15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=1$일 때, $a_6=34$가 되도록 하는 모든 a_2의 값의 합은?

$a_{n+1}+a_n$이 홀수일 때 a_{n+2}는 반드시 홀수이며 a_{n+2}가 짝수일 때 $a_{n+1}+a_n$은 반드시 짝수이다.

따라서 $a_6=34$에서 $a_4+a_5=68$이다.

우선 a_2가 짝수인 경우 적당한 자연수 k에 대하여 $a_2=2k$라 할 때 수열 $\{a_n\}$은 아래와 같다.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	$2k$	$2k+1$	$4k+1$	$3k+1$	34

이때 $7k+2=68$인 자연수 k는 존재하지 않는다. 따라서 a_2는 홀수이다.

이를 기반으로 **① 홀짝성을 토대로 순서대로 나열하기** 풀이와 **② 홀짝성을 토대로 역으로 나열하기**

풀이를 읽어보자.

한편 수열의 합을 이용한 **③ 새로운 수열을 정의하기** 풀이를 실어뒀으니 학습에 참고하자.

① 홀짝성을 토대로 순서대로 나열하기

적당한 자연수 k에 대하여 $a_2=2k-1$이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 아래와 같다.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	$2k-1$	k	?	?	34

k의 홀짝성에 따라 아래와 같이 경우를 나누자.

㉠ k가 홀수일 때

적당한 자연수 k'에 대하여 $k=2k'-1$이라 하면 $a_2=4k'-3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 아래와 같다.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	$4k'-3$	$2k'-1$	$3k'-2$	?	34

k'이 짝수인 경우 $a_5=5k'-3$이고 $a_6=8k'-5=34$에서 $8k'-5=34$인 자연수 k'는 존재하지 않는다.

따라서 k'은 홀수이며 $k'=2k''-1$이라 할 때 수열 $\{a_n\}$은 아래와 같다.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	$8k''-7$	$4k''-3$	$6k''-5$	$5k''-4$	34

$11k''-9=68$에서 $k''=7$이고 $a_2=8k''-7=49$이다.

㉡ k가 짝수일 때

적당한 자연수 k'에 대하여 $k=2k'$이라 하면 $a_2=4k'-1$이므로 수열 $\{a_n\}$은 아래와 같다.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	$4k'-1$	$2k'$	$6k'-1$	$8k'-1$	34

$a_6=7k'-1=34$에서 $k'=5$이며 이때 $a_2=4k'-1=19$이다.

따라서 주어진 조건을 만족하는 모든 a_2의 값의 합은 $49+19=68$이다.

② 홀짝성을 토대로 역으로 나열하기

계산의 편의를 위해 주어진 조건을 a_n에 대해 정리하였을 때 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases} \Leftrightarrow a_n=\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1} & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ 2a_{n+2}-a_{n+1} & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이때 $a_3=a_5-a_4$인 경우 $\cdots$ ㉠와 $a_3=2a_5-a_4$인 경우 $\cdots$ ㉡로 나누자.

㉠ $a_3=a_5-a_4$인 경우 a_5는 홀수이다.

즉 $a_2=2a_4-a_3$인 경우 a_2는 짝수이다. 따라서 $a_2=a_4-a_3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 아래와 같다.

n	6	5	4	3	2	1
a_n	34	a_5	$68-a_5$	$2a_5-68$	$136-3a_5$	$7a_5-272$

이때 $a_1=7a_5-272=1$이고 $a_5=39$에서 $a_2=136-3a_5=19$이다.

㉡ $a_3=2a_5-a_4$인 경우 $a_2=a_4-a_3=136-4a_5$일 때 a_2는 짝수이다.

따라서 $a_2=2a_4-a_3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 아래와 같다.

n	6	5	4	3	2	1
a_n	34	a_5	$68-a_5$	$3a_5-68$	$204-5a_5$	$11a_5-340$

이때 $a_1=11a_5-340=1$이고 $a_5=31$에서 $a_2=204-5a_5=49$이다.

따라서 주어진 조건을 만족하는 모든 a_2의 값의 합은 $19+49=68$이다.

③ 새로운 수열을 정의하기.

$a_{n+1}+a_n$과 $a_{n+1}-a_n$의 홀짝성이 동일하므로 주어진 조건의 양변에 a_{n+1}을 빼면 아래와 같다.

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\begin{cases} a_n & (a_{n+1}-a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ -\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n) & (a_{n+1}-a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이때 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_{n+1}-a_n$과 같이 정의할 때 $a_1+\sum_{k=1}^{n}b_k=a_{n+1}$이므로 주어진 문제는 아래와 같이 표현할 수 있다.

15*. 모든 항이 정수인 수열 $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}b_k=S_n$이라 할 때 수열 $\{b_n\}$은 아래와 같다.

$$b_2=\begin{cases} 1 & (b_1\text{이 홀수인 경우}) \\ -\dfrac{1}{2}b_1 & (b_1\text{이 짝수인 경우}) \end{cases},\ b_{n+1}=\begin{cases} 1+S_{n-1} & (b_n\text{이 홀수인 경우}) \\ -\dfrac{1}{2}b_n & (b_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}\ (n\geq 2)$$

$S_5=33$이 되도록 하는 모든 $(1+b_1)$의 값의 합은?

---

b_n이 홀수인 경우 $S_{n+1}=S_{n-1}+b_n+b_{n+1}=1+2S_{n-1}+b_n$에서 S_{n+1}은 짝수이다.

다시 말해 S_{n+1}이 홀수일 때 b_n은 반드시 짝수이다. 즉 $S_5=33$에서 b_4는 짝수이다.

㉠ b_1이 홀수인 경우, 적당한 정수 p에 대하여 $b_1=2p-1$이라 하자. 이때 수열 $\{b_n\}$은 아래와 같다.

n	1	2	3	4	5
b_n	$2p-1$	1	$2p+1$	$4p+2$	$-2p-1$

$S_5=6p+2=33$에서 p는 정수가 아니므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

따라서 b_1은 짝수이므로 적당한 정수 p에 대하여 $b_1=2p$이라 하자.

㉡ p가 홀수인 경우, 적당한 정수 q에 대하여 $p=2q-1$이라 하자. 이때 수열 $\{b_n\}$은 아래와 같다.

n	1	2	3	4	5
b_n	$4q-2$	$-2q+1$	$4q-1$	$2q$	$-q$

$S_5=7q-2=33$에서 $q=5$이다. 이때 $p=9$이며 $b_1=18$이다.

㉢ p가 짝수인 경우, 적당한 정수 q에 대하여 $p=2q$이라 하자. 이때 수열 $\{b_n\}$은 아래와 같다.

n	1	2	3	4	5
b_n	$4q$	$-2q$	q	?	

q가 홀수라면 $b_4=2q+1$에서 b_4가 짝수임을 만족하지 않는다. 따라서 q는 짝수이다.

b_4가 짝수임을 활용하기 위해 적당한 정수 k에 대해 $b_5=k$라 할 때 수열 $\{b_n\}$은 아래와 같다.

n	1	2	3	4	5
b_n	$16k$	$-8k$	$4k$	$-2k$	k

$S_5=11k=33$에서 $k=3$이다. 이때 $b_1=16k=48$이다.

따라서 $S_5=33$이 되도록 하는 모든 $(1+b_1)$의 값의 합은 $19+49=68$이다.

22. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라

할 때, $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자.

함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t\to 4+}h(t)=5$ (나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오.

우선 함수 $h(t)$에 대해 조사해보자.

극한값 $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$이 존재하는 경우 $\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$이다.

이때 $\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$이며 $\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=-\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$이므로

$\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$이면 $\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=-\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$이다.

$f(x)\neq t$인 모든 x에서 함수 $g(x)$는 미분가능하므로 $f(x)\neq t$일 때 극한값 $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$이

존재하는 경우 $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=0$이다.

다시 말해 $f(x)\neq t$일 때 극한값 $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$이 존재하는 경우 $f'(x)=0$이다.

한편 $f(x)=t$인 인 모든 x에서 함수 $g(x)$의 우미분계수와 좌미분계수의 절댓값은 동일하므로

극한값 $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$이 존재한다.

즉 $\lim_{x \to k} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 해집합은

$\{x \mid f(x)=t$이고 $f'(x) \neq 0\} \cup \{x \mid f'(x)=0\}$와 같이 나타낼 수 있다.

한편 $\lim_{t \to 4+} h(t)=5$에서 t가 4보다 크면서 4에 한없이 가까워질 때 $\lim_{x \to k} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$ 값이 존재하는

서로 다른 실수 k의 개수는 5이다. 따라서 이를 만족하는 실수 k의 개수를 찾기 위하여 사차함수

$f(x)$의 극값의 개수에 따라 아래와 같이 경우를 나눌 수 있다.

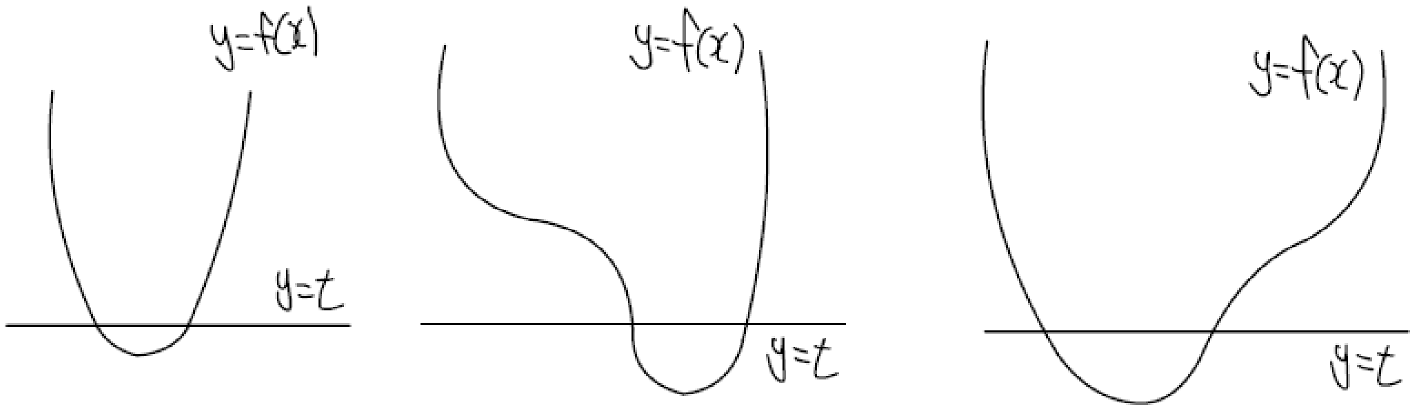
일반적으로 사차함수의 그래프의 개형을 떠올려 보았을 때 사차함수의 극값의 개수는 1 또는 3이다.

① 사차함수 $f(x)$의 극값의 개수가 1인 경우

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 최대 2이고 방정식 $f'(x)=0$의 실근의 개수의 최댓값은

2이다. 이때 $\{x \mid f(x)=t$이고 $f'(x) \neq 0\} \cup \{x \mid f'(x)=0\}$의 원소의 개수의 최댓값은 4이므로

$\lim_{t \to 4+} h(t)=5$를 만족하지 않는다.

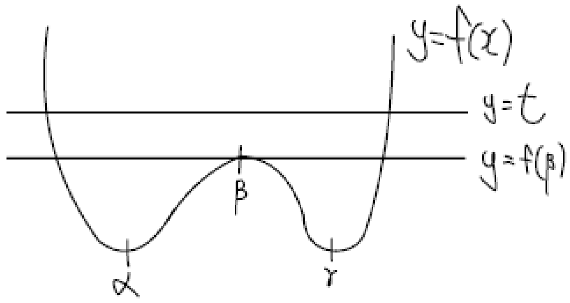


② 사차함수 $f(x)$의 극값의 개수가 2 또는 3인 경우

$\alpha < \beta < \gamma$이고 $f'(\alpha)=f'(\beta)=f'(\gamma)=0$인 세 상수 α, β, γ에 대하여 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가

양수이므로 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값 $f(\beta)$를 가진다.

$t \geq f(\beta)$인 경우 $\{x|f(x)=t$이고 $f'(x)\neq 0\}\cup\{x|f'(x)=0\}$를 만족하는 실수 x의 개수는 5이다.



한편 $\lim_{t\to f(\beta)-} h(t)$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$와의 교점의 개수와 방정식 $f'(x)=0$의 실근의

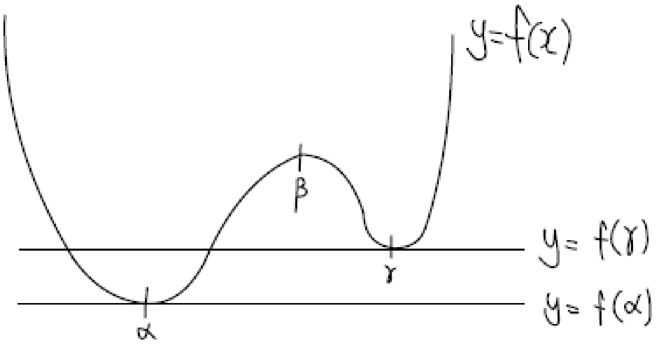
개수의 합이므로 주어진 그래프 $y=f(x)$의 개형을 고려하였을 때 $\lim_{t\to f(\beta)-} h(t)=7$이다.

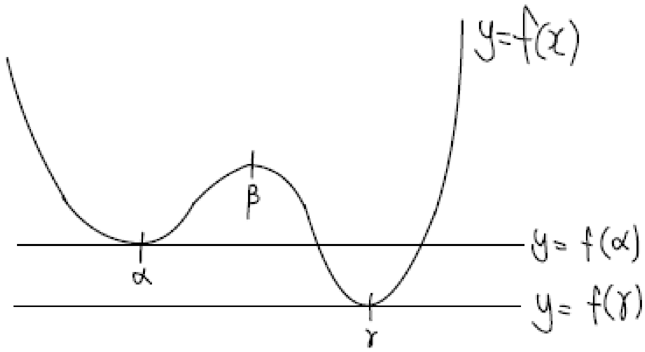
즉 함수 $h(t)$는 $t=f(\beta)$에서 불연속이며 $\cdots$ ㉠ $\lim_{t\to 4+} h(t)=5$이고 함수 $h(t)$는 $t>4$에서 연속이므로

$f(\beta)=4$이다.

한편 함수 $f(x)$의 두 극솟값 $f(\alpha)$, $f(\gamma)$이 서로 같지 않을 경우를 살피자.

$f(\alpha)\neq f(\gamma)$인 경우 $f(\alpha)>f(\gamma)$ 이거나 $f(\alpha)<f(\gamma)$이다.





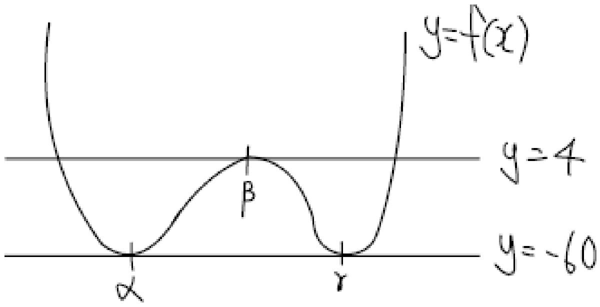
이때 두 그래프의 개형을 고려하였을 때 함수 $h(t)$는 $t=f(\alpha)$, $f(\gamma)$의 좌우에서

$\{x|f(x)=t$이고 $f'(x)\neq 0\}\cup\{x|f'(x)=0\}$를 만족하는 실수 x의 개수가 다르므로

함수 $h(t)$는 $t=f(\alpha)$, $f(\gamma)$에서 불연속이다.

한편 ㉠에 따라 함수 $h(t)$가 불연속인 t의 개수는 3이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

따라서 $f(\alpha)=f(\gamma)=-60$이며 곡선 $y=f(x)$는 $x=\beta$에 대하여 대칭이다. $\cdots$ ㉡



이때 $f(2)=4,\ f'(2)>0$이고 ㉡에 따라 함수 $f(x)=(x-2\beta+2)(x-\beta)^2(x-2)+4$와 같이 나타낼 수 있다. 한편 그래프 $y=f(x)$를 x축 방향으로 $-\beta$만큼 평행이동한 그래프는 $y=f(x+\beta)$이다.

한편 적당한 양의 상수 p에 대하여 $f(x+\beta)=x^2(x^2-p^2)+4$이다. 사차함수 그래프의 비율관계를 고려하였을 때 함수 $f(x+\beta)$는 $x=\pm\dfrac{p}{\sqrt{2}}$에서 극솟값 -60을 가진다. 즉 $-\dfrac{p^4}{4}=-64$이고 $p=4$이다.

따라서 $f(x+\beta)=x^2(x^2-16)+4=(x+4)x^2(x-4)$이고 $f(4+\beta)=4$이므로 $\beta<2$임에 따라 $\beta=-2$이다.

$\therefore f(x)=(x+6)(x+2)^2(x-2)+4,\ f(4)+h(4)=724+5=729$