2023

6월 평가원 모의고사 해설서

제작 **PPL 수학연구소**

박종원 서울 구로 상아탑학원 (총괄)
변우진 경기 고양 퍼스널개별지도학원
문진환 서울대학교 산업인력개발학과
신동하 성균관대학교 수학교육과
오성원 홍익대학교 수학교육과
최준원 고려대학교 수학교육과
이준용 건국대학교 수학과
박소영 전북대학교 수학교육과
박근준 충북대학교 수학교육과
CSM17 수학연구소 (기하 part 총괄)

2023학년도 6월 평가원 모의고사 해설지

수학 영역

성명		수험번호						–				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

젊은이여 그 길은 너의 것이다

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

제작: PPL 수학연구소

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

PPL 수학연구소

PPL 수학연구소

2023학년도 6월 평가원 모의고사 해설서
제작자 | PPL 수학연구소
제작일 | 2022.06.15

About PPL 수학연구소
고등학교 수능 및 내신 수학을 연구하고 토론하는 수학 선생님들의 집단입니다.
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작 등을 하고 있으며 대한민국 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고 있습니다.
모든 문의는 durwar222@naver.com으로 부탁드립니다.

제작진 | PPL 수학연구소

박종원 서울 구로 상아탑학원 (총괄)
변우진 경기 고양 퍼스널개별지도학원
문진환 서울대학교 산업인력개발학과
신동하 성균관대학교 수학교육과
오성원 홍익대학교 수학교육과
최주원 고려대학교 수학과
이준용 건국대학교 수학과
박소영 전북대학교 수학교육과
박근준 충남대학교 수학교육과
CSM17 수학연구소 (기하 part 총괄)

난이도
○○○ 하
○○◑ 중하
○○● 중
○●● 중상
●●● 상

검토진

박종원 서울 구로 상아탑학원
변우진 경기 고양 퍼스널개별지도학원
김유상 끝장교육
김아름 ABC학습방향연구소
차동희 수학전문공감학원
임형석 임형석대입진학연구소
공영대 늘품학원
박상우 건국대학교 교육공학과
김대현 건국대학교 수학과
이준용 건국대학교 수학과
최주원 고려대학교 수학과
이혜림 동국대학교 경영학과
문진환 서울대학교 산업인력개발학과
차정근 서울대학교 수학교육과
권용석 성균관대학교 수학과
신동하 성균관대학교 수학교육과
안성준 성균관대학교 수학교육과
J.K.T 성균관대학교 수학교육과
박소영 전북대학교 수학교육과
박다빈 중앙대학교 건설환경플랜트공학과
박근준 충남대학교 수학교육과
홍승혁 한양대학교 수학과
오성원 홍익대학교 수학교육과
CSM17 수학연구소 (기하 part 총괄)

디자인

박종원 서울 구로구 상아탑학원

01 ○○○

$(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

답	①

PPL 해설 | 작성자: 박소영

$$\begin{aligned}(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}} &= 4 \times (2^3)^{-\frac{2}{3}} \\ &= 4 \times 2^{-2} \\ &= 4 \times \frac{1}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

02 ○○○

함수 $f(x)=x^3+9$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

답	②

PPL 해설 | 작성자: 박소영

$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2)$

이때 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2$이므로 $f'(2)=3 \times 2^2=12$

03 ○○○

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta = \frac{4}{9}$일 때, $\sin^2\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 0

답	④

PPL 해설 | 작성자: 박소영

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

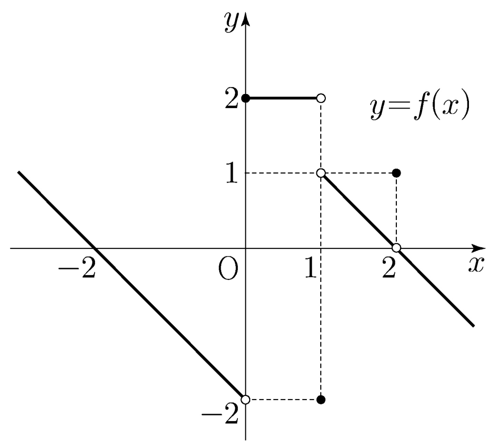
또한, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$이므로 $\cos\theta < 0$

따라서 $\cos\theta = -\frac{2}{3}$이다.

$\therefore\ \sin^2\theta + \cos\theta = \frac{5}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{9}$

04 ○○○

함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

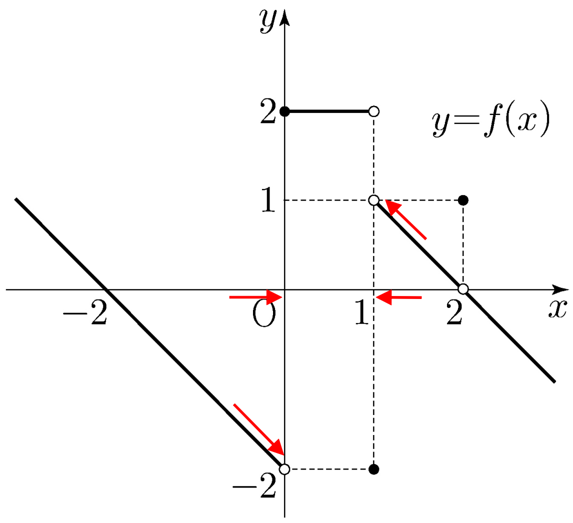


$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

답	②

PPL 해설 | 작성자: 박소영



$\lim_{x\to 0-} f(x) = -2$, $\lim_{x\to 1+} f(x) = 1$이므로

$\therefore\ \lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x) = -2 + 1 = -1$

05 ○○○

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = \frac{1}{4},\ a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

일 때, $a_6 + a_7$의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

답	③

PPL 해설 | 작성자: 박종원

$a_2 + a_3 = a_1(r + r^2) = \frac{1}{4}(r + r^2)$이므로

$r + r^2 = \frac{3}{2} \times 4 = 6,\ r^2 + r - 6 = 0,\ (r+3)(r-2) = 0$

$\therefore\ r = 2\ (\because\ a_n > 0)$

$$\begin{aligned}\therefore\ a_6 + a_7 &= a_1(r^5 + r^6)\\ &= \frac{1}{4} \times (2^5 + 2^6)\\ &= 2^{5-2} + 2^{6-2}\\ &= 2^3 + 2^4\\ &= 8 + 16\\ &= 24\end{aligned}$$

[다른 풀이]

$a_6 + a_7 = r^4(a_2 + a_3) = \frac{3}{2}r^4$으로 접근하여 푸는 방법도 있다.

※ TIP

등비수열의 모든 항이 양수이기 위해서는 공비와 첫째항이 모두 양수이어야 한다.
또한, 지수법칙을 잘 활용하면 계산 과정에서 시간과 실수를 줄일 수 있다.

06 ○○○

두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x < -1) \\ x & (-1 \le x < 3) \\ bx - 2 & (x \ge 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a + b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

답	⑤

PPL 해설 | 작성자: 박종원

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는

$\lim_{x \to -1-} |f(x)| = \lim_{x \to -1+} |f(x)|,\ \lim_{x \to 3-} |f(x)| = \lim_{x \to 3+} |f(x)|$

이어야 한다.

$\left(|f(-1)| = \lim_{x \to -1+} |f(x)|,\ |f(3)| = \lim_{x \to 3+} |f(x)|\right)$

$\lim_{x \to -1+} |f(x)| = \lim_{x \to -1+} (-x) = 1$

이므로 $\lim_{x \to -1-} |f(x)| = \lim_{x \to -1-} |x + a| = |a - 1|$

에서 $|a - 1| = 1,\ a = 2\ (\because\ a > 0)$이다.

또한,

$\lim_{x \to 3-} |f(x)| = \lim_{x \to 3-} x = 3$

이므로 $\lim_{x \to 3+} |f(x)| = \lim_{x \to 3+} |bx - 2| = |3b - 2|$

에서 $|3b - 2| = 3,\ b = \frac{5}{3}\ (\because\ b > 0)$이다.

$\therefore\ a + b = 2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$

※ TIP

(1) 절댓값 함수들이 자주 출제되고 있다. **항상 절댓값에 유의하자.**
절댓값 문제가 나오면 보통 범위를 이용하여 문제를 풀어야 하는 경우가 많으니 문제의 발문 혹은 문제 풀이 과정에서 나오는 "범위"를 꼭 잘 체크하자.

(2) 구간별 함수의 연속성 - 교육과정 특성상 연속 함수만 출제 중

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \ge a) \\ g(x) & (x < a) \end{cases},\ f(a) = g(a)$$

* 풀이

$|-1 + a| = |-1|$

$a > 0 \rightarrow -1 + a = 1,\ a = 2$

$|3b - 2| = |3|$

$b > 0 \rightarrow 3b - 2 = 3,\ 3b = 5,\ b = \frac{5}{3}$

07 ○○○

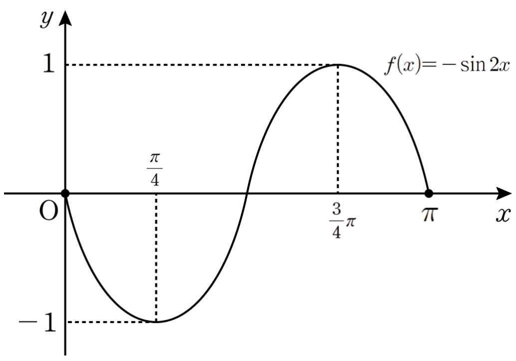
닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=-\sin 2x$가 $x=a$에서 최댓값을 갖고 $x=b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

답	④

PPL 해설 | 작성자: 박종원

함수 $f(x)=-\sin 2x$의 주기는 π이고 $(0, 0)$을 지나므로 함수의 그래프는 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 다음 그림과 같다.



이때 최솟값은 $x=\frac{\pi}{4}$에서 -1, 최댓값은 $x=\frac{3}{4}\pi$에서 1이므로

두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$는 각각 $\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$, $\left(\frac{3}{4}\pi, 1\right)$이고 두 점을

지나는 직선의 기울기는 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1-(-1)}{\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}$

※ TIP

삼각함수의 그래프 문제에서는 보통 주기를 먼저 생각하고 접근하자.
우선, 정의역의 구간과 주기와의 연관성을 꼭 체크하자.

08 ○○○

실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

> (가) $f(1)=3$
> (나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

답	③

PPL 해설 | 작성자: 박종원

조건 (나)에 의해 $1<x<5$에서 함수 $f(x)$의 기울기는 양수이므로 증가함수이다.
즉, $f(5)$의 값은 $1<x<5$에서 함수 $f(x)$의 기울기가 최소일 때 최소이다. $1<x<5$에서 $f'(x)=5$라고 하자.

$$\begin{aligned} f(5) &= f(1)+\int_1^5 f'(x)dx \\ &= f(1)+\int_1^5 5\,dx \\ &= 3+[5x]_1^5 \\ &= 3+25-5 \\ &= 23 \end{aligned}$$

[추가 설명]
조건 (나)에서 평균값 정리에 의해
$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(x)$가 존재하고 $f'(x)\geq 5$이므로
$f(5)-f(1)\geq 20$, $f(5)-3\geq 20$, $f(5)\geq 23$
따라서 $f(5)$의 최솟값은 23

※ TIP

이 문제는 킬러나 준킬러 문제로 바꿔서 나올 가능성이 큰 문제이다.
특히 조건 (나)의 경우 여러 방향으로 변형되어 나올 수 있으므로 확실하게 이해하고 넘어가야 한다.

09 ○○○

두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\ g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x \ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x) \ge g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

답	⑤

PPL 해설 | 작성자: 이준용

$f(x)-g(x) \ge 0$

$(x^3-x+6)-(x^2+a) \ge 0$,

$x^3-x^2-x \ge a-6$에서

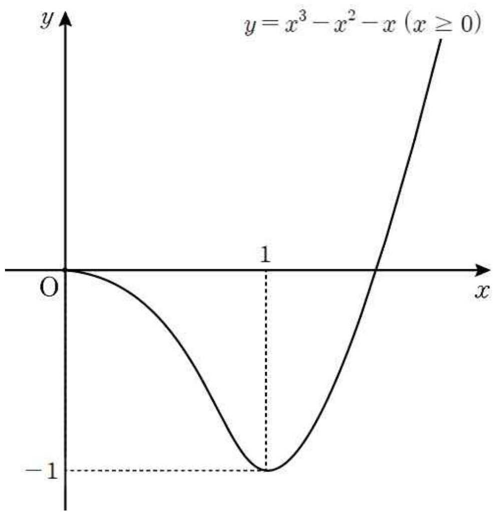
곡선 x^3-x^2-x의 그래프를 그려야하므로

$p(x)=x^3-x^2-x$로 둔다.

$p'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$p'(x)=0$을 만족시키는 $x=-\frac{1}{3}, 1$이므로

곡선 $p(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이 그래프의 모든 함수값은 항상 $y=a-6$보다 크거나 같아야 하기 때문에 $a-6$은 곡선 $p(x)$의 최솟값인 -1보다 작거나 같아야 한다. 따라서

$$a-6 \le -1,\ a \le 5$$

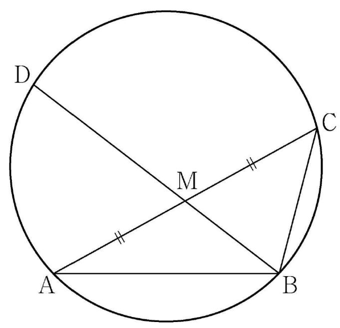
이고 a의 최댓값은 5이다.

※ TIP

위 문제의 조건에 $x \ge 0$조건이 있다는 것을 잊지말고 기억해두자. 부등식 $f(x) \ge g(x)$와 같이 두 함수를 부등호로 비교한 식의 처리는 보통 상수를 제외한 나머지를 이항시킨 후 풀이가 시작된다.

10 ○○●

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

답	③

PPL 해설 | 작성자: 최주원

원주각의 성질에 따라 $\angle CAB=\angle CDB$, $\angle DCA=\angle DBA$임을 알 수 있다. 따라서 삼각형 ABM과 삼각형 DCM은 AA닮음임을 알 수 있고, 따라서 다음이 성립한다.

$$\overline{DM}:\overline{MC}=\overline{AM}:\overline{BM},\ \overline{AM}\times\overline{MC}=\overline{BM}\times\overline{DM}$$

(ⅰ) $\overline{AC}$의 길이 구하기 (즉, $\overline{AM}$, $\overline{MC}$의 길이 구하기)

삼각형 ABC에서 각 BAC에 대한 코사인법칙을 통해 $\overline{AC}$의 길이를 구할 수 있다.

$2^2=\overline{AC}^2+3^2-6\overline{AC}\times\frac{7}{8}$,

$\overline{AC}^2-\frac{21}{4}\overline{AC}+5=0$,

$4\overline{AC}^2-21\overline{AC}+20=0$,

$(\overline{AC}-4)(4\overline{AC}-5)=0$

$\therefore\ \overline{AC}=4$ or $\frac{5}{4}$

$\overline{AC}>3$이므로, $\overline{AC}=4$이다. 따라서 $\overline{AM}=\overline{MC}=2$이다.

(ⅱ) $\overline{BM}$의 길이 구하기

이때 삼각형 ABM에서, 각 BAC에 대한 코사인법칙을 통해 $\overline{BM}$의 길이를 구할 수 있다.

$\overline{BM}^2=2^2+3^2-12\times\frac{7}{8}=\frac{5}{2}$

$\therefore\ \overline{BM}=\sqrt{\frac{5}{2}}$

따라서 $\overline{MD}=2\times2\times\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$임을 알 수 있다.

※ TIP

(1) 풀이의 방향성을 잡을 때, 할선 정리를 이용하여 해석할 수 있다.

$$\overline{\mathrm{BM}}\times\overline{\mathrm{MD}}=\overline{\mathrm{AM}}\times\overline{\mathrm{MC}}$$

* 할선 정리는 고등 교과 과정에서 빠진 내용이지만 도형의 성질(특히 원)을 이용하는 문제에서 유용하게 사용할 수도 있으므로 알아두면 좋다.

(2) $\overline{\mathrm{BM}}$을 구하는 과정에서 중선정리를 적용할 수 있다.

$$2(\overline{\mathrm{BM}}^2+\overline{\mathrm{AM}}^2)=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2$$

* 중등 기하 : 파푸스의 중선 정리(아폴로니오스의 정리)
중선 정리의 경우, 보통 수능보다는 내신 시험에서 자주 출제되는 경향이 있다. 하지만 이 역시 위와 같은 이유로 유용하게 사용할 수도 있으므로 알아두면 좋다.

해당 문제의 경우, 수험생들 사이에서 말이 많았던 문제 중 하나이다. 중등 기하는 앞으로도 많이 나올 수 있는 주제이므로 꼭 다시 한번 복습해보자.

11 ○○○

시각 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2-t\ ,\ v_2(t)=3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

답	⑤

PPL 해설 | 작성자: 오성원

점 P의 시각 t에서의 속도 $v_1(t)=2-t$는 기울기가 음수인 직선이므로 속도가 양의 값에서부터 일정하게 줄어든다.
$t=2$인 지점에서 속도가 0이고 이후 음의 값을 가진다.
결국 점 P는 원점에서 출발하여 $0\le t\le 2$까지 움직이다가 $2<t\le 4$까지는 운동방향을 바꿔서 다시 원점으로 돌아온다는 것을 알 수 있다.
이때 점 P가 다시 원점으로 돌아올 때까지 움직인 시각은

$$0\le t\le 4$$

이다.
따라서 점 Q가 움직인 거리를 l이라 할 때,

$$l=\int_0^4 |v_2(t)|dt=\int_0^4 |3t|dt=24$$

※ TIP

움직이는 물체의 속도는 방향과 크기를 동시에 가진다.
즉, 속도가 양수이면 물체는 진행하는 방향으로 움직이는 중이고,
속도가 음수이면 물체는 반대방향으로 움직이는 중이다.
이때, 속도를 나타내는 함수가 연속이라면 운동방향이 바뀌는 지점은 “속도$=0$”인 지점이다.

12 ○◑●

공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

> (가) $a_5 \times a_7 < 0$
>
> (나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

답	③

PPL 해설 | 작성자: 변우진

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하자.

조건 (가)에서 수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로 $a_5 < 0$이고 $a_7 > 0$이다.

이때 a_6의 부호에 따라 범위를 나누어보면

(i) $a_6 \geq 0$인 경우

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$에서

$a_7 + a_8 + \cdots + a_{12} = 6 + (-a_2 - a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12})$

이므로

$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + a_6,$

$(a+18) + (a+24) + (a+30) = 6 - (a+3) - (a+9) + (a+15),$

$3a + 72 = -a + 9,$

$4a = -63$

$\therefore\ a = -\frac{63}{4}$

이때, $a_6 = -\frac{63}{4} + 15 = -\frac{3}{4} < 0$이므로 조건에 모순이다.

(ii) $a_6 < 0$인 경우

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$에서

$a_7 + a_8 + \cdots + a_{12} = 6 + (-a_2 - a_4 - a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12})$

이므로

$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 - a_6,$

$(a+18) + (a+24) + (a+30) = 6 - (a+3) - (a+9) - (a+15),$

$3a + 72 = -3a - 21,\ 6a = -93$

$\therefore\ a = -\frac{31}{2}$

이때 $a_6 = -\frac{31}{2} + 15 = -\frac{1}{2} < 0$이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $a = -\frac{31}{2}$이므로 $a_{10} = -\frac{31}{2} + 9 \times 3 = \frac{23}{2}$

※ TIP

조건 (가)에서 수열 $\{a_n\}$의 대부분의 항의 부호를 추론할 수 있으므로 조건 (나)의 절댓값의 형태에 두려워 하지말고 침착하게 계산할 수 있어야 한다.

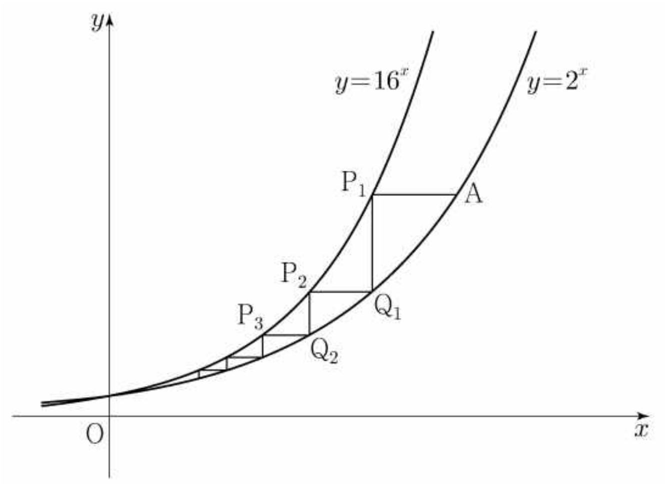
등차수열의 경우, 기울기가 공차 d인 일차함수로 생각하여 직관적으로 푸는 것도 가능하다.

13 ○○●

두 곡선 $y = 16^x$, $y = 2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64, 2^{64})$이 있다. 점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y = 16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y = 2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.

점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y = 16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y = 2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고, 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \frac{1}{k}$를 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]



① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60

답	①

PPL 해설 | 작성자: 문진환

점 P_1의 좌표를 구해보자. 점 A와 y좌표가 같고 점 Q_1과 점 P_1의 x좌표가 같으므로 이를 x_1이라 하면 $16^{x_1} = 2^{64}$이 성립한다.

$\therefore\ x_1 = 16$

점 Q_1의 좌표를 구해보면 점 P_1과 x좌표가 같으므로 점 Q_1의 좌표는 $\mathrm{Q}_1(16, 2^{16})$이다.

점 P_2의 좌표를 구해보면 $16^{x_2} = 2^{16}$이 성립하므로 $x_2 = 4$이다.

마찬가지 방법으로 계산해보면 다음이 성립한다.

$16^{x_n} = 2^{x_{n-1}}$

따라서 $4x_n = x_{n-1}$

수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 16, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로 x_n의 일반항은

$x_n = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이다.

부등식 $x_n < \frac{1}{k}$를 만족시키는 n의 최솟값이 6이므로 $n = 5, 6$일 때 $x_n = \frac{1}{k}$를 만족시키는 k값은 각각 $16, 64$이다.

따라서 $16 \leq k < 64$일 때 주어진 부등식을 만족하는 n의 최솟값이 6이 되며 자연수 k의 개수는 $64 - 16 = 48$이다.

14 ○◑●

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\int_0^x f(t)dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)dt & (x \ge 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

답	④

PPL 해설 | 작성자: 변우진

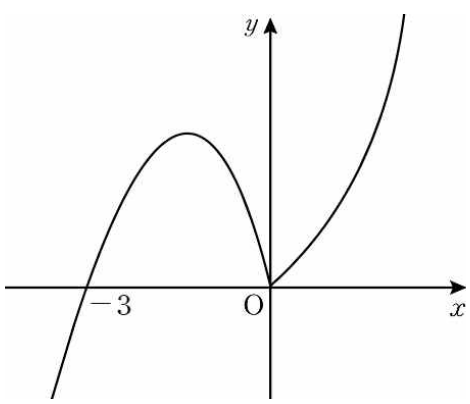
ㄱ. 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
따라서

$$g'(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ f(x) & (x \ge 0) \end{cases}$$

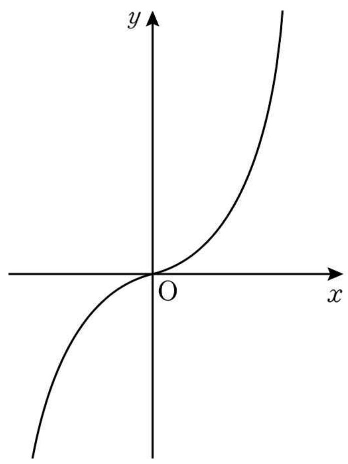
이고 연속이므로 $f(0)=0$이다. (참)
(함수 $f(x)$가 연속이므로 $\lim_{x\to 0-}\{-f(x)\}=\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)=0$
이때 서로 부호가 다르므로 0이 아니면 나올 수 없다.)
ㄴ. $g'(x)=h(x)$로 두면 $h(x)$는 이차함수이므로
$h(x)=3x(x-k)$(k는 실수)이고,

$$f(x)=\begin{cases} -h(x) & (x<0) \\ h(x) & (x \ge 0) \end{cases}$$

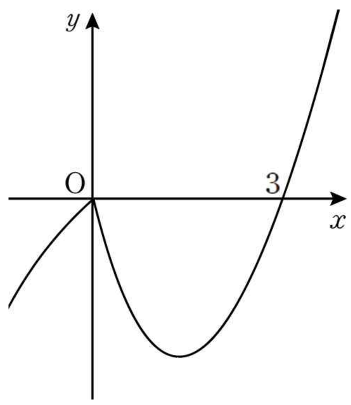
로 둘 수 있다.
이때 실수 k의 값에 따라 범위를 나누어 보면
(i) $k<0$인 경우
함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같으므로 극댓값을 가진다.



(ii) $k=0$인 경우
함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같으므로 극댓값을 갖지 않는다.



(iii) $k>0$인 경우
함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같으므로 극댓값을 갖는다.



따라서 $k=0$인 경우, 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖지 않는다. (거짓)
ㄷ. $x>0$일 때, $f(x)=3x(x-k)$ 이므로
$2<f(1)<4$에서 $2<3-3k<4$, 즉 $-\frac{1}{3}<k<\frac{1}{3}$이다.
이때

$$f(x)-x=\begin{cases} -3x\left(x-k+\frac{1}{3}\right) & (x<0) \\ 3x\left(x-k-\frac{1}{3}\right) & (x \ge 0) \end{cases}$$

에서
$k-\frac{1}{3}<0$이고 $k+\frac{1}{3}>0$이므로 방정식 $f(x)=x$의 실근은
$x=k-\frac{1}{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $k+\frac{1}{3}$이다. (참)

※ TIP

문제의 첫줄부터 꼼꼼히 읽는 습관을 들이자.
위 문제에서 함수 $g(x)$는 삼차함수이므로 그 도함수 $g'(x)$는 이차함수임을 이용하여 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 이차함수인 도함수 $g'(x)$를 이용하여 추론할 수 있어야 한다.

15 ○●●

자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1=0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n-\dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_{22}=0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

답	②

PPL 해설 | 작성자: 오성원

$a_1=0$이므로 조건에 맞게 수열을 나열하면 다음과 같다.

$$a_2=\frac{1}{k+1}$$

$$a_3=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$$

$$a_4=\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k}$$

$$a_5=\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k}$$

$$a_6=\frac{3}{k+1}-\frac{2}{k}$$

$$\vdots$$

이때, $a_2=\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{0}{k}$로 본다면,

$a_{2n}=\dfrac{n}{k+1}-\dfrac{n-1}{k}$이다.

한편, $a_1=a_{22}=0$이므로 $a_n=a_{n+21}$이 성립하므로

수열$\{a_n\}$의 주기는 21임을 알 수 있다.

따라서, 수열$\{a_n\}$의 가능한 최소 주기는

21의 약수인 $1, 3, 7, 21$이다.

(ⅰ) 최소 주기가 1인 경우

$a_n=a_{n+1}$이 성립해야 하는데

$a_1=0$이지만 $a_2=\dfrac{1}{k+1}\neq 0$($\because$ k는 자연수)

이므로 불가능하다.

(ⅱ) 최소 주기가 3인 경우

$a_n=a_{n+3}$이 성립하므로 $a_1=a_4=0$이다.

$$\therefore\ a_4=\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k}=0,\ k=1$$

(ⅲ) 최소 주기가 7인 경우

$a_n=a_{n+7}$이 성립하므로 $a_1=a_8=0$이다.

$$\therefore\ a_8=\frac{4}{k+1}-\frac{3}{k}=0,\ k=3$$

(ⅳ) 최소 주기가 21인 경우

$a_n=a_{n+21}$이 성립하므로 $a_1=a_{22}=0$이다.

$$\therefore\ a_{22}=\frac{11}{k+1}-\frac{10}{k},\ k=10$$

따라서, 모든 k의 값의 합은 $1+3+10=14$이다.

※ TIP

(1) 수열은 킬러급 문항으로 자주 출제 되는 주제이다.
따라서, 낯선 수열문제가 나왔을 경우 풀어낼 수 있도록 꾸준히 연습을 해야하는데 수열을 다룰 때 가장 중요한 것은 규칙성에 대한 믿음이다.
규칙이 없는 수열을 낼 수 없는 게 수열문제의 약점이기도 하니 모르는 수열을 쭉 나열해 보면서 어딘가에 반드시 규칙이 있음을 믿고 그 규칙을 찾는데 최대한 집중을 하자.
조금의 팁을 더 주자면 a_n의 밑 첨자의 수와 나열하고 있는 식의 변하는 수끼리 규칙을 맞추는 것이 일반적이다.

(2) 주기성은 함수에서 자주 다루지만, 고등학교 수준에서의 수열도 정의역이 자연수인 주기함수로 봐도 무방하기 때문에 마찬가지로 주기를 가질 수 있다.
일반적으로 주기가 p인 함수를 $f(x)=f(x+np)$(n은 0이 아닌 정수)로 표기할 수 있는데
여기서 가장 작은 주기인 p를 최소 주기로 본다.
결국 주기는 최소 주기 p의 모든 배수가 주기인 셈이다.
예를 들어 $y=\sin\pi x$는 짝수가 모두 주기가 될 수 있지만 가장 작은 2가 최소 주기라는 뜻이다.

(3) 첫째항에 대한 정보가 있는 경우 수열의 앞에서 뒤로 추론해 나간다. 또한 수열의 첫째항에 대한 정보가 없을 경우 문제에서 주어진 조건을 기준으로 역순으로 추론해나가면 문제를 쉽게 풀이 할 수 있다가 좋을 것 같습니다.

16 ○○○

방정식 $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

답	6

PPL 해설 | 작성자: 이준용

로그가 등장하면 로그의 진수 부분이 0보다 크다는 것을 써두고 풀이를 시작하자.

$x+2>0,\ x>-2$

$x-2>0,\ x>2$

이므로 $x>2$이어야 한다.

주어진 식을 전개해보면

$\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5,$

$\log_2(x+2)(x-2)=5,$

$(x+2)(x-2)=2^5,$

$x^2-36=0,$

$(x-6)(x+6)=0,$

$\therefore\ x=6\ (\because\ x>2)$

17 ○○○

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3+6x^2$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

답	15

PPL 해설 | 작성자: 최주원

$f'(x)=8x^3+6x^2$이므로 $f(x)=2x^4+2x^3+C$

이때 $f(0)=-1$이므로 $f(x)=2x^4+2x^3-1$

$\therefore\ f(-2)=32-16-1=15$

18 ○○○

$\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

답	3

PPL 해설 | 작성자: 오성원

$$\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=\sum_{k=1}^{10}4k+\sum_{k=1}^{10}a$$
$$=4\times55+10a$$
$$=220+10a$$

$\therefore\ 10a+220=250,\ a=3$

19 ○○●

함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

답	2

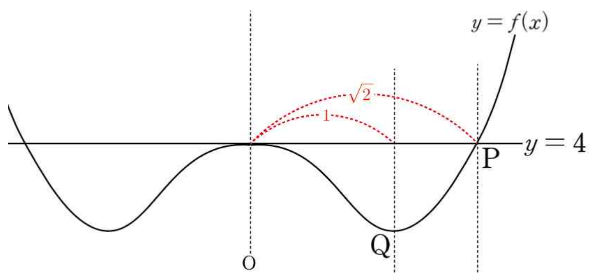
PPL 해설 | 작성자: 신동하

함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=4x^3+2ax$이다.
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로
$f'(1)=0,\ 4+2a=0,\ a=-2$
이고
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로
$f(0)=4,\ b=4$
$\therefore\ a+b=-2+4=2$

[다른 풀이]
함수 $f(x)$는 $f(x)=-f(-x)$로 우함수이다.
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 서로 다른 3개의 극점을 가지며, $x=0$에서 극대이다.

$$f(0)=4,\ b=4$$

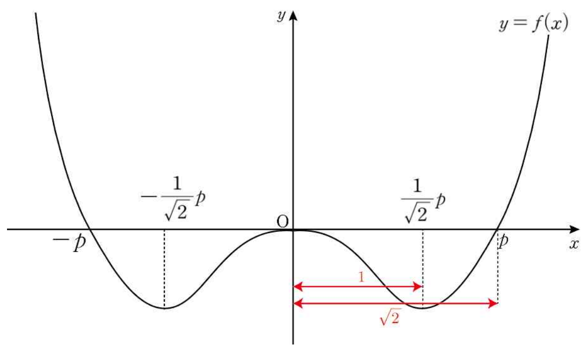
함수 $f(x)$의 극댓값이 4이므로
함수 $f(x)$가 $y=4$와 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 P라 하고, 극소인 점 중 x좌표가 양수인 점을 Q라 하면



$Q_x : P_x = 1 : \sqrt{2}$를 만족한다.
$Q_x=1$이므로 $P_x=\sqrt{2}$이다.
$f(P_x)=f(\sqrt{2})=4,\ 4+2a+4=4,\ a=-2$
$\therefore\ a+b=-2+4=2$

※ TIP

4차 함수의 비율 관계는 자주 등장하는 요소이다.
꼭 기억하고 사용하자.
이때, 상황에 맞게 해석하여 활용할 줄 알아야 하니 아무 상황에나 남발하지는 말 것!



$f(x)=x^2(x-p)(x+p)$
함수 $f(x)$는 $x=0, x=\pm p$에서 x축과 만난다.
$f'(x)=4x^3-2p^2x$
$=4x\left(x^2-\frac{1}{2}p^2\right)$
$=4x\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}p\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}p\right)$
함수 $f(x)$는 $x=0, x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}p$에서 극값을 갖는다.
즉, 구간 $[0,\infty)$에서 원점으로부터 극점의 x좌표까지의 거리와 원점으로부터 양의 실근까지의 거리의 비는 $\frac{1}{\sqrt{2}}p:p=1:\sqrt{2}$이다.
이와 같은 방법으로 3차 함수에서도 활용할 수 있는데 이는 위의 방법을 참고하여 직접 시도해보자.
원점에 대해 대칭인 함수를 설정하고 극값을 가지는 점과 x축과 만나는 점의 x좌표의 값을 비교해보자. 3, 4차 함수의 비율 관계는 자주 등장하니 이번 기회에 꼭 암기하고 넘어가도록 하자.

20 ○●●

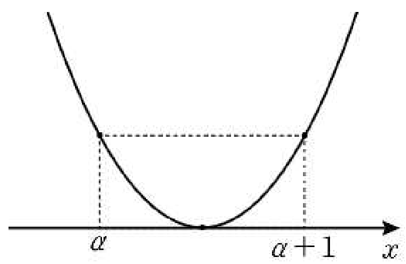
최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여
함수 $g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다.
$f(0)$의 값을 구하시오.[4점]

답	13

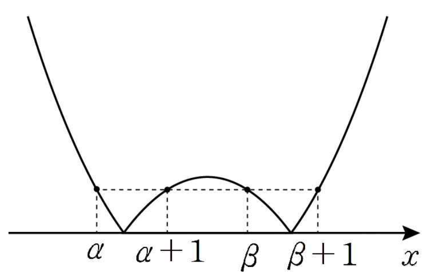
PPL 해설 | 작성자: 박근준

함수 $g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$에 대하여,
$g'(x)=|f(x+1)|-|f(x)|$이다.
함수 $g(x)$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이므로
$|f(2)|=|f(1)|,\ |f(5)|=|f(4)|$ ……㉠
이고
함수 $g'(x)$의 부호는 음에서 양으로 변해야 한다.
즉, $x=1$과 $x=4$를 기준으로 $|f(x+1)|<|f(x)|$ 에서
$|f(x+1)|>|f(x)|$로 대소관계가 변해야 한다. ……㉡
함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로
실근을 기준으로 함수 $|f(x)|$의 개형을 나누어 보면 다음과 같다.

(ⅰ) 방정식 $f(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 중근을 가지는 경우



㉡을 만족시키는 지점이 1개만 존재하므로 모순이다.
(ⅱ) 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지는 경우



㉡을 만족시키는 지점이 $x=\alpha,\ x=\beta$로 두 개 존재하므로
$\alpha=1,\ \beta=4$임을 알 수 있다. ($\because\ \alpha<\beta$)
따라서 함수 $f(x)=2(x-2)(x-4)+k$ 이고
$f(1)+f(2)=0$($\because$ ㉠)을 이용하면 $k=-3$이다.
$\therefore\ f(0)=13$

※ TIP

(1) 모든 연속함수의 부정적분은 미분가능하므로 주어진 함수 $g(x)$는 미분할 수 있다. 여기서 함수 $g(x)$를 미분해야겠다는 힌트를 얻을 수도 있겠다.

(2) 연속함수의 부정적분을 미분할 때에는 내부의 절댓값과 같은 복잡한

식 형태에 현혹될 필요가 없음을 알아야 한다.

다만, 부정적분 $\int_a^x (x-t)f(t)dt$는 x에 대한 함수이지만 피적분 함수는 t에 대한 함수이므로 x를 상수 취급하여 분리해서 미분해야 한다는 것에 주의하자.

(3) 이차함수 $f(x)$는 $x=3$을 기준으로 선대칭 함수이므로 $f(x)=2(x-3)^2+k$라고 두고 풀어도 좋다.

(4) 함수 $g(x)$의 극소는 함수 $|f(x)|$와 x축 및 적분구간으로 둘러싸인 도형의 넓이의 최솟값으로 생각하여 함수 $|f(x)|$의 개형을 유추할 수도 있다.

* 관련기출 [2017학년도 9월 나형 29번], [2019학년도 10월 가형 20번]

21 ○◑●

자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

답	426

PPL 해설 | 작성자: 박소영

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=\frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$라 하자. (단, k는 정수)

$2^{\frac{3k}{2}}=\frac{3}{4n+16}$, $2^{\frac{3k}{2}+2}(n+4)=3$, $n+4=3\times 2^{-\frac{3k}{2}-2}$

따라서 $n=3\times 2^{-\frac{3k}{2}-2}-4$

이때 n이 자연수 이므로 2의 지수인 $-\frac{3k}{2}-2$는 1 이상의 자연수이다. ……㉠

또한,

$n\le 1000$ 이므로, $3\times 2^{-\frac{3k}{2}-2}-4\le 1000$, $2^{-\frac{3k}{2}-2}\le\frac{1004}{3}$

이때 $2^8<\frac{1004}{3}<2^9$ 이고,

㉠에 의하여 $-\frac{3k}{2}-2$ 는 자연수이므로 $-\frac{3k}{2}-2\le 8$ 이다.

따라서 $1\le -\frac{3k}{2}-2\le 8$ 이므로

$3\le -\frac{3k}{2}\le 10$

$\therefore\ -\frac{20}{3}\le k\le -2$ ……㉡

㉠, ㉡을 모두 만족하는 정수 $k=-2,\ -4,\ -6$이다.

$k=-2$일 때, $n=3\times 2^1-4=2$

$k=-4$일 때, $n=3\times 2^4-4=44$

$k=-6$일 때, $n=3\times 2^7-4=380$

따라서 모든 n의 값의 합은 $2+44+380=426$

22 ●●●

두 양수 $a, b(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

답	19

PPL 해설 | 작성자: 신동하

이차함수 $f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.
따라서 함수 $g(x)$는 각 구간 내에서 연속을 만족하기에
함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=0$에서 연속을 만족해야 한다.

$$3f(0)=af(-b)$$

이제 문제의 박스 안의 조건을 살펴보자.
극한의 기본은 일단 대입이므로 분모, 분자에 $x=-3$을 대입하면

$$\lim_{x\to-3}(x+3)^2=0,$$

$$\lim_{x\to-3}\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|\right)=0$$

위 식은 $\dfrac{0}{0}$꼴의 형태이므로 식의 정리가 필요하다.

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|g(t)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

이때

$\lim\limits_{x\to-3}\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)=2|g(t)|$로 이 값은 상수이다.

$x\to-3$일 때 함수 $g(x)=(x+3)f(x)$이므로 식을 정리하면

$$\lim_{x\to-3}\frac{|g(t)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|f(x)|}{|x+3|\times2|g(t)|}$$

$\lim\limits_{x\to-3}|x+3|=0$으로, $2|g(t)|$의 값에 관계없이

$\lim\limits_{x\to-3}|f(x)|\neq0$이면, 주어진 극한은 발산하게 된다.

이는 $t=-3, 6$에서만 주어진 극한이 존재하지 않는다는 조건에 모순이다.

$\therefore\ \lim\limits_{x\to-3}|f(x)|=0$

$\therefore\ f(x)=(x+3)(x-p)$ (단, p는 실수)

$$\lim_{x\to-3}\frac{|f(x)|}{|x+3|\times2|g(t)|}=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)(x-p)|}{|x+3|\times2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|x-p|}{2|g(t)|}$$

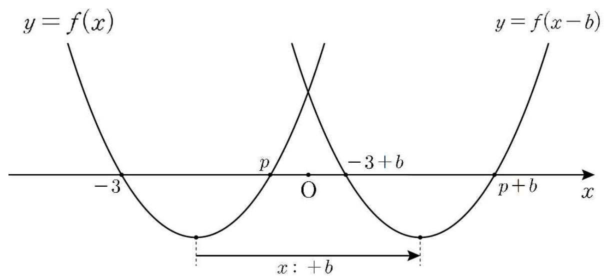
주어진 식이 발산하기 위해서는 반드시 $g(t)=0$을 만족해야 하므로
실수 t의 값은 -3과 6뿐임을 고려했을 때, $g(t)=0$인 실수 t는 오직 -3과 6뿐이다.

$\therefore\ g(-3)=g(6)=0$

① $f(x)=(x+3)(x-p)$ (단, $p\neq-3$)

(ⅰ) $p>-3$

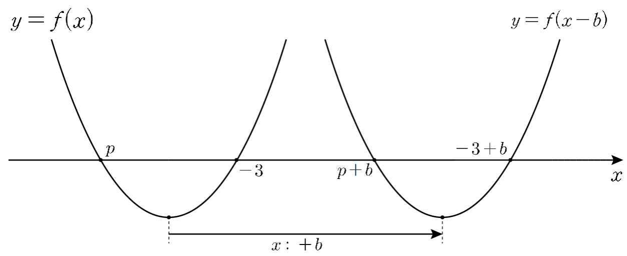
$f(x-b)$는 함수 $f(x)$를 x축의 양의 방향으로 b만큼 평행이동 한 것이므로 다음 그림과 같다.



$f(x)=0$을 만족하는 실근은 $x=-3,\ x=p$
$f(x-b)=0$ 만족하는 실근은 $x=-3+b,\ x=p+b$
$b>3$이므로 $-3+b>0$이며, $f(x-b)=0$은 서로 다른 양의 두 실근을 가져야 한다.
이때 함수 $g(t)$는 $t\ge0$에서 오직 실근 $t=6$만을 가지므로
$g(t)=(t+a)f(t-b)=0$
$f(t-b)=0$을 만족하는 서로 다른 실근의 개수는 오직 하나여야 하므로 모순이다.

(ⅱ) $p<-3$

$f(x-b)$는 함수 $f(x)$를 x축의 양의 방향으로 b만큼 평행이동 한 것이므로 다음 그림과 같다.



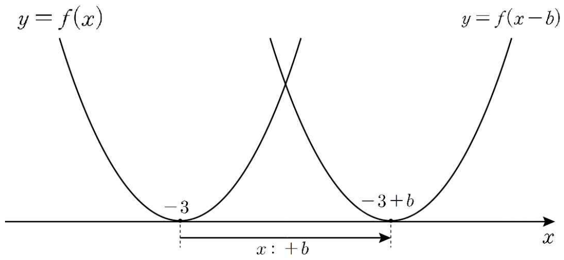
$f(x)=0$을 만족하는 실근은 $x=-3,\ x=p$ 으로 서로 다른 두 음의 실근을 갖는다.
이때 함수 $g(t)$는 $t<0$에서 오직 실근 $t=-3$만을 가지므로

$$g(t)=(t+3)f(t)=0$$

$f(t)=0$을 만족하는 서로 다른 실근의 개수는 오직 하나이어야 하므로 모순이다.

② $f(x)=(x+3)^2$

$f(x-b)$는 함수 $f(x)$를 x축의 양의 방향으로 b만큼 평행이동 한 것이므로 다음 그림과 같다.



$f(x)=0$을 만족하는 실근은 $x=-3$
$f(x-b)=0$ 만족하는 실근은 $x=-3+b$
$b>3$이므로 $-3+b>0$이므로 $f(x-b)=0$는 양의 중근을 갖는다.
이때 $g(t)=0$은 $t\geq 0$에서 실근 $t=6$만을 가지므로 조건을 만족한다.
$\therefore\ f(x)=(x+3)^2$
$g(6)=(6+a)f(6-b)=0$이고
$f(6-b)=(6-b+3)^2=0,\ 9-b=0,\ b=9$
이때 $3f(0)=af(-b)$를 만족하므로

$$3\times 3^2=a\times 36,\ a=\frac{3}{4}$$

따라서

$$\begin{aligned}g(4)&=(4+a)f(4-b)\\&=\left(4+\frac{3}{4}\right)f(-5)\\&=\left(4+\frac{3}{4}\right)\times 4\\&=16+3=19\end{aligned}$$

※ TIP

극한에서 변수와 변수가 아닌 것을 구분하는 습관을 들이자. 22번 문제처럼 x에 대한 극한을 물어보는 경우, t는 변수가 아니라 하나의 값으로 고정된 상수이다.
즉, t가 하나의 값으로 정해진 상황에서 x가 -3으로 다가갈 때 주어진 식이 어디로 수렴 혹은 발산하는지를 묻고 있는 것이다.
문자가 2개일 때 극한 내에서의 변수가 2개라 인식해 복잡한 상황으로 오해하지 않도록 유의하자.
익숙하지 않다면, $g(t)$를 상수 k로 치환하여 바라보는 것도 괜찮은 방법이다.

확률과 통계

23 ○○○

5개의 문자 a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

답 ②

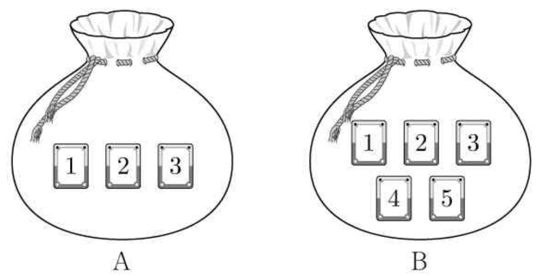
PPL 해설 | 작성자: 박종원

5개의 문자 중에서 a가 3번이 나오므로 5개의 문자를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=5\times4=20$

24 ○○○

주머니 A에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다.
두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼낼 때, 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 차가 1일 확률은? [3점]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{15}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

답 ①

PPL 해설 | 작성자: 박종원

(전체 경우의 수 - 확률의 분모)

우선, 두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼내는 경우의 수는 $3\times5=15$이다.

(해당 경우의 수 - 확률의 분자)

한편, 꺼낸 두 장의 카드의 차가 1인 경우를 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) $\mathrm{A}-\mathrm{B}=1$ (순서대로 $\boxed{\mathrm{A}}$ $\boxed{\mathrm{B}}$)

$\boxed{2}\ \boxed{1}$, $\boxed{3}\ \boxed{2}$ 로 2가지

(ⅱ) $\mathrm{B}-\mathrm{A}=1$

$\boxed{1}\ \boxed{2}$, $\boxed{2}\ \boxed{3}$, $\boxed{3}\ \boxed{4}$ 로 3가지

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 $2+3=5$가지이므로 구하는 확률은

$\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

25 ○○○

수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고, 6의 약수가 아니면 점 P를 이동시키지 않는다.

이 시행을 4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

답	④

PPL 해설 | 작성자: 박종원

우선, 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가

6의 약수인 1, 2, 3, 6이 나오는 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이고

6의 약수가 아닌 4, 5가 나오는 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로

점 P가 양의 방향으로 1만큼 이동할 확률은 $\frac{2}{3}$이고

이동하지 않을 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2, 3, 4일 확률의 합은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$=\frac{16+32+24}{3^4}$$

$$=\frac{8}{9}$$

26 ○○○

다항식 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식에서 x^5의 계수가 12일 때, x^6의 계수는? (단, n은 자연수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

답	②

PPL 해설 | 작성자: 문진환

$f(x)=(x^2+1)^4$, $g(x)=(x^3+1)^n$이라 하자.

주어진 다항식 $f(x)g(x)$의 전개식에서 x^5이 나오는 경우는 $f(x)$의 이차항과 $g(x)$의 3차항이 곱해지는 경우 뿐이다.

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_n\mathrm{C}_1=12$이므로 $4n=12$

$\therefore\ n=3$

주어진 다항식의 전개식에서 x^6이 나오는 경우는

1) $f(x)$의 6차항과 $g(x)$의 상수항이 곱해지는 경우

2) $f(x)$의 상수항과 $g(x)$의 6차항이 곱해지는 경우

2가지이다.

$f(x)$의 6차항의 계수는 ${}_4\mathrm{C}_3=4$, $g(x)$의 상수항은 ${}_3\mathrm{C}_3=1$이므로

$4\times1=4$

$f(x)$의 상수항은 ${}_4\mathrm{C}_4=1$, $g(x)$의 6차항의 계수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$이므로

$1\times3=3$

$\therefore\ 4+3=7$

※ TIP

이항 정리와 관련된 문제에서는

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_r\times a^{n-r}\times b^r$$

이라 두고 풀어 나가야 한다.

27 ○○○

네 문자 a, b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

(가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다.
(나) a는 한 번만 나온다.

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480

답	③

PPL 해설 | 작성자: 박근준

조건 (가)에 의해 4개의 문자 중 대문자는 2개이므로
양 끝자리에 나올 대문자를 선택하는 경우의 수는 $2\times2=4$이다.
또한, 조건 (나)에 의해 양 끝을 제외한 4개의 자리 중 하나에 a가 나오면 되므로 a의 위치를 선택하는 경우의 수는 4이다.
아무것도 없는 세 자리에는 b, X, Y 모두 올 수 있으므로
가능한 경우의 수는 $3\times3\times3=27$이다.
따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는 $4\times4\times27=432$

28 ○◑●

숫자 $1, 2, 3, 4, 5$ 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{13}{20}$

답	④

PPL 해설 | 작성자: 신동하

전체 경우의 수
숫자 5개 중 서로 다른 4개를 선택 후, 일렬로 나열하므로
${}_5C_4\times4!=5!=120$

(ⅰ) 5의 배수
택한 수가 5의 배수이기 위해서는 일의 자리에 숫자 5가 와야 한다. 남은 3자리에는 남은 4개의 숫자 중 서로 다른 3개를 택해 일렬로 나열해야 하므로 ${}_4C_3\times3!=4!=24$

(ⅱ) 3500 이상
택한 수가 3500 이상인 경우는 천의 자리가 $4, 5$인 경우와 3인 경우를 나누어 생각해 볼 수 있다.
먼저 천의 자리가 $4, 5$인 경우, 남은 3자리에는 천의 자리에서 선택한 숫자를 제외한 4개의 숫자 중 서로 다른 3개를 택해 일렬로 나열해야 하며 서로 경우의 수가 같으므로
$2\times{}_4C_3\times3!=2\times4!=48$
천의 자리가 3인 경우, 백의 자리에 반드시 5가 와야 하므로 $3, 5$를 제외한 3개의 숫자 중 서로 다른 2개를 골라 남은 2자리에 일렬로 나열해야 하므로 ${}_3C_2\times2!=3!=6$
따라서 택한 수가 3500 이상인 경우는 $48+6=54$이다.

(ⅲ) 5의 배수이며 3500 이상
앞서 2번째 케이스에서 분류한 것처럼 천의 자리를 기준으로 구분해보자.
천의 자리에 3이 오는 경우는 백의 자리에 5가 와야 하므로 모순이다.
천의 자리에 4가 오는 경우는 일의 자리에 5가 오며, 남은 2자리에 숫자 $1, 2, 3$ 중 서로 다른 2개를 골라 일렬로 나열해야 하므로 ${}_3C_2\times2!=3!=6$
천의 자리에 5가 오는 경우는 일의 자리에 5가 올 수 없으므로 모순이다.
따라서 가능한 경우는 6이다.

따라서 (ⅰ)~(ⅲ)에 의해 구하는 확률은
$$\frac{24+54-6}{120}=\frac{72}{120}=\frac{3}{5}$$

29 ○●●

집합 $X=\{1,2,3,4,5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(f(1))=4$
(나) $f(1) \le f(3) \le f(5)$

답	115

PPL 해설 | 작성자: 문진환

$f(f(1))=4$이므로 $f(1)$의 함숫값에 따라 경우를 나누어서 계산한다.

(i) $f(1)=1$인 경우
$f(f(1))=f(1)=1$이므로 조건 (가)에 모순이다.

(ii) $f(1)=2$인 경우
$f(f(1))=f(2)=4$이므로 $f(3), f(4), f(5)$의 함숫값을 정해주면 된다.
조건 (나)에서 $2 \le f(3) \le f(5)$이므로 $f(3), f(5)$의 함숫값의 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$
$f(4)$의 함숫값의 경우의 수는 5이므로 $10 \times 5 = 50$

(iii) $f(1)=3$인 경우
$f(f(1))=f(3)=4$이므로 $f(2), f(4), f(5)$의 함숫값을 정해주면 된다.
조건 (나)에서 $3 \le 4 \le f(5)$이므로 $f(5)$의 함숫값의 경우의 수는 2이다.
$f(2), f(4)$의 함숫값의 경우의 수는 각각 5이므로
$5 \times 5 \times 2 = 50$

(iv) $f(1)=4$인 경우
$f(f(1))=f(4)=4$이므로 $f(2), f(3), f(5)$의 함숫값을 정해주면 된다.
조건 (나)에서 $4 \le f(3) \le f(5)$이므로 $f(3), f(5)$의 함숫값의 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$
$f(2)$의 함숫값의 경우의 수는 5이므로 $3 \times 5 = 15$

(v) $f(1)=5$인 경우
$f(f(1))=f(5)=4$이므로 조건 (나) $f(1) \le f(5)$에 모순이다.

따라서 (i)~(v)에 의해 총 경우의 수는
$50+50+15=115$

30 ◑●●

주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c라 하자. $b-a \ge 5$일 때, $c-a \ge 10$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

답	9

PPL 해설 | 작성자: 박종원

(조건을 만족하는 전체 경우의 수 - 조건부확률의 분모)
우선, $b-a \ge 5$인 경우의 수를 구하자.
$a<b<c$와 $b-a \ge 5$를 동시에 만족해야 한다.
$a=1$일 때, b와 c는 6부터 12에서 2개의 숫자를 선택하는 경우이므로 ${}_7\mathrm{C}_2$이다.
또한, $a=2$일 때, b와 c는 7부터 12에서 2개의 숫자를 선택하는 경우이므로 ${}_6\mathrm{C}_2$이다.
같은 방법으로 나머지 경우의 수를 구한 뒤 모두 더하면 조건을 만족하는 전체 경우의 수는
${}_7\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2+\cdots+{}_2\mathrm{C}_2={}_8\mathrm{C}_3=56$
(전제 조건을 만족하는 전체 경우의 수 중에서 다음 조건을 만족하는 경우의 수 - 조건부확률의 분자)
$a<b<c$와 $b-a \ge 5$를 만족하면서 $c-a \ge 10$을 동시에 만족해야 한다.
$c=11$일 때, $a=1$이고 b는 6부터 10에서 1개의 숫자를 선택하는 경우이므로 ${}_5\mathrm{C}_1=5$이다.
또한, $c=12$일 때, $a=1$이면 b는 6부터 11에서 1개의 숫자를 선택하는 경우이므로 ${}_6\mathrm{C}_1=6$이고, $a=2$이면 7부터 11에서 1개의 숫자를 선택하는 경우이므로 ${}_5\mathrm{C}_1=5$이다.
따라서 조건을 만족하는 경우의 수는 $5+5+6=16$이고 조건부확률은 $\frac{16}{56}=\frac{2}{7}$이다.
$\therefore\ p+q=7+2=9$

※ TIP

조건부확률 문제의 경우, 전제 조건을 만족하는 확률을 분모로 넣고 분수로 접근하는 방법이 많이 쓰이기는 하지만, 필자의 경우는 경우의 수로만 접근하는 방법이 더 쉽다고 판단하기에 위와 같이 해설을 작성하였다. EBS 해설과 같이 판단해봤을 때, 본인한테 더 쉽게 다가오는 해설로 접근하는게 가장 좋다.
이와 비교하기 위해 아래에 EBS 해설을 넣어놨으니 참고하자.

EBS 해설 (참고용)

$b-a \geq 5$인 사건을 E, $c-a \geq 10$인 사건을 F라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(F|E)=\dfrac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$이다.

모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

${}_{12}\mathrm{C}_3=220$

이때 $b-a \geq 5$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 6),\ (1,\ 7),\ (1,\ 8),\ \cdots,\ (1,\ 11)$

$(2,\ 7),\ (2,\ 8),\ \cdots,\ (2,\ 11)$

$\vdots$

$(6,\ 11)$

$a=1$일 때 c의 개수는

$6+5+4+3+2+1=21$

$a=2$일 때 c의 개수는

$5+4+3+2+1=10$

$a=3$일 때 c의 개수는

$4+3+2+1=10$

$a=4$일 때 c의 개수는

$3+2+1=6$

$a=5$일 때 c의 개수는

$2+1=3$

$a=6$일 때 c의 개수는

1

이므로 $b-a \geq 5$를 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$21+15+10+6+3+1=56$

즉, $\mathrm{P}(E)=\dfrac{55}{220}=\dfrac{14}{55}$

한편, $b-a \geq 5$이고 $c-a \geq 10$인 경우는

$a=1,\ c=11$일 때

$b=6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$

$a=1,\ c=12$일 때

$b=6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$

$a=2,\ c=12$일 때

$b=7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$

이므로 $b-a \geq 5$이고 $c-a \geq 10$인 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$5+6+5=16$

즉, $\mathrm{P}(E\cap F)=\dfrac{16}{220}=\dfrac{4}{55}$

따라서

$$\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{4}{55}}{\frac{14}{55}}=\frac{2}{7}$$

즉, $p=7$, $q=2$이므로

$p+q=7+2=9$

미적분

23 ○○○

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

답	①

PPL 해설 | 작성자: 변우진

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{(n^2+3n)-(n^2+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\frac{2n}{n}}=1$$

24 ○○○

곡선 $x^2-y\ln x+x=e$ 위의 점 (e, e^2)에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $e+1$ ② $e+2$ ③ $e+3$ ④ $e+4$ ⑤ $e+5$

답	①

PPL 해설 | 작성자: 박근준

음함수의 미분법을 이용해 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-\frac{1}{x}\times y-\ln x\times\frac{dy}{dx}+1=0$이다.

따라서 곡선 위의 점 (e, e^2)에서의 접선의 기울기는

$$2e-\frac{1}{e}\times e^2-\ln e\times\frac{dy}{dx}+1=0$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=e+1$$

25 ○○○

함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

답	②

PPL 해설 | 작성자: 박근준

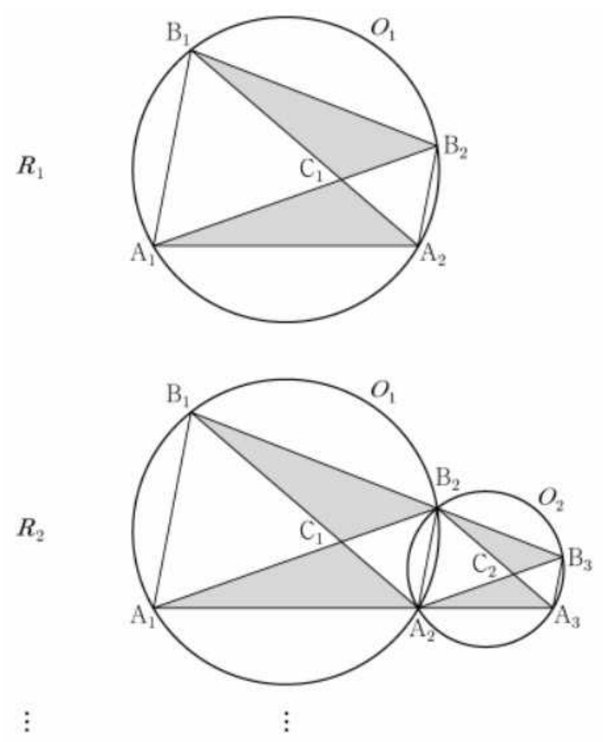
함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로
방정식 $g(f(x))=x$가 성립한다.
합성함수의 미분법에 의해 $g'(f(x))\times f'(x)=1$이고
위의 식에 $g'(3)$이 나오도록 유도하려면
$f(x)=3,\ x(x^2+2)=0$이어야 한다.
즉, $x=0$이면 $g'(3)\times 2=1$이므로
$\therefore\ g'(3)=\frac{1}{2}$

※ TIP

$y=f(x)$의 역함수 $g(x)$가 나오면 항상 구하는 것을 속함수라고 하고 합성함수를 만든 뒤, 합성함수의 미분법으로 풀어야 한다.

26 ○○○

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고 $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.
점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 두 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$ ④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

답	②

PPL 해설 | 작성자: 문진환

삼각형 $A_1B_1C_1$과 $A_2B_2C_1$이 정삼각형임을 보이자.
문제의 조건에서 $\overline{A_1B_1}$과 $\overline{A_2B_2}$는 평행하므로

$\angle A_1B_1C_1=\angle B_2A_2C_1=\frac{\pi}{3}$(엇각)

또한, $\angle A_1B_1C_1$과 $\angle A_2B_2C_1$은 호 A_1A_2의 원주각이므로 각의 크기가 같다.

$\angle B_2A_2C_1=\angle A_2B_2C_1=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 $A_2B_2C_1$은 정삼각형이다.

마찬가지 방법으로 삼각형 $A_1B_1C_1$또한 정삼각형이다.

삼각형 $A_1A_2C_1$과 $B_1B_2C_1$에서

$\overline{B_1C_1}=\overline{A_1C_1}=2$

$\overline{B_2C_1}=\overline{A_2C_1}=1$

$\angle B_1C_1B_2=\angle A_1C_1A_2=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\triangle A_1A_2C_1 \equiv \triangle B_1B_2C_1$(SAS합동)

각각의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot \sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

그림 R_1에서 색칠한 모양의 넓이는 $\sqrt{3}$이다.

그림 R_2에서 원 O_1과 O_2의 길이 비는 $\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=2:1$이므로

원 O_1의 모양과 원 O_2의 모양의 넓이의 비는 $4:1$이다.

따라서 그림 R_n의 모양의 넓이는 첫째항이 $\sqrt{3}$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열의 n번째 항까지의 합과 같다.

$$S_n=\frac{\sqrt{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{4}}\text{이므로}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\text{이다.}$$

※ TIP

등비급수의 활용(도형) 문제에서는 구하는 것을 직접적으로 구하지 말고 구하는 것을 둘러 싸고 있는 도형의 길이 비를 구하여 풀이한다.
(물론 S_1은 구해야 한다. S_2는 직접 구할 필요가 없다.)
공비를 구할 때는 길이 비를 제곱하여 넓이 비로 바꾼다.

27 ○○●

첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

답	③

PPL 해설 | 작성자: 신동하

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=S$ 이므로, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=0$이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면,

$a_n=d(n-1)+4$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{d(n-1)+4}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right\}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{d(n-1)+4}{n}\right\}-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+7}{n+2}\right)=0$$

이고

$d-3=0,\ d=3$

이다.

따라서 $a_n=d(n-1)+4=3(n-1)+4=3n+1$

이므로

$$\begin{aligned}S&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3+\frac{1}{n}-\left(3+\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

※ TIP

(1) 급수와 수열의 극한값 사이의 관계

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다. 이때 역은 성립하지 않는다.

(2) 등차수열과 일차함수

등차수열 $\{a_n\}$은 n에 대한 일차식으로 일차함수의 형태로 바라볼 수 있어야 한다. 특히, 공차 d는 기울기로, 자연수 n은 정의역으로 접근해 볼 수 있겠다.

28 ○●●

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고, 함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
(다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

답	⑤

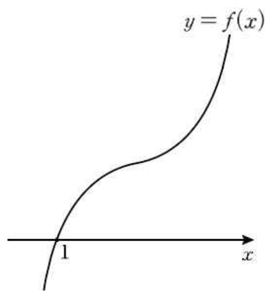
PPL 해설 | 작성자: 박근준

조건 (가)에 의해 모든 실수 x에 대해서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서만 불연속이다.
함수 $g(x)$는 구간에 따라 함수가 나누어져 있으므로 그 경계에서 불연속인지를 먼저 따질 필요가 있다. 해당 조건을 판단하는 경우는 다음과 같다.

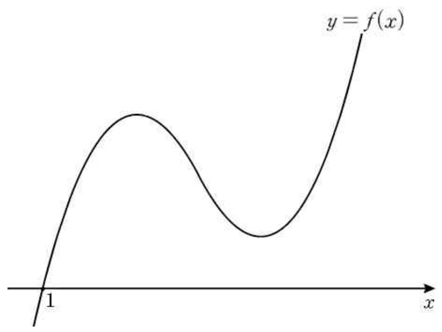
(i) $x=1$에서 함수 $|f(x)|$가 불연속 → 함수 $g(x)$가 불연속
다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다. 따라서 $|f(x)|$는 연속이다. 즉, 해당 상황은 존재하지 않는다.

(ii) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$ → $\lim\limits_{x\to 1}\ln|f(x)|$가 발산
모든 실수 x에 대해서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서만 불연속이어야 하므로 방정식 $f(x)=0$을 만족하는 실근은 오직 $x=1$이어야 한다.

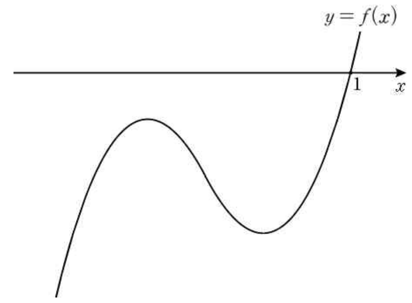
따라서 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$의 개형은 다음과 같다.



(그림3) : 단조증가



(그림4) : 극값이 양수

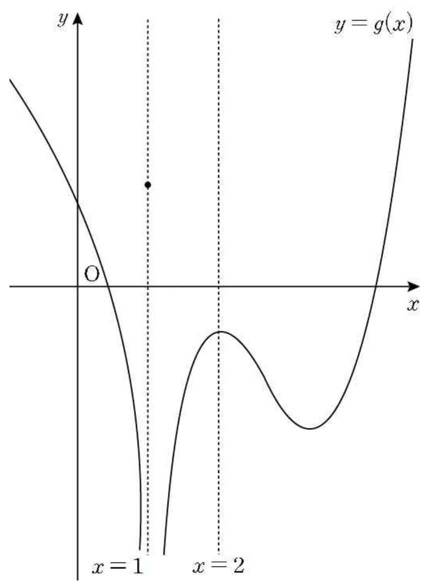


(그림5) : 극값이 음수

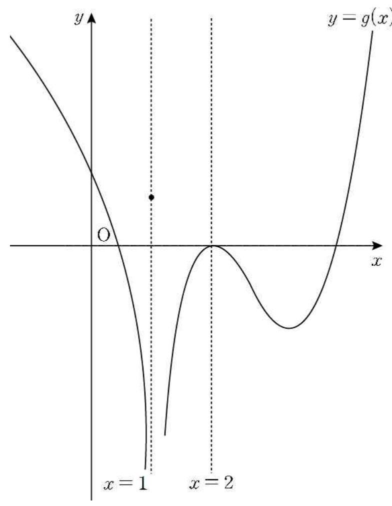
세 경우 모두, $x>1$인 모든 실수 x에 대해 $f(x)>0$ 이고, $x\leq 1$인 모든 실수 x에 대해 $f(x)\leq 0$이라는 것을 알 수 있다. 따라서 함수 $g(x)$를 다시 표현하면,

$$g(x)=\begin{cases}\ln(-f(x)) & (x<1)\\ 1 & (x=1)\\ \ln(f(x)) & (x>1)\end{cases}$$

이다.
조건 (나)에 의해 $g'(2)=0$이고, $g(2)\leq 0$이다.
$x>1$인 모든 실수 x에 대해 $f(x)>0$이고 $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$이므로
$g'(2)=0$. 즉, $f'(2)=0$이다.
$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\infty$이므로
해당 조건을 만족하는 함수 $g(x)$의 개형은 다음과 같다.



(그림6) : $g(2)<0$



(그림7) : $g(2)=0$

(그림3)과 (그림5)는 $x>1$에서 증가함수이므로 (나)조건을 만족하는 $f(x)$의 개형은 (그림4)이다.
또한, 함수 $g(x)$는 $x \neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이고
$\lim_{x\to 1} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} g(x) = \infty$이므로
방정식 $g(x)=0$는 적어도 2개의 실근을 가진다. ($\because$ 사잇값 정리)
따라서 (다)조건을 동시에 만족하기 위해서는 $g(2)=0$이어야 한다.
즉, $f(2)=1$이어야 한다.
주어진 조건을 모두 만족하는 삼차함수 $f(x)$를 구하면,

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 8x - 5$이고

$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 14x + 16) = \frac{1}{2}(x-2)(3x-8)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x = \frac{8}{3}$에서 극솟값을 갖고, 함수 $g(x)$ 또한 $x = \frac{8}{3}$에서 극솟값을 가짐을 알 수 있다.

$\therefore$ ($g(x)$의 극솟값)$= g\left(\frac{8}{3}\right) = \ln\frac{25}{27}$

※ TIP

Comment 1 : 지금까지 출제된 기출문제를 잘 학습한 상태라면, 이 문제를 접근하기엔 큰 어려움이 없었을 것이다. 함수 $g(x)$는 구간에 따라 함수가 나누어져 있으므로 그 경계에서 불연속인지를 먼저 따져야하고, 함수 $g(x)$ 내부의 절댓값을 $f(x)$의 부호를 기준으로 벗겨야겠다고 생각할 필요가 있다.

Comment 2 : $x=2$에서 함수 $g(x)$가 극값을 가진다고 주어진다면, $g'(x)$의 부호변화를 조사할 필요 없이 $g'(2)=0$의 관계식만 구하면 된다.

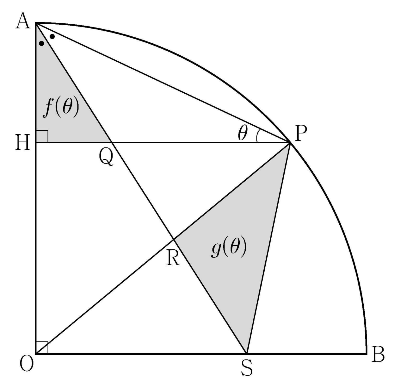
Comment 3 : 함수 $f(x)$는 $y=1$과 두 지점에서 만난다. 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 $y=1$과 접하므로, $f(x)-1 = \frac{1}{2}(x-2)^2(x-a)$라고 식을 설정해도 좋다.

Comment 4 : 방정식 $f(x)=0$을 만족하는 실근은 오직 $x=1$이고, $x>1$인 모든 실수 x에 대해 $f(x)>0$이고 $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$이므로, 결국 곡선 $f(x)$의 성질이 $\ln f(x)$에서도 유지되는 것과 같다. 따라서 삼차함수의 비율관계를 이용하여 $g(x)$의 극솟값을 구할 수도 있다.

29 ○●●

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle$OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle \mathrm{APH} = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)} = k$일 때, $100k$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



답	50

PPL 해설 | 작성자: 최주원

(ⅰ) $f(\theta)$ 구하기

① $\angle \mathrm{PAH} = \angle \mathrm{OPA} = \frac{\pi}{2} - \theta$ ($\because \overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OP}} = 1$)

② $\angle \mathrm{OPH} = \frac{\pi}{2} - 2\theta$, $\angle \mathrm{POH} = 2\theta$

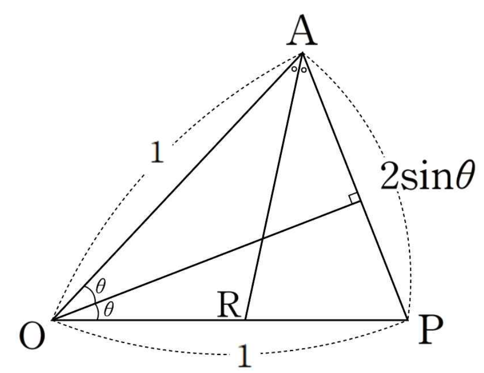
$\overline{\mathrm{OP}} = 1$이므로, $\overline{\mathrm{OH}} = \cos 2\theta$이다. 또한 $\overline{\mathrm{AH}} = 1 - \cos 2\theta$,

$\angle \mathrm{QAH} = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$이므로,

$\overline{\mathrm{QH}} = (1-\cos 2\theta)\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$이다.

$\therefore f(\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)^2 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$

(ⅱ) $g(\theta)$ 구하기
삼각형 OPA에 대해 다음을 관찰할 수 있다.



각의 이등분선 정리에 의해, $\overline{\mathrm{PR}} = \frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}$임을 알 수 있다.
삼각형 OSP의 넓이 S에 대해 삼각형 PRS의 넓이 $g(\theta)$는 다음과 같은 식을 만족한다.

$$g(\theta)=S\times\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}$$

이때 삼각형 OSP의 넓이 S를 구해보자.

삼각형 OSP의 밑변의 길이를 OS라 할 때, 높이는 점 P에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 T라 할 때, 선분 PT의 길이다.

① $\overline{\mathrm{OS}}=\tan(\angle\mathrm{QAH})=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

② $\overline{\mathrm{PT}}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\cos2\theta$

$\therefore\ S=\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\cos2\theta$

$\therefore\ g(\theta)=\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\cos2\theta\times\frac{\sin2\theta}{1+\sin2\theta}$

그러므로 주어진 극한값을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\theta^3\times\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos2\theta\sin2\theta}{2(1+\sin2\theta)}\times\frac{2}{(1-\cos2\theta)^2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3\cos2\theta\sin2\theta}{(1+\sin2\theta)(1-\cos2\theta)^2}$$

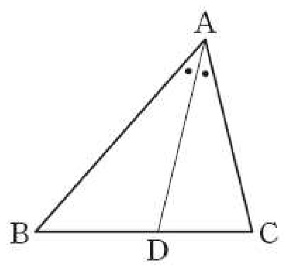
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3\sin2\theta\cos2\theta}{(1+\sin2\theta)}\times\frac{(1+\cos2\theta)^2}{\sin^42\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\theta}{\sin2\theta}\right)^3\times\frac{\cos2\theta}{1+\sin2\theta}\times(1+\cos2\theta)^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times2^2=\frac{1}{2}$$

따라서 $k=\frac{1}{2}$이므로, $100k=50$이다.

※ TIP



1. 각의 이등분선 정리

삼각형 ABC에서 $\angle$A의 이등분선이 $\overline{\mathrm{BC}}$와 만나는 점을 D라 할 때, 다음이 성립한다.

$$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$$

2. 삼각함수의 극한

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

30 ●●●

양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

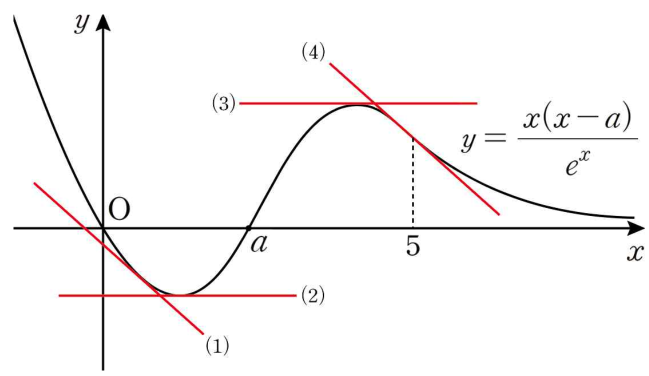
$g(5)+\lim_{t\to5}g(t)=5$일 때, $\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

답	16

PPL 해설 | 작성자: 이준용

$y=f(x)$와 함수 $f(x)$의 $x=t$에서의 접선의 방정식인 직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$의 교점의 개수를 $g(t)$로 두었기 때문에 접선을 직접 그려보며 $g(t)$를 구해주는 방향으로 풀이하면 된다.



(1)번 접선에선 $g(t)=1$이 된다.

(2)번 접선은 함수 $f(x)$의 극솟점의 x좌표를 n으로 할 때 $t=n$에서의 접선의 그래프이고

이때 $g(n)=2$이고 $\lim_{t\to n+}g(t)=3,\ \lim_{t\to n-}g(t)=2$ 이 된다.

좌극한과 우극한이 일치하지 않기에 $\lim_{t\to n}g(t)$는 정의되지 않는다.

좌극한과 우극한이 일치하지 않는다는 조건에 부합하므로 n는 k가 될 수 있다.

(3)번 접선에서와 같이 극댓점에서도 위와 같은 방식으로 알아보면 극댓점의 x좌표 또한 k가 될 수 있음을 알 수 있다.

극댓점의 x좌표를 m이라 하면

$g(m)=1,\ \lim_{t\to m+}g(t)=2,\ \lim_{t\to m-}g(t)=1$ 이 되므로 m은 k가 될 수 있다.

다른 점들도 위와 같은 방식으로 조사해보면 극댓점, 극솟점 외에는 조건을 만족하는 t가 없음을 알 수 있다.

우리가 알고자 하는 값은 각각의 k값이 아닌 k값의 합이므로 극점의 좌표를 각각 구할 필요 없이 (도함수)$=0$일 때의 두근의 합만 알면 된다.

따라서
도함수 $f'(x)=\left(-x^2+(a+2)x-a\right)e^x$의 두근의 합이 $a+2$이므로 a값만 구하면 된다.

(4)번 접선은 함수 $f(x)$의 변곡점에서 그은 접선이고
이때 변곡점의 x좌표를 b으로 두면,
$t=b$일 때 $g(t)=2$이고 $\lim_{t\to b+}g(t)=\lim_{t\to b-}g(t)=3$이기 때문에 주어진 조건을 만족하고 $b=5$이다.
함수 $f(x)$의 변곡점의 x좌표 중 하나가 5이므로
$f''(5)=0$를 이용해 a를 구해주면 $a=\frac{7}{3}$이다.

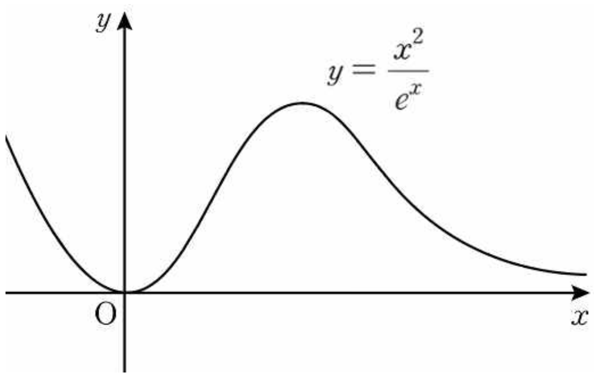
따라서 구하고자 하는 것은 $a+2=\frac{13}{3}$이므로
최종적인 답은 $p+q=16$이다.

※ TIP

함수 $f(x)$를 보자마자 함수의 개형이 바로 떠올라야한다.
기출문제에 자주 소개된 함수이기 때문에 모르는 분들은 [개념 설명]을 보는 것을 권장한다.

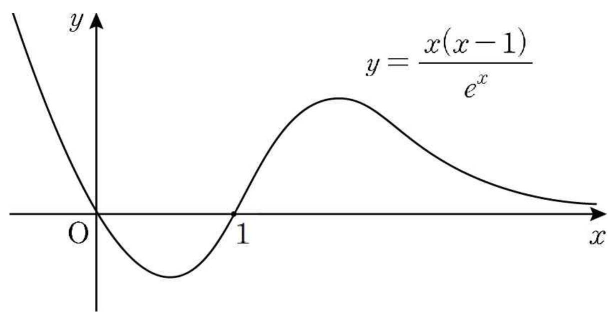
[개념 설명]

곡선 $y=\frac{x^2}{e^x}$의 그래프의 개형만 알고 있다면 미분 과정 없이 바로 그릴 수 있는데 특히 이 함수는 자주 나오기 때문에 외워두면 큰 도움이 된다.



위 그래프는 x^2을 인수로 갖기 때문에 $x=0$에서 접하는 형태가 나온 것이다.

그렇다면 x^2이 아닌 $x(x-1)$을 인수로 가지는
함수 $\frac{x(x-1)}{e^x}$의 그래프는 $x=0,\ 1$을 지나는 형태가 될 것이다.
따라서 처음에 그린 그래프에서 조금만 변형해주면



와 같이 나오게 된다.

기하

23 ○○○

서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 두 벡터

$$\vec{a}+2\vec{b},\ 3\vec{a}+k\vec{b}$$

가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값은?

(단, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$) [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

답	③

PPL 해설 | 작성자: CSM17 연구소

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로 $\vec{a}=p\vec{b}$를 만족시키는 실수 p는 존재하지 않는다. $\cdots$ ㉠

두 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$, $3\vec{a}+k\vec{b}$가 서로 평행해야 하므로 어떤 실수 t에 대하여 $t(\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}+k\vec{b}$를 만족시킨다.

$(t-3)\vec{a}+(2t-k)\vec{b}=\vec{0}$에서 ㉠에 의하여

$t-3=0,\ 2t-k=0 \quad \therefore\ t=3,\ k=6$

24 ○○○

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 6이고 한 점근선의 방정식이 $y=2x$일 때, 두 초점 사이의 거리는?

(단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① $4\sqrt{5}$ ② $6\sqrt{5}$ ③ $8\sqrt{5}$ ④ $10\sqrt{5}$ ⑤ $12\sqrt{5}$

답	②

PPL 해설 | 작성자: CSM17 연구소

주축의 길이가 6이므로 $2a=6$

$\therefore\ a=3 \quad \cdots$ ㉠

한 점근선의 방정식이 $y=2x$이고 a, b가 양수이므로

$\dfrac{b}{a}=2 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $b=6$

두 초점의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=a^2+b^2=3^2+6^2=45$

$\therefore\ c=3\sqrt{5}$

따라서 두 초점 사이의 거리는 $2c=6\sqrt{5}$

25 ○○○

좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3},\quad x-1=\frac{2-y}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

답	②

PPL 해설 | 작성자: CSM17 연구소

직선 $\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3}$ 의 방향벡터를 $\overrightarrow{u_1}$, 직선 $x-1=\frac{2-y}{3}$ 의 방향벡터를 $\overrightarrow{u_2}$라 하면

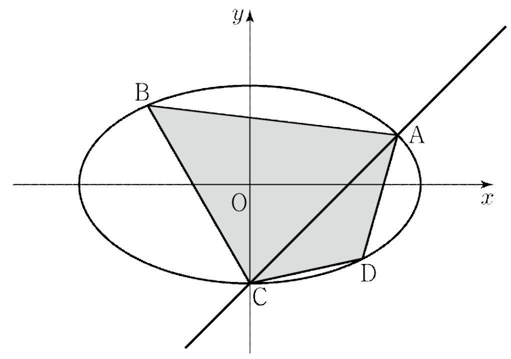
$$\overrightarrow{u_1}=(4,\ 3),\ \overrightarrow{u_2}=(1,\ -3)$$

두 직선이 이루는 예각 θ에 대하여

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}\\&=\frac{|4\times1+3\times(-3)|}{\sqrt{4^2+3^2}\times\sqrt{1^2+(-3)^2}}\\&=\frac{|-5|}{5\times\sqrt{10}}\\&=\frac{\sqrt{10}}{10}\end{aligned}$$

26 ○○○

좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$과 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점을 A, C라 하자. 선분 AC가 사각형 ABCD의 대각선이 되도록 타원 위에 두 점 B, D를 잡을 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은? [3점]



① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

답	⑤

PPL 해설 | 작성자: CSM17 연구소

타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$과 직선 $y=x-1$이 만나는 두 교점을 구하면

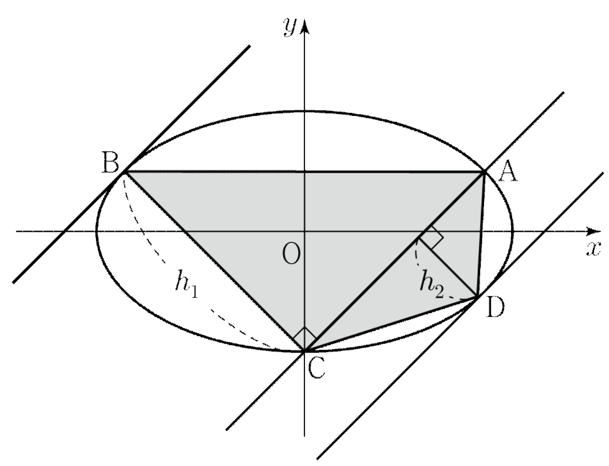
$\frac{x^2}{3}+(x-1)^2=1,\ \frac{2}{3}x(2x-3)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, 점 C의 좌표는 $(0,\ -1)$

선분 AC의 길이는 $\sqrt{\left(\frac{3}{2}-0\right)^2+\left\{\frac{1}{2}-(-1)\right\}^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ 이고

선분 AC의 기울기가 $\dfrac{\frac{1}{2}-(-1)}{\frac{3}{2}-0}=1$이므로 다음 그림과 같이 서로 다른 두 점 B, D에서의 접선의 기울기가 1일 때 사각형 ABCD의 넓이가 최대가 되는 것을 알 수 있다.



따라서 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{3\times1+1}=x\pm2$이다.

직선 AC의 기울기와 타원 위 두 점 B, D에서의 접선의 기울기가 모두 같으므로 점 B, 점 D에서 직선 $y=x-1$까지의 거리는 점 C에서 직선 $y=x-2$, 직선 $y=x+2$까지의 거리와 같다.
점 $C(0,\ -1)$과 두 직선 $x-y+2=0$, $x-y-2=0$ 사이의 거리를 각각 h_1, h_2라 하면

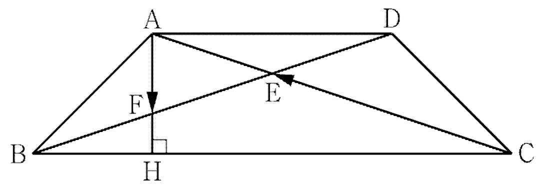
$$h_1=\frac{|0-(-1)+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}},\ h_2=\frac{|0-(-1)-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

사각형 ABCD의 넓이를 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ACD의 넓이의 합으로 생각하면 두 삼각형 모두 밑변이 선분 AC인 삼각형으로 생각할 수 있다.
따라서 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}\times\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3$$

27 ○○●

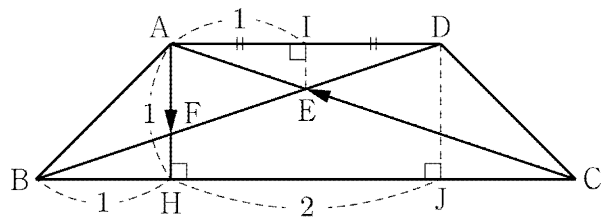
$\overline{AD}=2$, $\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{2}$, $\angle ABC=\angle BCD=45^\circ$인 사다리꼴 ABCD가 있다. 두 대각선 AC와 BD의 교점을 E, 점 A에서 선분 BC의 교점을 F라 할 때, $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}$의 값은? [3점]



① $-\frac{1}{9}$　② $-\frac{2}{9}$　③ $-\frac{1}{3}$　④ $-\frac{4}{9}$　⑤ $-\frac{5}{9}$

답	④

PPL 해설 | 작성자: CSM17 연구소



점 E에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 I, 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 J라 하자.
삼각형 ABH는 직각이등변삼각형이고 $\overline{AB}=\sqrt{2}$이므로 $\overline{BH}=\overline{AH}=1$이다.
두 삼각형 FBH와 DBJ는 $\angle FBH$를 공통각으로 갖고 $\angle FBH=\angle DJB=90^\circ$이므로 닮음이다.
$\overline{BH}=1$, $\overline{BJ}=3$이므로 닮음비가 $1:3$이다.
따라서 $\overline{FH}=\frac{1}{3}\overline{DJ}$이고 $\overline{AF}=\frac{2}{3}\overline{AH}$이다.

$$\therefore\ \overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AH} \quad \cdots ㉠$$

두 삼각형 FBH와 EAI에서 $\angle FBH=\angle EAI$, $\overline{BH}=\overline{AI}=1$, $\angle BHF=\angle AIE=90^\circ$이므로 두 삼각형은 합동이다.
따라서 $\overline{AE}=\frac{1}{3}\overline{AC}$이다.

$$\therefore\ \overrightarrow{CE}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \quad \cdots ㉡$$

한편, $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AH}|^2=1$이므로

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AH}\cdot\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)\ (\because ㉠, ㉡)$$

$$=-\frac{4}{9}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=-\frac{4}{9}$$

28 ○◑●

좌표평면에서 직선 $y=2x-3$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 두 점 $\mathrm{A}(c,\ 0)$, $\mathrm{B}(-c,\ 0)$ $(c>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P의 좌표가 $(3,\ 3)$일 때, 상수 c의 값은? [4점]

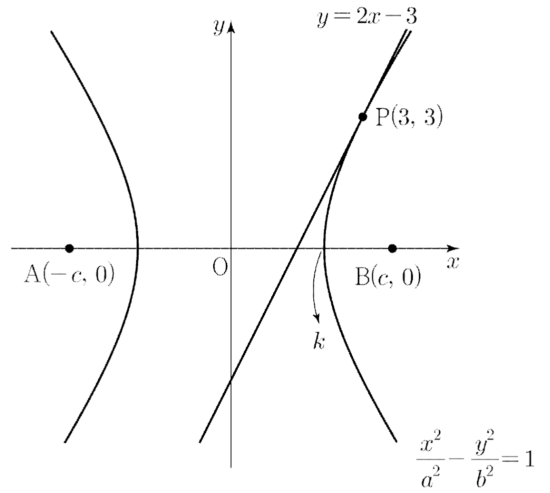
① $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ ② $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

답	①

PPL 해설 | 작성자: CSM17 연구소

$\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}}=k$라 하면 직선 $y=2x-3$ 위의 점 P는 두 초점이 $\mathrm{A}(c,\ 0)$, $\mathrm{B}(-c,\ 0)$이고 주축의 길이가 k인 쌍곡선 위의 점이다.
쌍곡선이 점 $(3,\ 3)$을 지나면서 k의 값이 최대인 경우는
쌍곡선이 점 $(3,\ 3)$에서 직선 $y=2x-3$과 접할 때이다.

k가 최대일 때



따라서 두 점 $\mathrm{A}(c,\ 0)$, $\mathrm{B}(-c,\ 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선을

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하면

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 직선 $y=2x-3$이 점 $(3,\ 3)$에서 접하므로

$$\frac{3^2}{a^2}-\frac{3^2}{b^2}=1 \quad \cdots ㉠$$

$$\frac{2\times3}{a^2}-\frac{2\times3}{b^2}\times2=0 \quad \cdots ㉡$$

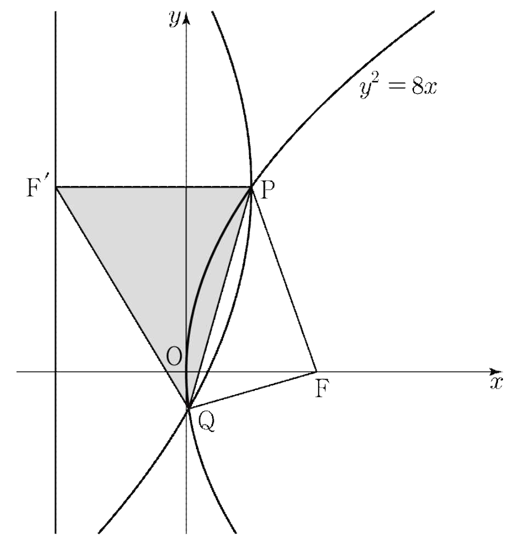
㉠, ㉡을 연립하면

$$a^2=\frac{9}{2},\ b^2=9$$

따라서 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\dfrac{9}{2}+9}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

29 ●●●

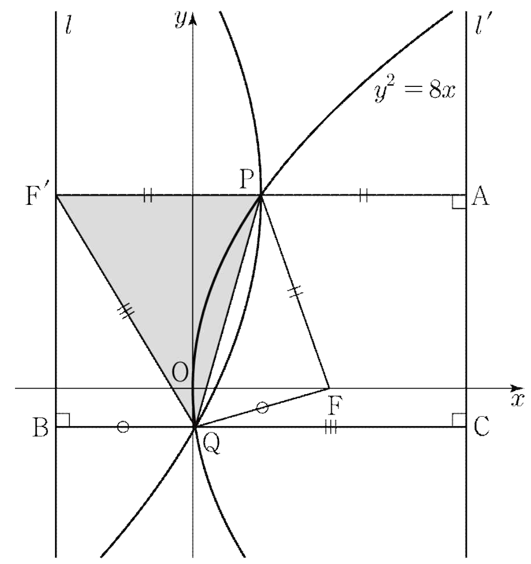
초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 포물선 $y^2=8x$의 준선과 만나는 점을 F$'$이라 하자. 점 F$'$을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 PF$'$QF의 둘레의 길이가 12일 때, 삼각형 PF$'$Q의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x좌표는 2보다 작고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



답	23

PPL 해설 | 작성자: CSM17 연구소

포물선 $y^2=8x$의 준선을 l, 점 F$'$을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선의 준선을 l'이라 하고,
점 P에서 직선 l'에 내린 수선의 발을 A, 점 Q에서 두 직선 l, l'에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PA}}$, $\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{QB}}$, $\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{QC}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{BC}}$

사각형 PF$'$QF의 둘레의 길이가 12이므로

$\overline{\mathrm{F'A}}=\overline{\mathrm{BC}}=6 \quad \therefore\ \overline{\mathrm{F'P}}=3$

한편, 준선 l의 방정식은 $x=-2$이므로 준선 l'의 방정식은 $x=4$이다.

따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ 2\sqrt{2})$이다.

초점이 $\mathrm{F}'(1,\ 2\sqrt{2})$이고 준선의 방정식이 $x=4$인 포물선의 방정식은

$$(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)$$

점 Q는 두 포물선 $y^2=8x$, $(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)$이 만나는 점이므로 두 방정식 $y^2=8x$, $(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)$을 연립하면

$2(y-2\sqrt{2})^2=-3y^2+24$,

$5y^2-8\sqrt{2}y-8=0$,

$(5y+2\sqrt{2})(y-2\sqrt{2})=0$

$\therefore\ y=-\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$ 또는 $y=2\sqrt{2}$

이때 점 Q의 y좌표는 0보다 작으므로 점 Q의 y좌표는 $-\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

따라서 삼각형 $\mathrm{PF'Q}$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times3\times\left(2\sqrt{2}+\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\right)=\dfrac{18\sqrt{2}}{5}$

$\therefore\ p+q=5+18=23$

[다른 풀이]

선분 BQ의 길이를 t라 하면

$$\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{BQ}}=6-t$$

삼각형 $\mathrm{F'BQ}$에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{F'B}}=\sqrt{-12t+36}\ \ (\text{단, } 0<t<3)$$

따라서 점 Q의 좌표는 $(t-2,\ 2\sqrt{2}-\sqrt{-12t+36})$이다.

점 $\mathrm{Q}(t-2,\ 2\sqrt{2}-\sqrt{-12t+36})$는 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로

$(2\sqrt{2}-\sqrt{-12t+36})^2=8(t-2)$,

$-5t+15=\sqrt{-24t+72}$,

$25t^2-126t+153=0$,

$(25t-51)(t-3)=0$

$\therefore\ t=\dfrac{51}{25}\ \ (\because\ 0<t<3)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{F'B}}=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$

따라서 삼각형 $\mathrm{PF'Q}$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PF'}}\times\overline{\mathrm{F'B}}=\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{12\sqrt{2}}{5}=\dfrac{18\sqrt{2}}{5}$

$\therefore\ p+q=5+18=23$

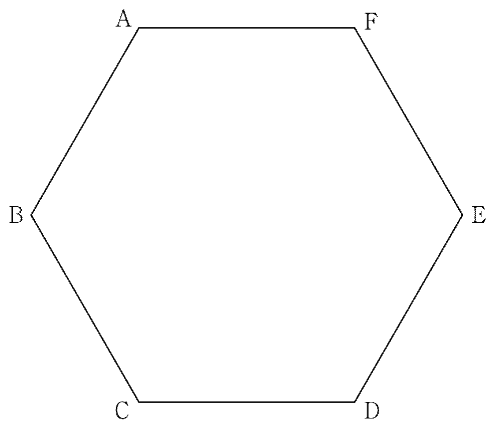
30 ●●●

좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다.
두 점 P, Q와 실수 k에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|$의 값이 최소가 되도록 하는 k의 값을 α, $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|$의 값이 최대가 되도록 하는 k의 값을 β라 하자.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{CX}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{XA}}+\overrightarrow{\mathrm{XC}}+2\overrightarrow{\mathrm{XD}}=k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [4점]

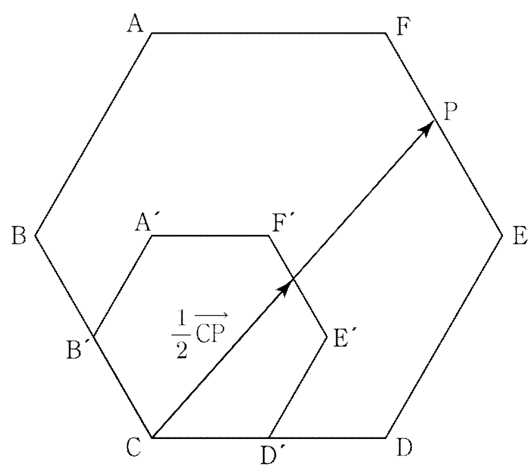


답	8

PPL 해설 | 작성자: CSM17 연구소

조건 (가)에서 점 P가 정육각형 ABCDEF 위의 점이므로

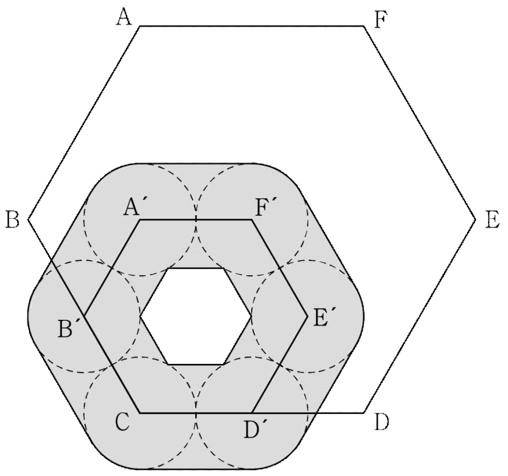
벡터 $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CP}}$는 다음 그림과 같이 점 C를 시점으로 하고 종점이 한 변의 길이가 2인 정육각형 $\mathrm{A'B'CD'E'F'}$ 위의 점인 벡터이다.



또한 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$의 종점 Q는 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이므로

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 종점 X는 중심이 정육각형 $\mathrm{A'B'CD'E'F'}$ 위의 점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다. ⋯ ①

따라서 점 X가 나타내는 도형은 다음 그림과 같다.



한편, 조건 (나)의 식의 양변을 2로 나누어주면

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}\right)+\overrightarrow{XD}=\frac{k}{2}\overrightarrow{CD}\ \cdots\ ㉠$$

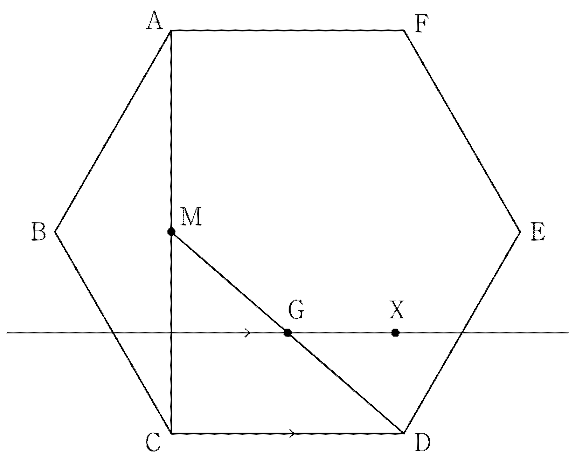
이고, 선분 AC의 중점을 M이라 하면

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}\right)=\overrightarrow{XM}\ \cdots\ ㉡$$

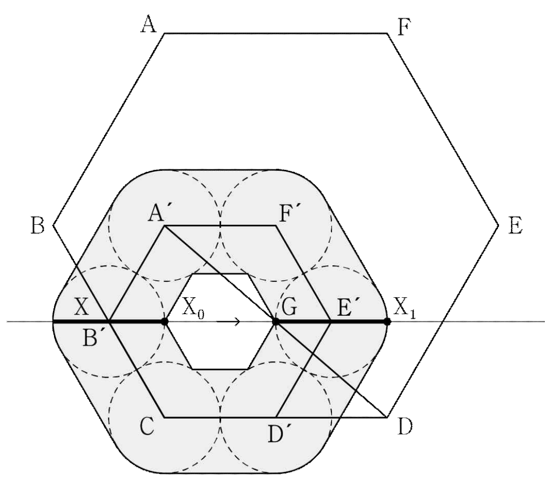
마찬가지로 선분 DM의 중점을 G라 하면 ㉡을 ㉠에 대입하고 양변을 2로 나누어줄 때

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{XD}\right)=\overrightarrow{XG}=\frac{k}{4}\overrightarrow{CD}$$

즉, 두 벡터 $\overrightarrow{XG}$와 $\overrightarrow{CD}$는 서로 평행한 벡터이므로 다음 그림과 같이 점 X는 점 G를 지나고 선분 CD와 평행한 직선 위의 점이다. ⋯ ②



①, ②에 의하여 점 X가 나타내는 도형은 다음 그림과 같이 두 선분이다.



$\left|\overrightarrow{CX}\right|$의 값이 최소, 최대일 때의 점을 각각 X_0, X_1이라 할 때

$$\left|\overrightarrow{GX_0}\right|=\left|\overrightarrow{GX_1}\right|=2,\quad \left|\overrightarrow{CD}\right|=4$$

이므로

$$\overrightarrow{GX_0}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD},\quad \overrightarrow{GX_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이고, $\alpha^2+\beta^2=8$