Seoul Union of Math education

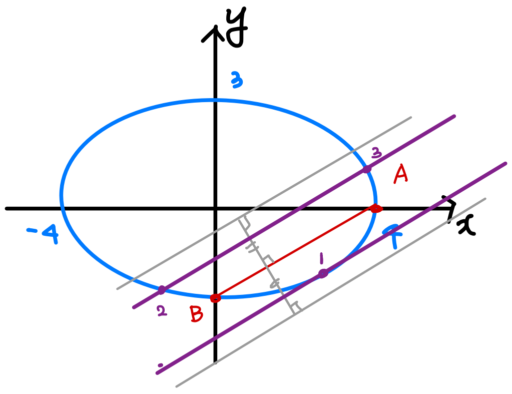
서울권 수학교육과 연합 동아리
SUM 소모임 해장 고3팀 주관

theme 1. 이차곡선의 특이점

1. 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$과 두 점 $\mathrm{A}(4,0)$, $\mathrm{B}(0,-3)$이 있다. 이 타원 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이가 k가 되도록 하는 점 P의 개수가 3일 때, 상수 k의 값은?

2023 사관 25

① $3\sqrt{2}-3$ ② $6\sqrt{2}-7$ ③ $3\sqrt{2}-2$
④ $6\sqrt{2}-6$ ⑤ $6\sqrt{2}-5$



△ABP 넓이는 높이에 의해 결정.
즉, $3x-4y=12$ ($\overline{AB}$)와 평행한 선분 $3x-4y=12\pm k$와 타원의 교점개수 = P의 개수.

즉, $\overline{AB}$로 나뉘진 타원곡선 중 더 작은 부분에서 $3x-4y=12$의 평행선이 접선이 될 때의 접점이 P로 가능

$y=\frac{3}{4}x\pm\sqrt{16\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+3^2}=\frac{3}{4}x\pm3\sqrt{2}$.

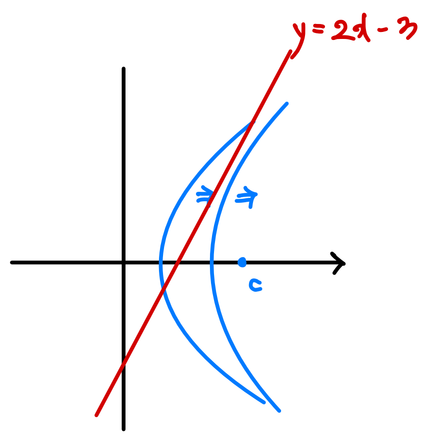
즉, 아래쪽 접선은 $y=\frac{3}{4}x-3\sqrt{2}$ 이고 $y=\frac{3}{4}x-3$ 과의 거리는 $3(\sqrt{2}-1)\times\frac{4}{5}$. $\therefore k=\frac{1}{2}\times5\times\frac{12}{5}(\sqrt{2}-1)=6(\sqrt{2}-1)$ ∴ 4

2. 좌표평면에서 직선 $y=2x-3$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 두 점 $\mathrm{A}(c,0)$, $\mathrm{B}(-c,0)$ $(c>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P의 좌표가 $(3,3)$일 때, 상수 c의 값은?

2023 6월 28

① $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

∴ ①



$\overline{PB}-\overline{PA}=2a$라 둘 때,
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$ 위의 점이 $y=2x-3$ 위의 점에 속하는 최대의 c 값 찾아야함.

a가 증가 ⇝ 점근선 방정식 기울기 ⇑
(a,0) → (c,0)

∴ a 증가하다 보면 $y=2x-3$과 접하고. 그 후에는 쌍곡선 위에 $y=2x-3$ 위 점 X.

즉, $y=2x-3$이 P에서 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$의 접선.

$\frac{3x}{a^2}-\frac{3y}{c^2-a^2}=1$. $y=\frac{c^2-a^2}{a^2}x-\frac{c^2-a^2}{3}$ ⇝ $c^2-a^2=9$, $a^2=\frac{9}{2}$

$c^2=\frac{27}{2}$. $c=3\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

3. 좌표평면에서 두 점 A $(-2, 0)$, B $(2, 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 직사각형의 넓이의 최댓값은?

> 직사각형 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}$의 값은 점 P의 좌표가 $(0, 6)$일 때 최대이고 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$일 때 최소이다.

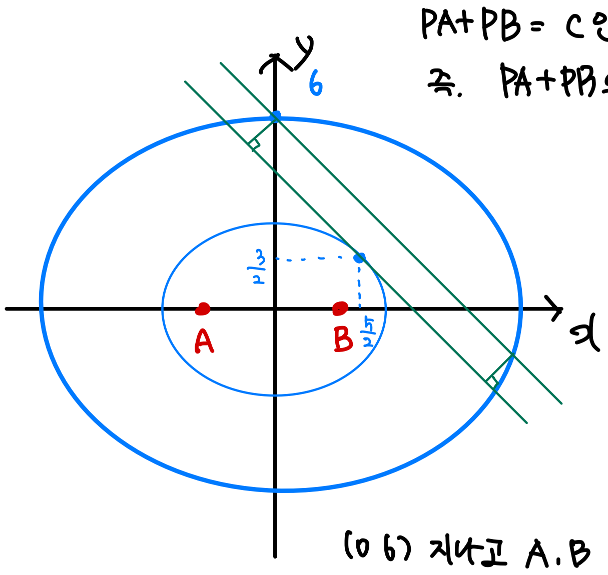
2020 9월 21

① $\frac{200}{19}$ ② $\frac{210}{19}$ ③ $\frac{220}{19}$ ④ $\frac{230}{19}$ ⑤ $\frac{240}{19}$ ✓

PA+PB = c인 점의 자취 → 타원.

즉. PA+PB의 최댓값 ⇒ 초점 일치, 타원 중 크기 Max

최솟값 ⇒ 초점일치 타원 중 크기 Min



(0 6) 지나고 A, B 초점으로 하는 타원 : $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$

$\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 지나고 A, B 〃 : $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$

이때, 직사각형은 무조건 두 점을 지나고, 두 타원 사이 영역에 위치한다. 즉, (0, 6)은 무조건 직사각형 꼭짓점.

직사각형 넓이가 최대이려면, ① $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$에서의 접선이 한 변

② $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$가 또하나의 꼭짓점.

중 ①의 경우가 무조건 더 넓이가 크다.

$\frac{\frac{5}{2}x}{10}+\frac{\frac{3}{2}y}{6}=\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$. $\therefore x+y=4$

즉. $x+y=4$와 $x+y=6$을 두 변으로 가질거라 예상 가능하고, 두 직선 사이 거리는 $\sqrt{2}$. 나머지 두 변은 $y=x-k$와 평행

또, $x+y=6$이 큰 타원과 만나는 점 : $\frac{x^2}{40}+\frac{(6-x)^2}{36}=1$

$9x^2+10(6-x)^2=360$

$19x^2-120x$

$\therefore \left(\frac{120}{19}, -\frac{16}{19}\right)$이다. ⇒ 직사각형 나머지 두 변 길이는 $\frac{120}{19}\sqrt{2}$

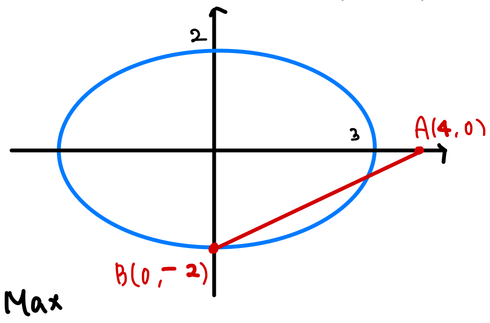
⇒ 구하는 넓이 : $\frac{120}{19}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{240}{19}$. ∴⑤

4. 좌표평면 위에 타원 $E : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$와 두 점 A $(4, 0)$, B $(0, -2)$가 있다. 실수 $t\,(0<t\leq 9)$에 대하여 함수 $f(t)$를 집합

$\{X \mid X$는 타원 E위의 점이고, 삼각형 ABX의 넓이는 t이다.$\}$

의 원소의 개수라 할 때, $f(1)+f(9)$의 값을 구하시오.

2021 문참시 자작문제



일단. $\overline{AB}$와 평행한 E의 접선을 구하면.

$y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{9\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2^2}=\frac{1}{2}x\pm\frac{5}{2}$

이때, 타원 위 점 X와 $\overline{AB}$ 사이 거리는

아랫쪽 접선과 $\overline{AB}$ 사이거리 $\frac{\left|-2-\left(-\frac{5}{2}\right)\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$

위쪽 〃 $\frac{\left|2-\left(-\frac{5}{2}\right)\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

즉. △ABX의 범위는

X가 $\overline{AB}$ 아래 : $0\sim\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=1$

X가 $\overline{AB}$ 위 : $0\sim\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{9}{\sqrt{5}}=9$

아래 위

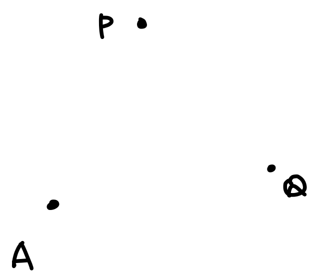
$\therefore f(1)=1+2$

$f(9)=0+1$

⇒ $f(1)+f(9)=4$

theme 2. 벡터, 그 종점의 자취

• 선분의 외분점, 내분점의 위치벡터



• 두 벡터에 의한 나란히꼴과 기타 도형

• 평면벡터와 원의 방정식

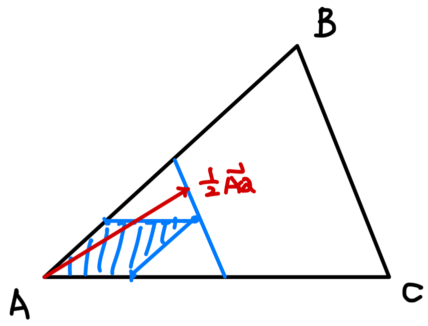
• 두 영역 내 점을 종점으로 하는 두 벡터의 선형결합.

5. 좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

$$\overrightarrow{AX}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

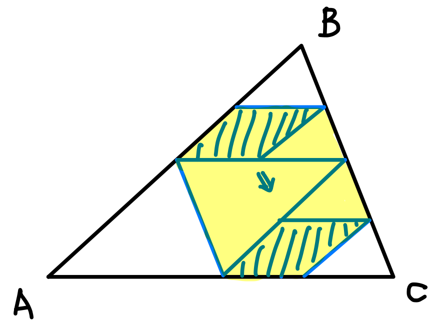
2019 수능 29



$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB}$ $\quad 0 \le s, t \le 1$

$\overrightarrow{AR} = t\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR}$은 평.사.



∴ X가 나타내는 넓이:

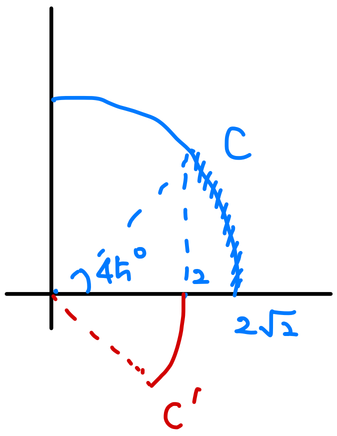
$\frac{10}{16}\triangle ABC = \frac{45}{8}$. $\Rightarrow p+q=53$

6. 좌표평면에서 곡선 $C: y=\sqrt{8-x^2}$ $(2 \le x \le 2\sqrt{2})$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}}=2$, $\angle \mathrm{POQ}=\frac{\pi}{4}$를 만족시키고 직선 OP의 아랫부분에 있는 점을 Q라 하자.
점 P가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자.
영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여
$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 최댓값과 최솟값의 합이 $a+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a와 b는 유리수이다.)

2020 6월 29

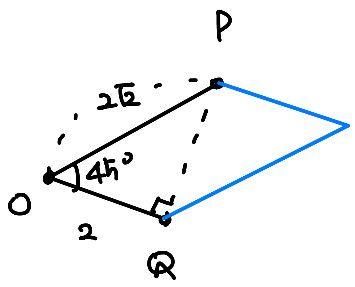


$\overline{OQ}=2$.

$\angle POQ=\frac{\pi}{4}$ ⇝ Q는 호 C′ 위점.

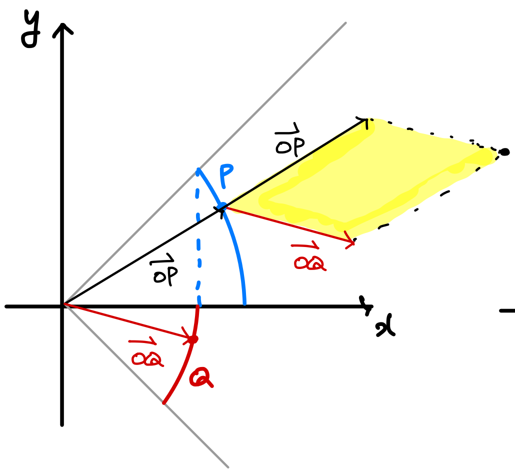
X는 $\overline{OP}$. Y는 $\overline{OQ}$ 위 점

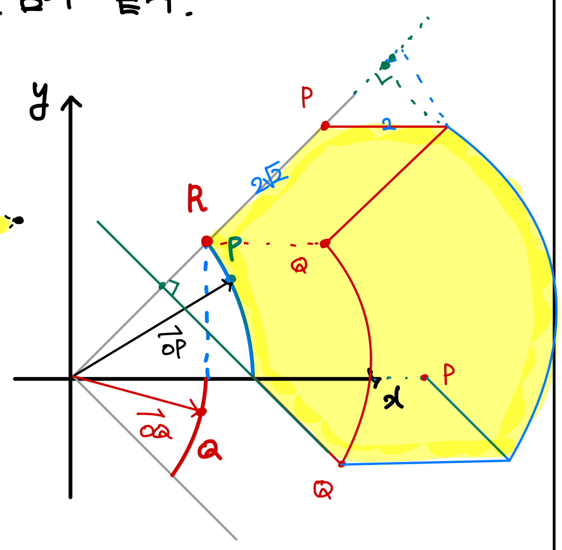
⇒ $\vec{OX}=s\vec{OP}$. $\vec{OY}=t\vec{OQ}$ $(0\le s,t\le 1)$



∴ $\vec{OX}+\vec{OY}$의 종점은 O.P.Q를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 내부.

여기에 $\vec{OP}$를 더하면. 구하는 자취는 다음과 같다.





즉. R의 좌표는 (2,2)가 되고.

$\vec{OZ}$의 $\vec{OR}$ 성분 Max : $5\sqrt{2}$
Min : 2

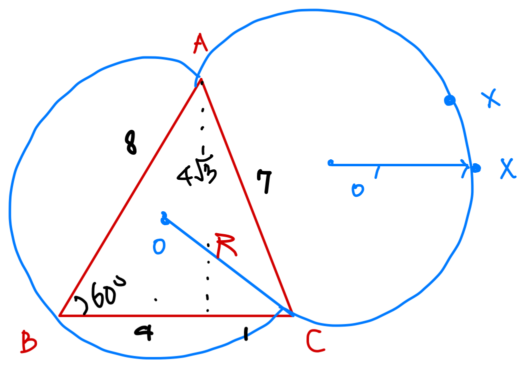
∴ $\vec{OR}\cdot\vec{OZ}=2\sqrt{2}(5\sqrt{2}+2)$
$=20+4\sqrt{2}$

$a+b=24$

7. $\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=7$인 삼각형 ABC가 있다. 이때, $\angle \mathrm{AXC}=\frac{\pi}{3}$을 만족시키는 점 X의 자취 위에 존재하는 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 최댓값은?

2022-1 해장 자작문제

① $20+\frac{70\sqrt{3}}{3}$ ② $20+20\sqrt{3}$ ③ $20+\frac{50\sqrt{3}}{3}$
④ $20+\frac{40\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $20+10\sqrt{3}$



$\angle AXC=\frac{\pi}{3}$ 이므로, 자취는 다음과 같다.
Rewind) 원주각.

$2R\sin 60^\circ=7$. $R=\frac{7}{\sqrt{3}}$

따라서, $\vec{PQ}=\vec{PO}+\vec{OO'}+\vec{O'Q}$ 로.

$\vec{PQ}\cdot\vec{BC}$가 최대이려면. $\vec{PO}=\vec{O'Q}=R\left(\frac{\vec{BC}}{5}\right)$

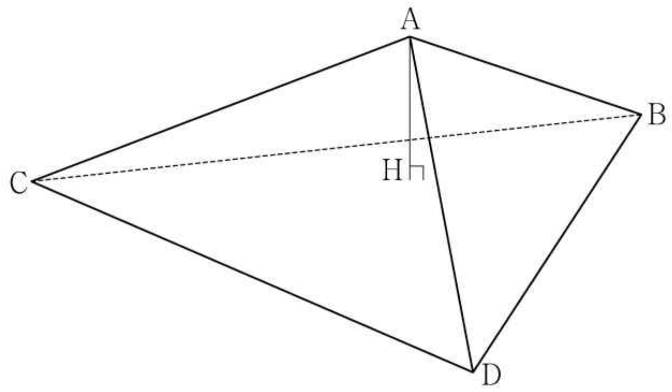
$|\vec{OO'}|=R$.

∴ $\vec{PQ}\cdot\vec{BC}=(\vec{PO}+\vec{OO'}+\vec{O'Q})\cdot\vec{BC}$
$\le \vec{OO'}\cdot\vec{BC}+2\cdot R\frac{\vec{BC}}{5}\cdot\vec{BC}$
$=\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot 5\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}+2\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot 5$
$=20+\frac{70}{\sqrt{3}}$

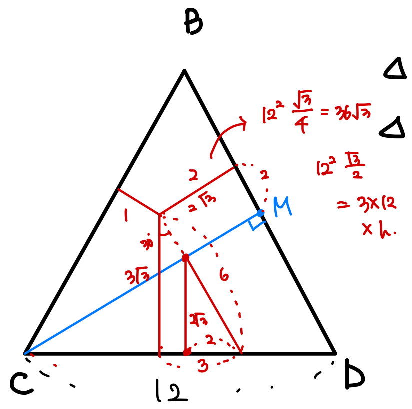
theme 3. 정사영을 통한 이면각의 추론

8. 한 변의 길이가 12인 정삼각형 BCD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다.
삼각형 CDH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 3배,
삼각형 DBH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 2배이고
$\overline{AH}=3$이다. 선분 BD의 중점을 M, 점 A에서 선분 CM에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 선분 AQ의 길이는?

2019 수능 19



① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$



△CDH = 3△BCH
△BDH = 2△BCH
AH = 3

9. 좌표공간에서 y축을 포함하는 평면 α에 대하여 중심이 $A(4, 0, \sqrt{22})$이고 반지름의 길이가 5인 구와 xy평면이 만나서 생기는 원을 C_1, yz평면이 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. 두 원 C_1, C_2의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 S로 같을 때, S의 값은?

2014 9월 B 19번 변형

① $\frac{\sqrt{10}}{2}$　② $\frac{3\sqrt{10}}{5}$　③ $\frac{7\sqrt{10}}{10}$　④ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$　⑤ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$

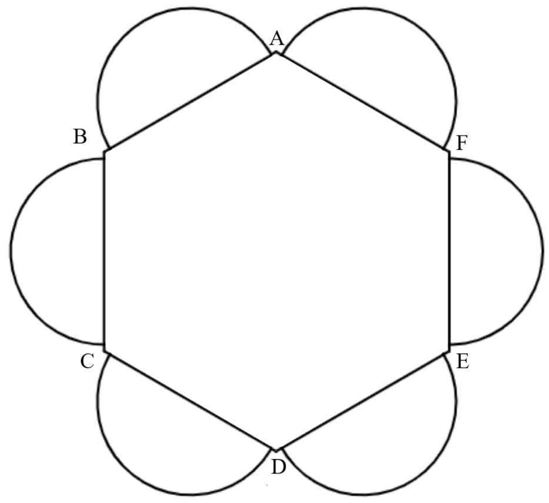
구: $(x-5)^2+y^2+(z-\sqrt{22})^2 = 25$

C_1: $(x-5)^2+y^2 = 3$

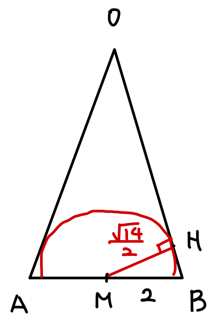
C_2:

10. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF와 정육각형의 각 변의 중점을 중심으로 하고 지름의 길이가 $\sqrt{14}$인 반원이 6개 존재한다. 이때, 각 반원이 이웃한 반원과 접하도록 정육각형 ABCDEF의 각 변을 접는 선으로 하여 접었을 때의 접점을 각각 A′, B′, C′, D′, E′, F′이라 하자. 평면 ABCDEF와 평면 A′BC′이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 할 때, $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다)

2022-1 해장 자작문제



$\cos\theta = \frac{\triangle A''BC''}{\triangle A'BC'}$

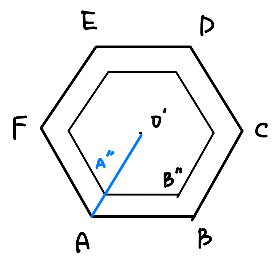


$HB = \sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$OH \cdot HB = MH^2$

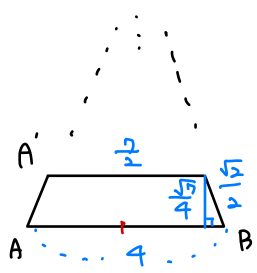
$OH = \frac{14}{4} \times \sqrt{2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$.

$OB = 4\sqrt{2}$, H는 OB의 7:1 내분점.



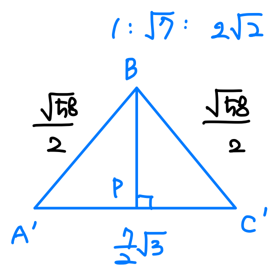
즉, $OA'' : AA'' = 7:1$ 이므로,
$OA'' = \frac{7}{2}$.

① $\triangle A''BC'' = \frac{1}{2}A''C''\cdot\left(\frac{1}{2}OB' + BB''\right)$
$= \frac{1}{2}A''C''\cdot\frac{9}{4}$



② $\triangle A'BC'$

$A'B = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2+\left(\frac{15}{4}\right)^2}$
$= \sqrt{\frac{232}{16}} = \frac{\sqrt{58}}{2}$



$\therefore BP = \sqrt{\frac{58}{4} - \frac{147}{16}}$　232　147
$= \frac{\sqrt{85}}{4}$

$\triangle A'BC' = \frac{1}{2}\cdot A'C'\cdot\frac{\sqrt{85}}{4}$

$\therefore \cos\theta = \frac{9/4}{\sqrt{85}/4} = \frac{9}{\sqrt{85}}$

$\cos^2\theta = \frac{81}{85}$

$p+q = 166$