2에서 두 가지), 극소는 1 종류(Case1만)이다.



if $a<0$

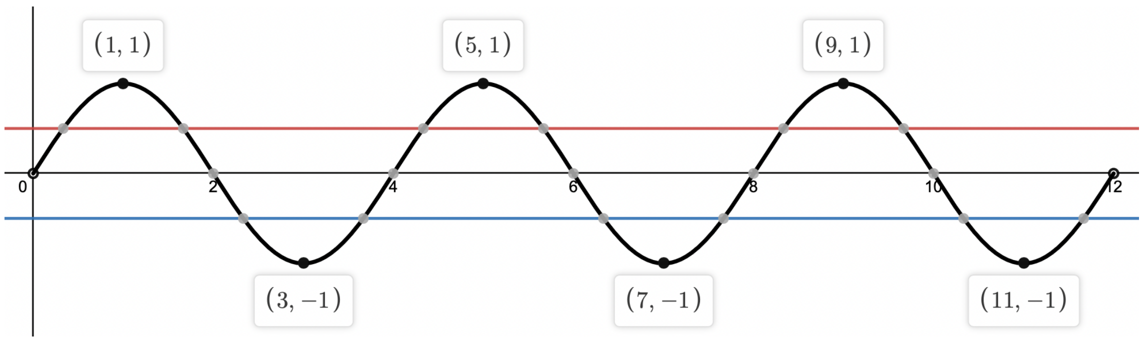
$e^{ax}=-\dfrac{b}{a}$에서 b는 양수임이 나온다. h는 역시나 극소를 가지며 비뚤어진 양의

즉 a가 양수일 때와 동일할 것이다.

극댓값 두 종류는 a의 부호와 관계없이 각각 $h(1)$, $h(-1)$이다. $\rightarrow e^{a}+b$, $e^{-a}-b\rightarrow a=\pm3$

앞서 얻은 정보를 토대로 $f(x)$와 $e^{ax}=-\dfrac{b}{a}$의 근(앞으로 k라 명명)과의 교점을 표시하면 다음과 같다.

(중간의 선은 $y=k$이며, $k>0$일 때는 빨강, $k<0$일 때는 파랑으로 표시했다.) 또한, 그림을 보면, $m=12$이다.



표시된 근은 Case 2, $y=k$와의 교점은 Case 1이다.

(가) : 빨간 선에 의하면 n이 홀수일 때는 Case 1을 말하는데 이는 $a_n=n$을 충족하지 못한다. 파란 선에 의하면 Case 2가 n이 홀수일 때의 a인데, 이때는 충족한다. $\therefore\ k<0$

(나) : n이 짝수일 때의 a는 Case 2 즉, 파란선과 $f(x)$의 교점을 말한다. $g(a_n)=h(k)=-\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{a}\ln\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$

$\rightarrow b=\mp3e\rightarrow a=3$일 때 $k=\dfrac{1}{3}$이므로 모순. $\therefore\ a=-3,\ b=3e,\ k=-\dfrac{1}{3}\rightarrow\sin\dfrac{\pi}{2}x$를 치환하여 적분하자.

$$24\times\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}\{e^{-3x}+(3e)x\}dx=24\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{3e}{2}x^{2}\right]_{-1}^{-\frac{1}{3}}=8e^{3}-40e\rightarrow 48\ \text{(답)}$$