



지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

<https://orbi.kr/00043463424>

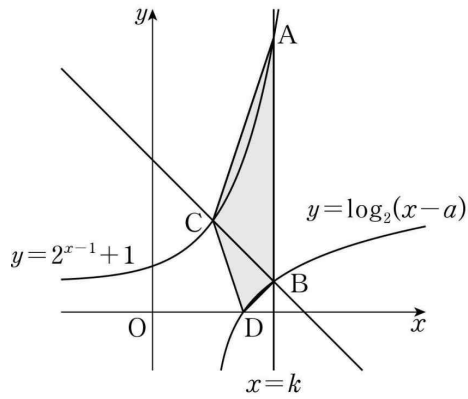
에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

<https://atom.ac/books/9395>

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex 공통

1. 그림과 같이 두 상수 a, k 에 대하여 직선 $x = k$ 가 두 곡선 $y = 2^{x-1} + 1$, $y = \log_2(x-a)$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y = 2^{x-1} + 1$ 과 만나는 점을 C라 하자.
 $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 2\sqrt{2}$ 일 때, 곡선 $y = \log_2(x-a)$ 가 x 축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0 < a < k$)
 [2022년 3월 11]



- ① 14 ② 13 ③ 12 ④ 11 ⑤ 10

1. 정답 ⑤ [2022년 3월 11]

1) 그림 있으면 그림 보면서, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

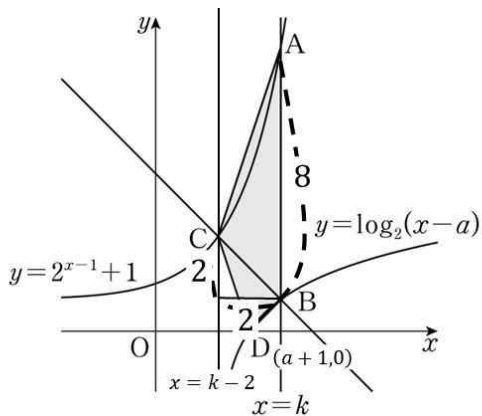
일단 문제부터 읽어볼게요. 직선 $x = k$ 가 $y = 2^{x-1} + 1$, $y = \log_2(x - a)$ 와 만나는 점을 각각 A, B라고 한다네요. 그러면 $A(k, 2^{k-1} + 1)$, $B(k, \log_2(k - a))$ 이네요. 그리고 B를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 $y = 2^{x-1} + 1$ 와 만나는 점을 C라고 한답니다.

대칭성이 중요한 지수로그함수에서 기울기가 -1 인 직선을 괜히 주진 않았겠죠? 일단 이거 체크하고 가자구요.

$\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 2\sqrt{2}$ 랍니다. 바로 써먹을 수 있겠네요. $\overline{AB} = 8$ 이니까 $2^{k-1} + 1 - \log_2(k - a) = 8$ 입니다.

정리하면 $2^{k-1} - 7 = \log_2(k - a)$ 이네요.

특히 $\overline{BC} = 2\sqrt{2}$ 는 기울기 -1 과 연계해서 그림에 표시할 수 있겠어요. 그리고 D는 $y = \log_2(x - a)$ 가 x 축과 만나는 점이니 $x = a + 1$ 입니다. $D(a + 1, 0)$ 이네요.



점 C는 $x = k - 2$ 에서의 $y = 2^{x-1} + 1$ 의 함숫값이죠? 대각선 길이가 $2\sqrt{2}$ 인데 기울기가 -1 이니까

$1 : 1 : \sqrt{2}$ 관계가 성립하죠. $x = k$ 보다 2만큼 뒤로 간 곳이니 $x = k - 2$ 입니다. 따라서

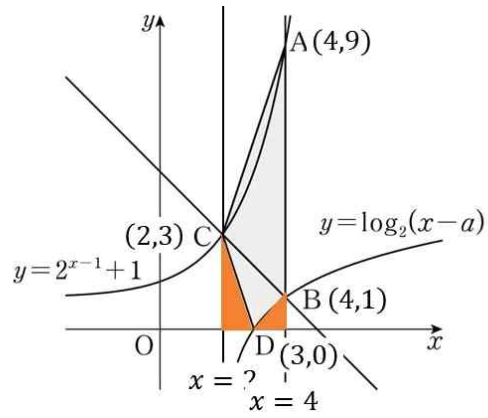
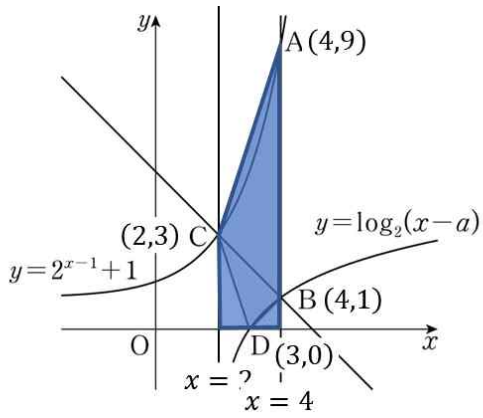
$C(k - 2, 2^{k-3} + 1)$ 입니다. 이러면 C의 y 값은 B의 y 값보다 2만큼 큰 거죠? 따라서

$\log_2(k - a) + 2 = 2^{k-3} + 1$ 입니다. 정리하면 $\log_2(k - a) = 2^{k-3} - 1$ 이네요. 이러면

$2^{k-1} - 7 = 2^{k-3} - 1$ 입니다. 정리하면 $2^{k-1} = \frac{1}{4} \times 2^{k-1} + 6$ 이고 $\frac{3}{4} \times 2^{k-1} = 6$ 이고 $2^{k-1} = 8 = 2^3$ 입니다.

$k - 1 = 3$ 이고 $k = 4$ 이네요. $A(4, 9)$, $C(2, 3)$ 입니다.

그리고 $1 = \log_2(4 - a)$ 이고 $a = 2$ 이네요. $B(4, 1)$ 입니다. 이제 ACDB의 넓이를 구해보시다. 이거는 ACDB를 포함하는 큰 사다리꼴에서 작은 삼각형 두 개를 빼면 되겠네요.



왼쪽에서 오른쪽을 빼서 구하는 거죠.

큰 사다리꼴의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (\text{윗변 } 3 + \text{아랫변 } 9) \times \text{높이 } 2 = 12$ 입니다. 여기에서 왼쪽 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}$ 이고, 오른쪽 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ 입니다. 이 둘을 빼면 $12 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 10$ 이네요.

답은 ⑤번입니다.

2. $a < 2$ 인 상수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & (x \leq 2) \\ -x^2 + ax & (x > 2) \end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(1) + h(3)$ 의 값은? [2022년 3월 12]

(가) $x \neq 1, x \neq a$ 일 때, $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ 이다.

(나) $h(1) = h(a)$

- ① $-\frac{15}{6}$ ② $-\frac{7}{3}$ ③ $-\frac{13}{6}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{11}{6}$

2. 정답 ③ [2022년 3월 12]

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 함수끼리 사칙연산은 범위까지 그대로

일단 a 는 2보다 큰 상수인데 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & (x \leq 2) \\ -x^2 + ax & (x > 2) \end{cases}$ 랍니다. 일단 관찰부터 해보죠. $x \leq 2$ 일 때는

$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ 이고, $x > 2$ 일 때는 $f(x) = -x(x-a)$ 입니다. $x \leq 2$ 일 때는 x 축과 $x=1$, $x=3$ 에서 만나는, 최고차항의 계수가 1인 이차함수를 따라가다가 그 둘의 중점인 대칭축 $x=2$ 에서 딱 끊기는 모양이네요. 그 이후에는 x 축과 $x=0$, $x=a$ 에서 만나는, 최고차항의 계수가 -1 인 이차함수를 따라가는 모양이네요. 일단 $a > 2$ 이니까 $f(x)$ 는 x 축과 $x=a$ 에서 만나구요.

이때 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 가 있는데 $h(x)$ 는 연속인 함수라고 하네요. 그리고 (가)조건에서 $x \neq 1$, $x \neq a$ 일 때 $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ 라고 합니다. 앞서 언급했던 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 모두 나왔네요. 그리고 (나)조건에서 $h(1) = h(a)$ 인데 $h(1) + h(3)$ 를 구하라고 합니다.

일단 연속인 조건부터 활용해볼까요? $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이니까 모든 점에서 좌극한값, 우극한값과 함숫값이 일치해야 해요. 일단 $h(x)$ 라는 함수부터 확인해봅시다. $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ 인데 $g(x)$ 는 그냥 다항함수죠? 분모의 $f(x)$ 는 범위가 나뉜 함수구요. 그러면 일단 그대로 해봅시다.

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{(x-1)(x-3)} & (x \neq 1, x \leq 2) \\ -\frac{g(x)}{x(x-a)} & (x \neq a, x > 2) \end{cases} \text{입니다.}$$

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 조건해석, 함수극한은 논리다

범위를 나눠서 확인해봐야겠죠? $x \leq 2$ 일 때는 $h(x) = \frac{g(x)}{(x-1)(x-3)}$ 입니다. 나머지 부분은 분모가 0이 되지 않고 분자도 다항함수니까 연속성 판단을 하지 않아도 되지만 $x=1$ 이라면 극한값과 함숫값이 문제가 될 수 있겠네요. 일단 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서도 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1)$ 이어야 합니다. $h(1)$ 은 값이

존재하므로 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{(x-1)(x-3)}$ 도 값이 존재해야겠죠? 극한값이 존재하는데 분모가 0으로 가니까

분자도 0으로 가야겠네요. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$ 인데 $g(x)$ 는 다항함수이니까 연속이므로 $g(1) = 0$ 입니다.

$x = a$ 에서도 마찬가지로 확인해 봐야겠네요. $x > 2$ 에서 $h(x) = -\frac{g(x)}{x(x-a)}$ 입니다. $x = a$ 에서 연속이어야

하므로 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = h(a)$ 이어야 하는데 $h(a)$ 의 값이 존재하므로 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} -\frac{g(x)}{x(x-a)}$ 의 값이 존재해야

합니다. 분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하므로 분자도 0으로 가야겠네요. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = 0 \text{입니다.}$$

$x = 2$ 에서도 연속이어야하겠죠? 좌극한값이자 함숫값인 $-g(2)$ 와 우극한값인 $-\frac{g(2)}{2(2-a)}$ 이 같아야 합니다.

따라서 $-g(2) = -\frac{g(2)}{2(2-a)}$ 이고 $(2a-3)g(2) = 0$ 입니다. $a = \frac{3}{2}$ 이거나 $g(2) = 0$ 이네요. 그런데 $a > 2$ 이어야

하니까 $g(2) = 0$ 입니다.

3) 함수 구하기 - 인수정리

$g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수인데 $g(1) = g(2) = g(a) = 0$ 이죠? 인수정리에 의하여 $g(x)$ 는 $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-a)$ 라는 인수를 적어도 하나 가지니까 $g(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ 입니다.

$$h(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)(x-a)}{(x-3)} & (x \neq 1, x \leq 2) \\ -\frac{(x-1)(x-2)}{x} & (x \neq a, x > 2) \end{cases} \text{이네요.}$$

우리가 구해야 하는 건 $h(1) + h(3)$ 인데 a 를 모르니까 못 구하겠어요. 그러고 보니 아까 $h(1) = h(a)$ 라고 했었죠? 이거 활용해봅시다. 다만 우리는 아직 $h(1)$, $h(a)$ 의 값을 구하지 못해요. 왜냐하면 우리가 아는 건 $x \neq 1$, $x \neq a$ 인 $h(x)$ 이거든요.

그러면 $h(x)$ 가 연속이라는 점을 활용해봅시다. $h(1)$, $h(a)$ 대신 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = h(a)$ 라는 점을

이용하면 되죠. $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \frac{1-a}{2}$ 이고 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = -\frac{(a-1)(a-2)}{a} = \frac{(1-a)(a-2)}{a}$ 인데 이 둘이 같아야

하니까 $\frac{(1-a)}{2} = \frac{(1-a)(a-2)}{a}$ 입니다. $a > 2$ 이니까 양변의 $1-a$ 는 지워도 되겠죠? 0이 되지 않으니까요.

그러면 $\frac{1}{2} = \frac{(a-2)}{a}$ 이고 정리하면 $a = 2a - 4$ 입니다. $a = 4$ 이네요.

$h(1) = -\frac{3}{2}$ 이고 $h(3) = -\frac{2}{3}$ 이므로 더하면 $-\frac{13}{6}$ 입니다. 답은 ③번이네요.

3. 첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항의 합은? [2022년 3월 13]

- ① $\frac{31}{5}$ ② $\frac{33}{5}$ ③ 7 ④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{39}{5}$

3. 정답 ① [2022년 3월 13]

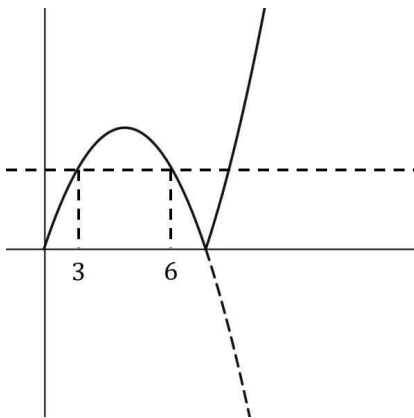
1) 등차수열 a_n 은 $a+(n-1)d$ 로 놓기

일단 등차수열 $\{a_n\}$ 이 있습니다. 첫째항을 a 라 하고 공차를 d 라 하면 $a_n = a+(n-1)d$ 로 놓고 시작하자구요. 이때 첫째항인 a 가 양수라네요.

첫째항부터 n 항까지 합을 S_n 이라 하는데 $|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$ 입니다. 절댓값이 나온 이상 값이 음수인지 양수인지 판단하는 건 필수겠죠? 그리고 S_n 의 값 간의 수치 계산이 필요하니까 S_n 의 그래프를 그려야 할 수도 있겠어요.

생각을 좀 해볼게요. 첫째항은 양수인데, 만약 공차도 양수라면? 더하면 합이 계속 증가하는데 $|S_3| = |S_6|$ 이 될 수가 있을까요? 말이 안 되죠. 무조건 S_6 이 S_3 보다 커야 합니다. 만약 공차가 양수라면요. 공차가 0인 것도 말이 안 되겠네요. 양수를 계속 더하는데 마찬가지로 S_6 이 S_3 보다 커야 합니다. 따라서 공차는 음수가 되어야겠네요.

공차가 음수라면 $S_n = \frac{n(a+a+(n-1)d)}{2} = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$ 의 이차함수의 형태가 됩니다. 먼저



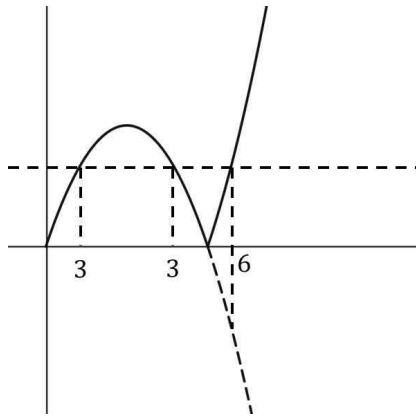
이런 경우 가능하겠죠? $S_3 = S_6$ 이고 둘 다 양수인 경우입니다. 따라서

$$S_3 = \frac{(a+a+2d)}{2} \times 3 = 3(a+d) \text{이고 } S_6 = \frac{(a+a+5d)}{2} \times 6 = 3(2a+5d) \text{이므로 } 3(a+d) = 3(2a+5d) \text{이고}$$

$$a = -4d \text{입니다. } S_n = \frac{dn(n-9)}{2} \text{이네요.}$$

$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$ 를 계산해봅시다. $-9d = |11d| - 3$ 입니다. 이때 $d < 0$ 이므로 $-9d = -11d - 3$ 이고

$$2d = -3, \quad d = -\frac{3}{2} \text{이네요. } a = -4d = 6 \text{입니다.}$$



이런 경우도 가능해요. 이걸 한 쪽은 양수, 한 쪽은 음수이거나 둘 다

0이어야 가능하겠네요. 어느 쪽이든 $S_3 = -S_6 = |S_{11}| - 3$ 입니다. 그리고 $|S_3| = |S_6| \geq 0$ 이니까 $|S_{11}| - 3 \geq 0$ 이죠? $|S_{11}| \geq 3$ 입니다.

이제 값을 넣어서 계산해볼게요. $S_3 = \frac{(a+a+2d)}{2} \times 3 = 3(a+d)$ 이고,

$-S_6 = -\frac{(a+a+5d)}{2} \times 6 = -3(2a+5d)$ 입니다. 이 둘이 같아야 하니까 $3(a+d) = -3(2a+5d)$ 이고

$3a+6d=0$ 입니다. $a+2d=a_3=0$ 이네요. $a=-2d$ 입니다. $a_n = -2d+(n-1)d=(n-3)d$ 이네요.

또한 $S_3 = -S_6 = |S_{11}| - 3$ 이니까 이것도 계산해보면 $\frac{(-2d+0)}{2} \times 3 = -3d = \left| \frac{(-2d+8d)}{2} \times 11 \right| - 3$ 입니다.

정리하면 $-3d+3 = |33d|$ 이네요. 이때 $d < 0$ 이니까 $-3d+3 = -33d$ 이고 $30d = -3$ 입니다.

$d = -\frac{1}{10}$ 이네요. 첫째항은 $a = -2d = \frac{1}{5}$ 입니다. 아까 계산한 6과 더하면 답은 $\frac{31}{5}$ 이네요. ①번입니다.

4. 수열 $\{a_n\}$ 은 $1 < a_1 < 2$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7 = -1$ 일 때, $40 \times a_1$ 의 값을 구하시오.

[2022년 3월 20]

4. 정답 70 [2022년 3월 20]

1) 문제해석

$$1 < a_1 < 2 \text{이고 } a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases} \text{인 } a_n \text{이 있습니다. } a_7 = -1 \text{일 때 } 40 \times a_1 \text{을 구하라네요. 결국}$$

뒤로 돌아가보라는 거죠? 천천히 케이스 나누면서 가보죠.

$$n = 6 \text{을 넣으면 } a_7 = -1 = \begin{cases} -2a_6 & (a_6 < 0) \\ a_6 - 2 & (a_6 \geq 0) \end{cases} \text{입니다. 이때 위쪽은 불가능해요. } a_6 = \frac{1}{2} \text{이어야 하는데 그러면}$$

$a_6 < 0$ 이 아니잖아요. 따라서 $-1 = a_6 - 2$ 이고 $a_6 = 1$ 입니다. $a_6 \geq 0$ 이구요.

$$n = 5 \text{를 넣으면 } a_6 = 1 = \begin{cases} -2a_5 & (a_5 < 0) \\ a_5 - 2 & (a_5 \geq 0) \end{cases} \text{입니다. } -2a_5 = 1 \text{ 해서 } a_5 = -\frac{1}{2} \text{도 가능하구요, } a_5 - 2 = 1 \text{ 해서}$$

$a_5 = 3$ 도 가능하네요. 각각 $a_5 < 0$, $a_5 \geq 0$ 도 만족시키구요. 이때부터 본격적으로 케이스를 나눠야겠네요.

2) 케이스 분류

2-1) $a_5 = -\frac{1}{2}$ 인 경우

$$n = 4 \text{를 넣으면 } a_5 = -\frac{1}{2} = \begin{cases} -2a_4 & (a_4 < 0) \\ a_4 - 2 & (a_4 \geq 0) \end{cases} \text{입니다. 일단 위쪽은 택할 수 없어요. } a_4 = \frac{1}{4} \text{인데 음수가}$$

아니니까요. 따라서 $a_4 - 2 = -\frac{1}{2}$ 이고 $a_4 = \frac{3}{2}$ 입니다.

$$n = 3 \text{을 넣으면 } a_4 = \frac{3}{2} = \begin{cases} -2a_3 & (a_3 < 0) \\ a_3 - 2 & (a_3 \geq 0) \end{cases} \text{이네요. 이러면 } a_3 = -\frac{3}{4} \text{이거나 } a_3 = \frac{7}{2} \text{입니다. 또 케이스가}$$

나뉘네요.

2-1-1) $a_3 = -\frac{3}{4}$ 인 경우

$$n = 2 \text{를 넣으면 } a_3 = -\frac{3}{4} = \begin{cases} -2a_2 & (a_2 < 0) \\ a_2 - 2 & (a_2 \geq 0) \end{cases} \text{입니다. 위쪽을 택하면 } a_2 = \frac{3}{8} \text{이니까 조건을 만족시키지}$$

못하네요. 따라서 $-\frac{3}{4} = a_2 - 2$ 이고 $a_2 = \frac{5}{4}$ 입니다.

$n = 1$ 을 넣으면 $a_2 = \frac{5}{4} = \begin{cases} -2a_1 & (a_1 < 0) \\ a_1 - 2 & (a_1 \geq 0) \end{cases}$ 입니다. $a_1 = -\frac{5}{8}$ 이거나 $a_1 = \frac{13}{4}$ 인데 둘 모두 $1 < a_1 < 2$ 이

아니죠?

2-1-2) $a_3 = \frac{7}{2}$ 인 경우

$n = 2$ 를 넣으면 $a_3 = \frac{7}{2} = \begin{cases} -2a_2 & (a_2 < 0) \\ a_2 - 2 & (a_2 \geq 0) \end{cases}$ 입니다. $a_2 = -\frac{7}{4}$ 이거나 $a_2 = \frac{11}{2}$ 입니다. 만약

$a_2 = -\frac{7}{4}$ 이라면 $a_2 = -\frac{7}{4} = \begin{cases} -2a_1 & (a_1 < 0) \\ a_1 - 2 & (a_1 \geq 0) \end{cases}$ 입니다. 일단 위쪽은 불가능하구요, 가능한 건 아래쪽을

택해서 $-\frac{7}{4} = a_1 - 2$ 이고 $a_1 = \frac{1}{4}$ 가 되는 거네요. 근데 $1 < a_1 < 2$ 이 아니죠?

$a_2 = \frac{11}{2}$ 이라면 $a_2 = \frac{11}{2} = \begin{cases} -2a_1 & (a_1 < 0) \\ a_1 - 2 & (a_1 \geq 0) \end{cases}$ 입니다. $a_1 = -\frac{11}{4}$ 이거나 $a_1 = \frac{15}{2}$ 인데 둘 모두

$1 < a_1 < 2$ 이 아니네요. 다음 케이스로 가봅시다.

2-2) $a_5 = 3$ 인 경우

$n = 4$ 를 넣으면 $a_5 = 3 = \begin{cases} -2a_4 & (a_4 < 0) \\ a_4 - 2 & (a_4 \geq 0) \end{cases}$ 입니다. $a_4 = -\frac{3}{2}$ 이거나 $a_4 = 5$ 로 또 케이스가 나뉘네요.

2-2-1) $a_4 = -\frac{3}{2}$ 인 경우

$n = 3$ 을 넣으면 $a_4 = -\frac{3}{2} = \begin{cases} -2a_3 & (a_3 < 0) \\ a_3 - 2 & (a_3 \geq 0) \end{cases}$ 입니다. 위쪽을 택하면 $a_3 = \frac{3}{4}$ 로 양수가 되어버리니까 안

되구요, $-\frac{3}{2} = a_3 - 2$ 이고 $a_3 = \frac{1}{2}$ 입니다.

$n = 2$ 를 넣으면 $a_3 = \frac{1}{2} = \begin{cases} -2a_2 & (a_2 < 0) \\ a_2 - 2 & (a_2 \geq 0) \end{cases}$ 입니다. $a_2 = -\frac{1}{4}$ 이거나 $a_2 = \frac{5}{2}$ 이네요. $a_2 = -\frac{1}{4}$ 이라면

$a_2 = -\frac{1}{4} = \begin{cases} -2a_1 & (a_1 < 0) \\ a_1 - 2 & (a_1 \geq 0) \end{cases}$ 이고 위쪽은 택할 수 없으니까 $a_1 = \frac{7}{4}$ 입니다. 이걸 $1 < a_1 < 2$ 이네요?

끝났어요. 모든 a_1 의 값을 구하라는 게 아니었으니까 이거 하나겠죠? $40 \times a_1 = 70$ 입니다.

나머지는..... 한 번 해보세요. 파이팅!

5. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$ 가 있다. 양의 상수 a 에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $x|g(x)| = \int_{2a}^x (a-t)f(t)dt$ 이다.

(나) 방정식 $g(f(x))=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\int_{-2a}^{2a} f(x)dx$ 의 값을 구하시오. [2022년 3월 22]

5. 정답 4 [2022년 3월 22]

1) 조건해석, 정적분의 아래끝에 변수가 있는 경우

$f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0입니다. 그럼 대충 $g(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$ 의 형태라는 거죠? $g(0) = 0$ 입니다.

이때 a 가 $a > 0$ 인데 (가)조건에서 $x|g(x)| = \int_{2a}^x (a-t)f(t)dt$ 라네요. 정적분의 아래끝에 변수가 있네요? 일단

정적분 안에서 적분변수와 상수를 분리해볼게요. $a \int_{2a}^x f(t)dt - \int_{2a}^x tf(t)dt$ 가 됩니다.

그리고 양변이 0이 되는 값을 넣어봅시다. 일단 $x = 0$ 이 있겠죠? 넣으면 $\int_{2a}^0 (a-t)f(t)dt = 0$ 입니다. 그리고

$x = 2a$ 도 가능하네요. 넣으면 $2a|g(2a)| = 0$ 입니다. 이때 $a > 0$ 이므로 $g(2a) = 0$ 이네요.

이때 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이니까 $(a-x)f(x)$ 도 실수 전체의 집합에서 연속이죠? 완벽한 동치는

아니지만, 연속인 함수를 정적분한 $\int_{2a}^x (a-t)f(t)dt$ 은 미분가능하겠네요. 일단 우변만 미분해봅시다.

$a \int_{2a}^x f(t)dt - \int_{2a}^x tf(t)dt$ 를 미분하면 $af(x) - xf(x) = (a-x)f(x)$ 입니다.

우변인 $\int_{2a}^x (a-t)f(t)dt$ 이 미분가능하다면? 좌변인 $x|g(x)|$ 역시 미분가능하다는 거죠? 지금 $g(x)$ 는

최고차항의 계수가 1이고 $g(0) = g(2a) = 0$ 인 삼차함수예요. 인수정리에 의하여 $x, (x-2a)$ 라는 인수를 적어도

하나 가지고 있다는 거죠. 이때 $x|g(x)|$ 에는 x 라는 인수가 있으니 결과적으로 $x|g(x)|$ 는 x 라는 인수를

적어도 두 개 가지고 있는 거예요. 그런데 $(x-2a)$ 라는 인수는요? 하나만 있을 때 절댓값으로 씌워 올리면

미분불가능이 되는 건 다들 잘 아실 거예요. 그러면 결국 $g(x)$ 에서 자체적으로 두 개를 가져야겠네요. 따라서

$g(x) = x(x-2a)^2$ 입니다.

2) 합성함수는 치환, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

(나)조건에서 $g(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4라고 합니다. 일단 안쪽의 함수를 치환해볼게요.

$f(x) = k$ 라 해봅시다. 그러면 $g(k) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 구하는 형태가 되네요. 일단 $k = 0$ 이 있구요, $k = 2a$ 이 있네요.

이제 $f(x)=0$ 과 $f(x)=2a$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4개가 되도록 해야 해요. 이러면 일단 $f(x)$ 의 그래프를

알아야겠네요. $g(x)=x(x-2a)^2$ 이니까 $x|x(x-2a)^2| = \int_{2a}^x (a-t)f(t)dt$ 입니다. 이때 절댓값 안쪽에 있는

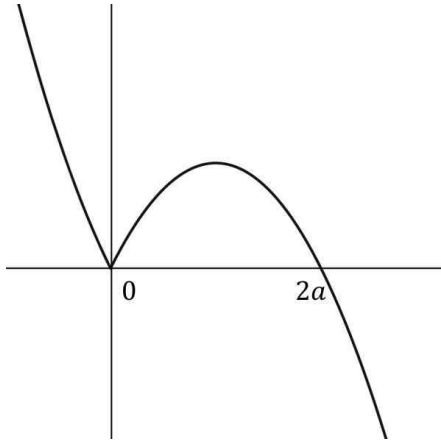
$x(x-2a)^2$ 는 $x \geq 0$ 일 때는 0보다 크거나 같고, $x < 0$ 일 때는 0보다 작아요. 따라서

$$x|x(x-2a)^2| = \begin{cases} x^2(x-2a)^2 & (x \geq 0) \\ -x^2(x-2a)^2 & (x < 0) \end{cases} \text{입니다.}$$

우리는 이 함수를 미분해야 해요. 따라서 $x|x(x-2a)^2| = \int_{2a}^x (a-t)f(t)dt$ 의 양변을 미분하면

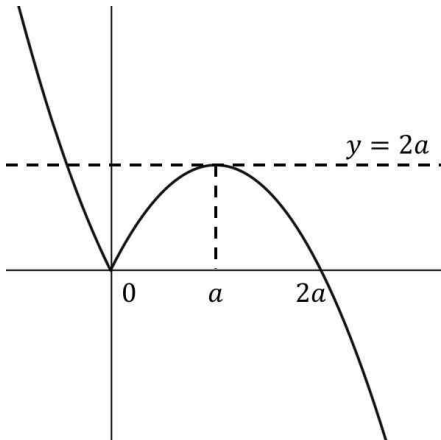
$$(a-x)f(x) = \begin{cases} 4x(x-a)(x-2a) & (x \geq 0) \\ -4x(x-a)(x-2a) & (x < 0) \end{cases} \text{가 됩니다. 양변의 } (a-x) \text{를 제거해볼게요.}$$

$$f(x) = \begin{cases} -4x(x-2a) & (x \geq 0) \\ 4x(x-2a) & (x < 0) \end{cases} \text{입니다.}$$



요런 그래프네요. 이때 $f(x)=0$ 과 $f(x)=2a$ 의 서로 다른 실근의 개수가

4개가 되어야 하는데 이미 $f(x)=0$ 의 실근은 2개죠? 그러면 $f(x)=2a$ 의 실근이 겹치지 않도록 두 개가 되면 되겠네요. 그림을 보면 결국



요렇게 되어야 합니다. $f(x) = \begin{cases} -4x(x-2a) & (x \geq 0) \\ 4x(x-2a) & (x < 0) \end{cases}$ 에 $f(a) = 2a$ 를

넣어보면 $4a^2 = 2a$ 이고 $2a(2a-1) = 0$ 인데 $a > 0$ 이니까 $a = \frac{1}{2}$ 이네요.

3) 정적분 나누기, 이차함수와 x 축으로 둘러싸인 넓이

마지막으로 $\int_{-2a}^{2a} f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx$ 를 구해보시다. 일단 함수가 나뉘어져 있으니 $x=0$ 을 기준으로

$\int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$ 를 계산해볼게요. 일단 $\int_0^1 f(x)dx$ 은 이차함수와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이예요.

따라서 $\frac{4}{6}(1-0)^3 = \frac{2}{3}$ 입니다. $\int_{-1}^0 f(x)dx$ 는 그냥 계산하죠.

$\int_{-1}^0 (4x^2 - 4x)dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 \right]_{-1}^0 = \frac{10}{3}$ 입니다. 둘을 더하면 $\frac{10}{3} + \frac{2}{3} = 4$ 이네요.

확통

6. 세 명의 학생 A, B, C에게 서로 다른 종류의 사탕 5개를
다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?
(단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

[2022년 3월 확통 28]

- (가) 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받는다.
(나) 학생 B가 받는 사탕의 개수는 2 이하이다.

- ① 167 ② 170 ③ 173 ④ 176 ⑤ 179

6. 정답 ④ [2022년 3월 확통 28]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

세 명의 학생 A, B, C가 있는데 서로 다른 종류의 사탕 5개를 준다고 합니다. 이거는 다른 상자에 다른 공을 넣는 상황이죠? 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다고 하니까 빈 상자도 가능한 케이스구요.

(가)조건에서 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받는다고 합니다. 그리고 (나)조건에서는 B가 받는 사탕의 개수는 2 이하라고 하네요. 이러면 B가 받는 사탕의 개수를 기준으로 잡고 분류해봅시다.

2) 케이스 분류

2-1) B가 받는 사탕 2개

일단 B가 받는 사탕을 5개 중에서 골라볼게요. 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$ 입니다. 이러면 나머지 3개를 A, C에게 주는데 A가 0개만 받지 않으면 되는 거죠? 이거 여사건으로 가봅시다. 일단 이 경우 다른 공 3개를 다른 상자 2개에 주는 경우와 같으므로 공보고 어느 상자에 갈래? 물어보면 됩니다. 각각 A, C라는 2가지 대답이 가능하죠. 이걸 3번 반복하니까 $2^3 = 8$ 입니다. 이때 A가 0개 받는 경우는 1가지입니다. 빼면 $8 - 1 = 7$ 이네요. 총 경우의 수는 $10 \times 7 = 70$ 입니다.

2-2) B가 받는 사탕 1개

마찬가지로 B가 받는 사탕을 5개 중에 고르면 경우의 수는 ${}_5C_1 = 5$ 입니다. 이러면 나머지 4개를 A, C에게 주는데 A가 0개만 받지 않으면 됩니다. 다른 공 4개를 다른 상자 2개에 주는 경우와 같으므로 공보고 어느 상자에 갈래? 물어보면 A, C라는 2가지 대답이 가능하고, 4번 반복하니까 $2^4 = 16$ 입니다. 이때 A가 0개 받는 경우는 1가지입니다. 빼면 $16 - 1 = 15$ 이네요. 총 경우의 수는 $5 \times 15 = 75$ 입니다.

2-3) B가 받는 사탕 0개

그냥 5개를 A, C에게 주는데 A가 0개만 받지 않으면 됩니다. 똑같겠죠? 5개의 공보고 어느 상자에 갈래? 물어보면 A, C라는 2가지 대답이 가능하고, 5번 반복하니까 $2^5 = 32$ 입니다. 이때 A가 0개 받는 경우를 빼면 $32 - 1 = 31$ 이네요. 총 경우의 수는 31입니다.

모두 더하면 $70 + 75 + 31 = 176$ 이네요. 답은 ④번입니다.

7. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하시오.
[2022년 3월 확통 29]

(가) $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$

(나) $f(a) + f(b) = 0$ 을 만족시키는 집합 X 의 서로 다른 두 원소 a, b 가 존재한다.

7. 정답 65 [2022년 3월 확통 29]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ 이 있는데 조건을 만족시키는 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수를 구합니다.

(가)조건에서 $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$ 라고 하네요. 이거는 중복조합 쓰는 케이스죠? 5개를 중복 허용해서 뽑기만 하면 자동으로 작거나 같은 순서대로 정해지는 거네요.

(나)조건을 보면 $f(a) + f(b) = 0$ 을 만족시키는 집합 X 의 서로 다른 두 원소 a, b 가 존재한다고 합니다. 그러니까 X 의 원소와 Y 의 원소(함숫값)를 연결해 함수를 만드는데 그 연결고리 중 두 개를 고르면 두 함숫값의 합이 0이 되는 게 최소한 하나 존재해야 한다는 거죠?

일단 함숫값의 합이 0이 될 수 있는 건 $-1, 1$ 이거나 $0, 0$ 이에요. 그러면 $(-1, 1$ 을 고르는 경우의 수 $+ 0, 0$ 을 고르는 경우의 수)를 한 다음에 겹치는 $-1, 1$ 과 $0, 0$ 을 동시에 고르는 경우의 수를 빼면 되지 않을까요?

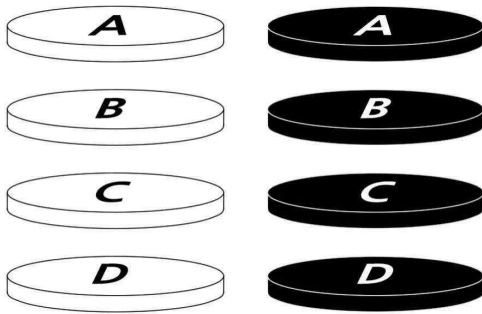
$-1, 1$ 을 고르는 경우의 수부터 구해봅시다. 이러면 함숫값 5개 중 $-1, 1$ 은 정해놓고 나머지 3개만 정하면 돼요. 어차피 고르면 크거나 같은 순서대로 자동으로 함숫값이 정해지니까요. 5개 중에서 중복을 허용하여 3개를 고르면 되니까 ${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$ 입니다.

$0, 0$ 을 고르는 경우의 수도 구해볼게요. 애도 마찬가지로 5개 중에서 3개를 고르면 되니까 ${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$ 입니다.

겹치는 경우의 수는 그냥 $-1, 1, 0, 0$ 을 정해놓고 나머지 하나의 함숫값은 Y 의 원소 5개 중에서 하나만 고르면 됩니다. 경우의 수는 5네요. 따라서 구하는 경우의 수는 $35 + 35 - 5 = 65$ 입니다.

8. 흰색 원판 4개와 검은색 원판 4개에 각각 A, B, C, D의 문자가 하나씩 적혀 있다. 이 8개의 원판 중에서 4개를 택하여 다음 규칙에 따라 원기둥 모양으로 쌓는 경우의 수를 구하시오. (단, 원판의 크기는 모두 같고, 원판의 두 밑면은 서로 구별하지 않는다.) [2022년 3월 확통 30]

- (가) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 있으면 같은 문자가 적힌 원판끼리는 검은색 원판이 흰색 원판보다 아래쪽에 놓이도록 쌓는다.
- (나) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 없으면 D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 쌓는다.



8. 정답 708 [2022년 3월 확통 30]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

그림에도 있듯이 흰색 원판 4개와 검은색 원판 4개에 각각 A, B, C, D가 있는데요. 이 중에서 4개를 골라서 쌓는데 규칙에 맞게 쌓으랍니다.

(가)조건에서 선택한 4개 중 같은 문자가 있으면 같은 문자가 적힌 것끼리는 검은색이 흰색보다 아래쪽에 놓이도록 쌓으라네요. 이런 거 어디서 많이 봤죠? 알파벳 나열할 때 예를 들어 $abcde$ 를 나열하는데 a 는 무조건 b 보다 앞에 나열해라! 하면 a 랑 b 를 같은 문자로 바꿔버린 후 두 개는 구별하지 않고 나열해버리잖아요. 그러면 자동적으로 앞에진 a , 뒤에진 b 가 되니까요.

이것도 같은 방법으로 접근하면 좋을 것 같아요. 원칙적으로 8개의 원판은 모두 달라요. 색이 같다고 해도 적힌 알파벳이 다르니까요. 하지만 같은 문자가 적힌 원판은 그냥 같은 거라고 생각하고 나열하면 될 것 같네요.

(나)조건에서 선택한 4개 중 같은 문자가 없으면, 즉 색 상관없이 A, B, C, D를 골랐다면 D가 맨 아래에 있도록 하랍니다.

일단 조건에서 같은 문자가 있냐 없냐가 중요한 판단 기준이 되는 것 같으니까 같은 문자가 있냐 없냐로 일단 기준을 정하는 게 좋을 것 같아요.

2) 케이스 분류

2-1) 같은 문자 없는 경우

없으면 일단 색 상관없이 A, B, C, D를 고르면 됩니다. 그러면 각각 흰색, 검은색을 고를 수 있고 이걸 4번 반복하니까 $2^4 = 16$ 입니다.

골랐으면 순서를 배열해야 하는데 D를 맨 아래에 놓고 나머지 A, B, C는 배열하면 되겠죠? $3! = 6$ 입니다. $16 \times 6 = 96$ 이네요.

2-2) 같은 문자 있는 경우

이러면 문자가 4개씩 2세트가 있으니까 같은 문자가 1번 나오거나, 아니면 2번 나오거나겠네요. 이것도 케이스 나눠봅시다.

2-2-1) 같은 문자 1개

일단 같은 문자가 될 문자를 골라봅시다. 경우의 수는 4네요. 그리고 같은 문자를 제외한 3개의 문자 중 나머지 2개의 문자를 골라봅시다. ${}_3C_2 = 3$ 입니다. AABC라 해볼게요. B와 C는 색까지 골라야 하죠?

$2 \times 2 = 4$ 입니다. 이제 이것 나열하면 됩니다. A 끼리는 구별하지 않으니까 $\frac{4!}{2!} = 12$ 입니다. 총

$4 \times 3 \times 4 \times 12 = 576$ 입니다.

2-2-2) 같은 문자 2개

일단 같은 문자가 될 문자 2개를 골라봅시다. ${}_4C_2 = 6$ 입니다. AABB라 하면 A 끼리는 구별하지 않고,

B끼리도 구별하지 않으니까 그냥 AABB를 나열하면 되겠네요. $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ 입니다. 총 $6 \times 6 = 36$ 이네요.

모두 더하면 $96 + 36 + 576 = 708$ 이네요.