수 I

홍현기

유난히 추운 올해 겨울 2013년 2월에 이 책을 쓰기 시작한다. 재수를 통해 대학을 온 뒤로 수년간 많은 학생들에게 수학을 가르쳐왔다. 하지만 시중에 있는 개념서는 뭔가 2%부족하다는 아쉬움을 항상 느껴왔다. 그래서 개인적으로 1년여에 걸쳐 만든 교재와 시중에 있는 문제집을 같이 병행해가며 학생들과 수업해왔고 지금까지 썩 괜찮은 성과를 보였다. 하지만 조금 더 많은 학생들이 입시에서 좋은 수학성적을 얻기를 바라는 마음과 언젠가는 꼭 한번 수학 개념서를 만들어보겠다는 꿈으로 이 책을 쓰게 되었다.
나는 수학과는 아무런 관련이 없는 의과대학에 다니고 있다. 대학수학은 개인적으로 혼자서 조금씩 공부를 해왔지만 정식으로 배운적이 없기 때문에 고등학생들의 시각에서 바라보고 입시에 필요한 개념과 놓치기 쉬운 내용들, 실수하기 쉬운 부분에 대해서 적었다. 물론 가끔 고등학교수학을 뛰어넘는 내용이 나오지만 고등학생들이 충분히 이해할 수 있는 내용만 언급할 것이다.
이 책은 중위권 학생부터 최상위권 학생들을 위한 책이다. 최소한 단원에 대한 기본개념이나 용어들은 충분히 숙지를 한 다음 책을 보길 바란다. 어느 정도 내용을 알고 있는 학생이라면 누구나 쉽게 수리영역을 공부할 수 있도록 충분한 설명을 해놓았다.
한 가지 학생들에게 부탁하고 싶은 점은 편식공부는 절대로 하지 말아야한다. 가끔 학생들을 가르치다보면 '선생님, 이거 어차피 수능에 안 나오니까 공부 안 해도 되죠?'라고 묻는 경우가 있다. 어떻게 보면 참 순진하고 어떻게 보면 참 건방지다. 수능에 나올지 안 나올지는 출제위원 말고는 그 누구도 모른다. 그리고 A라는 개념을 단순히 A에 대한 문제를 풀기위한 것이 아니라 B, C, D에 대한 해결책이 될 수 있다. 따라서 편식공부를 하다가는 '큰 코'를 다친다.
해가 거듭할수록 수시의 비율이 높아지고 그만큼 논술에 응시해야하는 학생이 늘어나고 있다. 보통 수시 원서접수시즌이 오면 너도나도 수시 원서를 접수한 뒤 논술공부를 한답시고 잘 하고 있던 수능공부를 그만둔다. 인문계열 논술은 나도 할 말이 없다. 하지만 수리논술은 확실히 말할 수 있다. 논술이라고 해서 지금껏 한 번도 보지 못했던 새로운 개념이 나오거나 신비로운 'Skill'이 등장하는 것이 아니다. 수능이든 논술이든 모두 고등학교과정을 뛰어넘지 않는다. 고등학교 수학에 대한 개념을 완벽히 알고 있다면 누구든 풀 수 있게 되어있다. 물론 고등학교과정을 뛰어넘는 내용이 논술에 출제가 되기도 하지만 제시문과 고등학교수학의 개념으로 충분히 유추할 수 있다. 따라서 수능공부, 논술공부를 구분지어 생각하는 것은 좋지 않다. 결국은 둘 다 개념공부이다.
내용은 단원별로 개념파트와 문제파트 심화파트로 나뉜다. 개념파트에서도 예제가 많이 나온다. 예제는 개념을 쉽게 이해하도록 넣어놓은 것이니 반드시 스스로 풀어보고 난 뒤 해설을 참고하자.
문제파트에서는 주로 수능, 평가원, 교육청, 사관학교, 경찰대 기출문제를 다룰 것이다.
심화파트에서는 주로 전국 주요대학 논술기출문제를 볼 것이며 간혹 일본 주요대학 본고사문제도 볼 것이다.
이 책을 보게 될 학생들에게 마지막으로 한마디 충고를 하자면 책은 말 그대로 책일 뿐 자신의 지식은 아니다. 책에 있는 지식을 자신의 것으로 만드는 것이 공부다. 항상 스스로 생각하고 해결하는 습관을 가져야한다.

2013년 2월 7일

행렬

행렬이란 무엇인가?

행렬은 '수와 문자등을 직사각형 형태로 배열한 형식'이다. 예를 들어서 윤재와 호성이의 국어, 수학, 영어의 등급이 각각 2,1,1등급, 3,2,1등급이라고 하면

	윤재	호성
국어	2	3
수학	1	2
영어	1	1

위와 같은 표로 주어진 정보를 정리할 수 있다. 이것을 행렬로 표현하면

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

과 같은 형태로 표현할 수 있다. 그리고 우리는 주어진 행렬을 (3×2)꼴의 행렬이라 부른다. 하지만 실제로 과학 등에서 쓰이는 행렬은 굉장히 거대하다. 보통 (1000×1000)꼴의 행렬을 뛰어넘는다. 그렇다면 그런 행렬들의 성분을 모두 적는다는 것은 현실적으로 힘들뿐더러 비효율적이다. 따라서 성분을 함수로 만들어 표현할 수도 있다.

$ex)\ A = (a_{ij})_{i=1\sim3,\, j=1,2}$, $a_{ij} = i-j+1$ 일 때, 행렬 A를 구하시오.

행렬 A는 $(a_{ij})_{i=1\sim3,\, j=1,2}$이다. 먼저 i는 행렬의 '행'을 말한다. 즉 3행까지 있다는 말이다. 마찬가지로 열은 2열까지 있으므로 행렬 A는 (3×2)꼴의 행렬이다. 그리고 $a_{ij} = i-j+1$은 행렬 A의 i행 j열의 성분을 말하는 것으로 하나씩 대입해 값을 구하면 된다. 따라서

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$이다. 그리고 행렬 A와 B의 꼴과 각각의 성분이 모두 같으면 두 행렬 A와 B는 같다.

수많은 행렬들 중에서 우리가 몇 가지 눈여겨보아야 할 행렬들이 있다.

$(m\times m)$의 꼴의 행렬 : m차 정사각행렬

(1×1)의 꼴의 행렬 : 수와 같다

모든 성분이 0인 행렬 : 영행렬

자주 등장하는 행렬의 형태이므로 '이런게 있구나~'정도로 넘어가면 된다.

행렬의 연산

지금부터 행렬의 연산에 관하여 살펴보자.

◦ 행렬의 실수배, 덧, 뺄셈

- $A=(a_{ij})_{i=1\sim m,\, j=1\sim n} \Rightarrow kA=(ka_{ij})_{i=1\sim m,\, j=1\sim n}$

- $A=(a_{ij})_{i=1\sim m,\, j=1\sim n},\, B=(b_{ij})_{i=1\sim m,\, j=1\sim n} \Rightarrow A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{i=1\sim m,\, j=1\sim n}$

행렬 A에 실수 k를 곱하면 행렬 A의 각각의 성분에 k를 곱해주면 된다.
마찬가지로 행렬 A와 B의 덧, 뺄셈은 같은 위치의 성분끼리 더하고 빼면 된다.
물론 행렬 A와 B가 같은 꼴의 행렬이 아니라면 덧, 뺄셈은 가능하지 않다.

◦ 행렬의 곱셈

$A=(a_{ij})_{i=1\sim l,\, j=1\sim m},\ B=(b_{ij})_{i=1\sim m,\, j=1\sim n}$

$\Rightarrow A\times B=(c_{ij})_{i=1\sim l,\, j=1\sim n}$

$$c_{ij}=a_{i1}\times b_{1j}+a_{i2}\times b_{2j}+\cdots+a_{im}\times b_{mj}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$$

행렬의 곱셈은 처음배우는 학생이라면 많이 생소하고 어려울 것이다. 하지만 차근차근 살펴보면 누구나 쉽게 할 수 있다. 먼저 $(l\times m)$꼴의 행렬 A와 $(m\times n)$꼴의 행렬 B가 주어져있다. 이때 행렬 A와 B의 곱 AB를 구해보자. 먼저 AB=C라고 하면 C가 어떤 꼴의 행렬이 나오는지 알아야한다. A와 B를 곱했으니 순서대로 각 행렬의 형식을 곱해준다.

$(l\times m)\times(m\times n)$ - ①

이 때, 총 4개의 문자에서 만나고 있는 중간에 두 개의 문자가 일치하면 행렬의 곱이 가능하다. 그리고 일치하는 두 개의 문자를 소거하면

$(l\times n)$

이 되고 이는 행렬 AB(=C)의 형식이 된다.
만약에 B와 A를 곱했다고 하면

$(m\times n)\times(l\times m)$ - ②

이 되어 중간에 두 개의 문자가 일치하지 않는다. 따라서 BA는 정의되지 않는다.
계속해서 곱하는 방법은 행렬 AB(=C)의 (i,j)성분을 구하고 싶다면 행렬 A의 i행과 행렬 B의 j열의 성분을 차례대로 곱하여 더해주면 된다. ①,②에서 중간에 두 개의 문자가 일치해야 하는 이유가 여기서 드러난다! 만약 두 개의 문자가 일치한다면 행렬 A의 i행과 행렬 B의 j열

의 성분개수가 같아 연산이 가능하지만 그렇지 않다면 연산이 불가능하다. 말로 풀어 쓰다보니 헷갈리는 학생도 있을 것이다. 예를 들어보자.

$$ex)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7 & 8 & 9 & 10\\11 & 12 & 13 & 14\\15 & 16 & 17 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14}\\c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24}\end{pmatrix}$$ 일 때, c_{13}, c_{24}를 구하시오.

A B C

해설) 먼저 c_{13}은 행렬 A의 1행과 행렬 B의 3열을 차례대로 곱하여 더해주면 된다.
$c_{13}=1\times9+2\times13+3\times17$
c_{24}도 똑같이 행렬 A의 2행과 행렬 B의 4열을 차례대로 곱하여 더해주면 된다.
$c_{24}=4\times10+5\times14+6\times18$

지금까지 행렬의 가장 기본이 되는 내용들에 관하여 살펴보았다. 계속해서 고등학교과정에서 다루는 행렬은 주로 이차정사각행렬이므로 이차정사각행렬에 관해서 깊이 있게 공부해보자.

이차정사각행렬

이차정사각행렬은 $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$와 같은 형태의 행렬이다. 지금까지 위에서 봐왔던 행렬의 성질들이 이차정사각행렬에서도 모두 성립한다. 더 나아가 이차정사각행렬에 대해서 조금 더 살펴보자.

① 곱셈에 대하여 닫혀있다.

'닫혀있다.'라는 말은 수학(상)의 연산파트에서 배웠다. 오랜시간(?)이 지났기 때문에 잊어버린 학생들을 위하여 다시 한 번 공부해보자.

집합 S에 어떤 연산 ⊙이 정의되어 있을 때, S에 속하는 임의의 두 원소 a, b에 대하여 a⊙b가 S에 속하면 집합 S는 연산 ⊙에 대하여 '닫혀 있다'고 한다.

예를 들면 집합 $S=\{-1,0,1\}$가 주어졌을 때 집합 S에 속하는 임의의 두 원소를 선택하여 곱한 결과를 나열해보자.

$$\begin{aligned}(-1)\times(-1)&=1\\(-1)\times0&=0\\(-1)\times1&=-1\\0\times0&=0\\0\times1&=1\\1\times1&=1\end{aligned}$$

나올 수 있는 결과 값이 모두 집합 S의 원소가 되는 것을 확인할 수 있다. 따라서 집합 S는 곱셈에 관하여 '닫혀있다'. 그래도 이해가 잘 안가는 학생은 수학(상)의 연산파트를 다시 한 번 공부해보자.

말이 잠시 새나갔는데 다시 돌아오면 이차정사각행렬은 곱셈에 대하여 닫혀있다.
모든 이차정사각행렬을 포함하는 집합 U를 생각하자. 이때 집합 U에서 임의의 두 이차정사각행렬을 꺼내어 곱하여도 항상 이차정사각행렬이 나오고 이 말은 항상 U의 원소가 된다는 것이다. 따라서 임의의 두 이차정사각행렬을 곱하면 항상 이차정사각행렬이 나온다.

② 곱셈에 대한 항등원이 존재한다.

임의의 이차정사각행렬 A가 있다. 항등원에 정의에 따라 $AE=EA=A$를 만족하는 E를 찾아보자. 편의상 $AE=A$를 만족하는 E를 찾아보자.
$A=\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} e\,f \\ g\,h \end{pmatrix}$라 두고 주어진 식을 정리하면

$$\begin{aligned} &ae+bg=a \quad -(1) \\ &af+bh=b \quad -(2) \\ &ce+dg=c \quad -(3) \\ &cf+dh=d \quad -(4) \end{aligned}$$

(1)과 (3)에 각각 c와 a를 곱하여 연립하면 $(bc-ad)g=0$이 된다. 따라서 $bc-ad$와 g중 적어도 하나는 0이 되어야한다. 하지만 임의의 이차정사각행렬 A이므로 $bc-ad$가 항상 0이 되지는 못한다. 다르게 말하면 주어진 4개의 식은 a,b,c,d에 대한 '항등식'이다. 따라서 $g=0$이다. 이렇게 주어진 식들을 연립하여 정리하면

$$E=\begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix}$$

이다. 우리는 이 행렬을 '단위행렬'이라 부른다.

③ 곱셈에 대한 역원이 존재한다.

곱셈에 대한 항등원을 찾았으니 이번에는 역원을 찾아보자. 역원의 정의에 따라 $AX=E$를 만족하는 X를 찾자.
$A=\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} e\,f \\ g\,h \end{pmatrix}$라 두고 주어진 식을 정리하면

$$\begin{aligned} &ae+bg=1 \quad -(1) \\ &af+bh=0 \quad -(2) \\ &ce+dg=0 \quad -(3) \\ &cf+dh=1 \quad -(4) \end{aligned}$$

단위행렬을 구할 때와 같이 (1)과 (3)에 각각 c와 a를 곱하여 연립하면 $(bc-ad)g=c$
이고 $g=-\dfrac{c}{ad-bc}$이다. 여기서 ②와 ③의 중요한 차이점이 있다. ②에서는 a,b,c,d에 대한 '항등식'이었지만 ③에서는 a,b,c,d에 대한 '방정식'이다. 즉 a,b,c,d에 따라 해가 존재한다. 이렇게 주어진 식들을 연립하여 정리하면

$X = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$이다. 우리는 이 행렬을 행렬 A의 역행렬이라 부르고 A^{-1}라고 표현한다. 중요한 점은 $ad-bc$는 0이 되어서는 안된다. 즉, $ad-bc$가 0이 되면 역행렬이 존재하지 않는다.
당연한 말이지만 행렬 A의 역행렬이 존재한다면 그 역행렬은 유일하다.
귀류법으로 간단히 증명할 수 있다. 먼저 행렬 A의 서로 다른 역행렬 B, C가 존재한다고 가정하자.

$B = BE = BAC = EC = C$

가 된다. 그런데 A의 서로 다른 역행렬 B, C라고 했는데 B와 C가 같다. 이것은 모순이므로 행렬 A의 역행렬은 유일하다. 따라서 두 이차정사각행렬 A와 B가 같은 행렬이면 두 행렬의 역행렬 A^{-1}와 B^{-1}도 같다.

계속해서 역행렬의 존재에 관하여 좀 더 살펴보자.

※ 역행렬의 존재

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\det(A) = ad-bc$라 정의하자.

(det라는 생소한 단어가 나오지만 고등학교과정에서 굉장히 활용도가 높기 때문에 소개한다.)

이 때, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$가 성립한다.

(det : det$erminant$)

$pf)$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$라 하자.

$AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$이고,

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg) = acef+adeh+bcfg+bdgh-acef-adfg-bceh-bdgh \\ &= adeh+bcfg-adfg-bceh \end{aligned}$$

$\det(A) \cdot \det(B) = (ad-bc) \cdot (eh-fg) = adeh+bcfg-adfg-bceh$

$\therefore \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

det값의 정의를 살펴보면 역행렬의 존재유무를 따지는 중요한 값이다. det값이 0인지 아닌지에 따라서 역행렬의 존재유무가 가려진다. 위의 증명처럼 det값은 중요한 성질이 있는데 det(AB)는 det(A)와 det(B)의 곱과 같다.
따라서 행렬 AB의 det값을 구하기 위해서 굳이 AB를 구한다음 det값을 구하지 않아도 A와 B의 det값을 곱해주면 쉽게 AB의 det값을 구할 수 있다.

다음 명제에 답해보자.

1. A^{-1},B^{-1}가 모두 존재하면 $(AB)^{-1}$도 존재한다. ( )

2. $(AB)^{-1}$이 존재하면 A^{-1},B^{-1}이 모두 존재한다. ( )

3. $(A^n)^{-1}$이 존재하면 A^{-1}도 존재한다. ( )

4. A^{-1}이 존재하면 $(A^n)^{-1}$도 존재한다. ( )

해설) 눈치가 빠른 학생이라면 위의 4개의 명제가 모두 같은 문제라는 것을 알았을 것이다. 1번을 풀어보면 det(A)와 det(B)가 모두 0이 아니다. 그런데 det(AB)=det(A)·det(B)이므로 det(AB)도 0이 아니다. 따라서 1번 명제는 맞다. 2번도 같은 이유로 옳은 명제이다. 위의 정리를 확장하면 $\det(A^n)=\{\det(A)\}^n$이므로 3,4번도 옳은 명제이다.

행렬 A에 대한 이차식

·케일리-해밀턴 정리

임의의 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대해 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$이 항상 성립한다.

케일리-해밀턴 정리는 굉장히 중요한 내용이므로 꼭 숙지해야한다. 그 어떤 행렬 A가 주어지더라도 A에 대한 이차식을 쉽게 만들어 낼 수 있다. 하지만 많은 학생들이 오해하는 부분이 있으니 짚어보도록 하자. 주어진 정리를 다시 읽어보면 '행렬 A가 주어졌을 때 A에 대한 이차식으로써 케일리-해밀턴 식이 존재한다.'는 것이다. 그런데 간혹 학생들은 'A의 이차식이 주어졌을 때 이 식은 A에 대한 케일리-해밀턴 식이다!' 라는 엉뚱한 생각을 하는 것을 종종 보아왔다. 하지만 행렬 A에 대한 이차식이 항상 케일리-해밀턴 식이라는 생각은 옳지 않다. 경우를 나누어 살펴보자.

ⅰ) A=kE

① 케일리-해밀턴 식 : 유일하다
② 주어진 행렬을 근으로 갖는 이차식 : 무수히 많다.

①의 경우는 케일리-해밀턴 식으로 유일한 식이다.
②의 경우를 살펴보자. (A-kE)(A-sE)=0이라는 이차식이 주어졌을 때 s는 임의의 수가 되더라도 주어진 식은 A의 이차식이다. 따라서 이때는 무수히 많은 A의 이차식이 있다.

∴ A=kE 일 때 A의 이차식은 무수히 많다.

ⅱ) A≠kE

① 케일리-해밀턴 식 : 유일하다.

이때는 ⅰ)의 경우와 달리 행렬 A를 근으로 갖는 이차식은 존재할 수 없다. 왜냐하면 모든 이차식은 인수분해가 가능하므로 이차식의 근은 반드시 kE 꼴이기 때문이다.

∴ A≠kE 일 때 A의 이차식은 케일리-해밀턴 식이 유일하다.

따라서 행렬 A가 주어졌을 때 A에 대한 이차식이 몇 개인지 쉽게 생각할 수 있다.

그럼 바로 다음 명제에 답해보자.

$cf)\ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대해 $A^2-tA+sE=0$이면 $t=a+d,\ s=ad-bc$이다. ( )

해설)
위의 설명을 잘 읽었다면 주어진 명제가 틀렸다는 것을 금방 알아챘을 것이다.
질문을 의미를 살펴보면 '임의의 행렬 A가 주어졌을 때 A의 이차식은 케일리-해밀턴 식으로 유일한가?' 이다. 하지만 A=kE 꼴이면 A를 근으로 갖는 무수히 많은 이차식이 존재하므로 주어진 명제는 옳지 않다. 만약 주어진 행렬이 kE 꼴이 아니라는 조건만 있다면 명제는 옳게 되지만 눈을 씻고 찾아봐도 그런 조건은 없다.

우리는 지금까지 행렬 A가 주어졌을 때 A의 이차식이 몇 개인지 경우를 나누어 살펴보았다. 이번에는 A에 대한 이차식이 주어졌을 때, 주어진 식을 만족하는 행렬A는 어떤 것들이 있는지 살펴보도록 하자.

$A^2-xA+yE=0$

여러분이 이차식을 만족하는 행렬 A를 찾고싶을 때 '무조건' 두 가지 경우만 생각하면 된다.

① 주어진 식을 케일리-해밀턴 식으로 갖는 행렬 : 무수히 많다
② 주어진 식의 근이 되는 행렬 : 많아야 2개다

①의 경우는 여러분들이 이차식을 보았을 때 누구나 떠올리는 행렬'들'이다.
$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$일 때, $a+d=x,\ ad-bc=y$를 만족하는 행렬은 무수히 많기 때문이다.
②의 경우는 주어진 식을 인수분해하면 근이 되는 행렬은 1개 또는 2개 일 것이다.

(물론 중근도 두 개의 근이지만 결국은 중복되는 하나의 값이다.)
따라서 A에 대한 이차식을 보았을 때 주어진 식을 케일리-해밀턴 식으로 갖는 행렬들만 생각할 것이 아니라 근이 되는 행렬도 반드시 생각해야 한다.

다음 두개의 예제를 풀어보자.

$ex1)\ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대해 $A^2-3A+2E=0$이 성립할 때, $(a+d,\ ad-bc)$의 해를 구하시오.

해설) 위에서 충분히 언급했듯이 이차식을 만족하는 행렬 A는 두 가지 경우'만' 있다.
① 주어진 식을 케일리 해밀턴 식으로 갖는 행렬'들' : (3,2)
② 주어진 식의 근이 되는 행렬 : A=E or 2E → (2,1),(4,4)

∴ (3,2),(2,1),(4,4)

$ex2)\ A=\begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 1 \end{pmatrix}$에 대해 $\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}=A$를 만족할 때, x^2+y^2의 값을 구하시오.

해설) 혹시 행렬 A를 주어진 식에 대입하여 푼 학생이 있다면 당장 처음으로 돌아가서 다시 공부를 하자. 식을 정리하면 $A^2-3E=0$이라는 이차식이 나올 것이다. 여기서 우리는 기계처럼 바로 A를 대입해 계산할 것이 아니라 만물의 영장답게 생각을 해보자. 이차식을 만족하는 행렬은 크게 두 가지로 나눌 수 있었다.

① 주어진 식을 케일리-해밀턴 식으로 갖는 행렬
② 주어진 식의 근이 되는 행렬

그런데 행렬 A를 보아하니 주어진 식의 근은 절대로 될 수 없다. 근이 된다면 kE 꼴이 되어야하기 때문이다. 따라서 주어진 식은 행렬 A의 케일리-해밀턴 식이 되므로
$x+1=0,\ x-2y=-3$

$x=-1,\ y=1$

$\therefore x^2+y^2=2$

이해가 충분히 되리라 생각한다.
지금까지 우리는 크게 두 가지를 공부를 했다 첫 번째, '행렬 A가 주어졌을 때 A에 대한 이차식은 어떤 것들이 있는가?' 두 번째, 'A에 대한 이차식이 주어졌을 때 식을 만족하는 행렬 A는 어떤 것들이 있는가?'.
지금까지 얘기한 내용만 충분히 잘 이해해도 행렬에서 이차식 때문에 헷갈리거나 고생하는 일은 없을 것이다.
머릿속에 내용이 정리가 안된다면 다시 돌아가서 천천히 내용을 한 번 더 읽어보자.

◦ 곱셈에 대한 교환법칙

임의의 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $AB = BA$이다. ( )

주어진 명제는 옳지 않다. 셀 수도 없이 많은 반례들이 있다.(예를 들면, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$)
계속해서 아래의 명제를 보자.

$AB = BA \ : p \quad aA + bB + cE = O$인 a, b가 존재$(a, b \neq 0) : q$

1) $p \rightarrow q$ ( )

2) $q \rightarrow p$ ( )

해설)

1) 'AB=BA이면 A와 B에 대한 일차식이 존재하는가?'가 질문의 핵심이다.
만약 A=E이고 B는 임의의 행렬이라하자. 일단 A가 단위행렬이므로 AB=BA이다.
하지만 일차식을 정리하면 $B = -\frac{1}{b}(aA + cE) = -\frac{a+c}{b}E$이다. 그런데 B는 임의의 행렬이었으므로 반드시 단위행렬의 실수배가 되어야하는 것은 아니다. 따라서 1)은 옳지 않다.

2) aA+bB+cE=0이라는 일차식이 주어졌을 때 $B = -\frac{1}{b}(aA + cE)$이다.

따라서 $AB = -\frac{1}{b}(aA^2 + cA)$, $BA = -\frac{1}{b}(aA^2 + cA)$이므로 AB=BA이다.
명제 2)는 옳다.

여기서 우리는 중요한 팁을 얻을 수 있는데 문제를 풀 때 조건에 A와 B의 관한 일차식이 주어져있다면 더 볼 것도 없이 AB=BA라고 생각할 수 있다.

영인자

- $A,B\neq O$이면 $AB\neq 0$이다. ( )

아마 대부분의 학생이 위의 명제는 옳지 않다는 것을 잘 알고 있을 것이다.
반례로써 그 유명한 '영인자'가 등장한다. 먼저 영인자의 정의부터 알아보자

정의 : 영행렬이 아닌 두 이차 정사각행렬 A,B에 대해 AB 또는 BA가 영행렬이면 A,B를 영인자라 한다.

첫 번째로 중요한 것은 영인자는 절대로 영행렬이 아니다. 그리고 두 번째, AB와 BA가 모두 영행렬이 되어야 A와 B가 영인자가 되는 것이 아니라 AB와 BA중 하나만 영행렬이 되어도 A와 B는 영인자라고 부른다. 그리고 또 한 가지 중요한 것은 영인자는 절대로 역행렬을 갖지 않는다.
그런데 우리가 앞에서 배웠던 det값을 이용하면 A와 B 둘 중 하나만 det값이 0이 되면 되는데 왜 둘 다 det값이 0이 되어야 할까? 귀류법을 이용해 증명할 수 있다.
만약 AB=0이면서 A와 B는 영행렬이 아니고 A의 역행렬이 존재한다고 가정하자.
주어진 식의 양변에 A의 역행렬을 곱하면 B는 영행렬이 된다. 따라서 영인자의 정의에 모순이므로 영인자는 역행렬을 갖지 않는다.

계속해서 다음 명제를 풀어보자.

1. $A^2=0$이면 $A=0$이다. ( )

2. $A\neq 0,\ AB=AC$이면 $B=C$이다. ( )

3. $A^2=E$이면 $A=E$ or $A=-E$이다. ( )

해설) 1은 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$으로 간단히 반례를 들 수 있다. 2번 명제를 보자. 주어진 식을 정리하면 $A(B-C)=0$이 된다. 따라서 주어진 명제는 'A가 영행렬이 아니면 B-C가 영행렬이 되어야 하나?'라는 것인데 옳지 않은 명제이다. 반례로써 적당한 영인자들을 잡아주면 된다.

같은 이유로 3번 명제도 옳지 않다. 결국 세 개의 명제는 모두 같은 질문이다.

이처럼 영인자는 행렬의 OX문제에서 반례로써 굉장히 활용도가 높다.
하지만 다음 명제를 보자.

모든 성분이 실수인 이차정사각행렬 A에 대해 $A^3=E$이면 $A-E=0$ or $A^2+A+E=0$이다. ( )

대부분의 학생들은 주어진 명제가 틀렸다고 생각할 것이다. 주어진 식을 정리하면 $(A-E)(A^2+A+E)=O$이 된다. 말 그래도 $A-E$와 A^2+A+E를 곱해서 영행렬이 나왔는데 둘 중에 하나는 무조건 영행렬이 되어야한다? 영인자를 배운 학생이라면 그렇지 않다고 생각할 것이다. 하지만 정말 안타깝게도 주어진 명제는 옳다. 지금부터 증명과정을 천천히 살펴보자.

pf)

$i)\,(A-E)^{-1}$이 존재할 때

양변에 $(A-E)^{-1}$를 곱하면 $A^2+A+E=O$

$ii)\,(A-E)^{-1}$이 존재하지 않을 때

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하자.

$A-E=\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}$이고 $A-E$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$\det(A-E)=(a-1)(d-1)-bc=1-(a+d)+(ad-bc)=0$

이 때, $a+d=s,\ ad-bc=t$라 두자.

$1-s+t=0\ -\ \ast$

케일리 $-$ 해밀턴 정리에 의해

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O\ \rightarrow\ A^2=sA-tE$

양변에 A를 곱한다.

$A^3=sA^2-tA$

이 때, $A^3=E$이고 $A^2=sA-tE,\ 1-s+t=0$이므로 대입하여 정리하면

$(s^2+s+1)A=(s^2+s+1)E$이다.

그런데 주어진 행렬 A는 모든 성분이 실수인 성분이므로 $s=a+d$도 실수이다.

그러므로 s^2+s+1은 0이 될 수 없다.

따라서 $A=E$이다.

이 경우는 매우 특별한 예외이니 머릿속에 꼭 넣어두길 바란다.

$cf)\ A=\begin{pmatrix} a\ b \\ c\ d \end{pmatrix}\ n:3$이상의 자연수

$A^n=O \Rightarrow \begin{cases} 1: A^{-1}\text{은 없다.} \\ 2: A^2=O \end{cases}$

다음 두 가지 내용에 대해서 살펴보자. $A^n=O$ (n은 3이상의 자연수)이면 A의 역행렬은 존재하지 않으며(1), $A^2=O$이다(2). (1)은 우리가 앞에서 배웠던 det값을 이용하면 쉽게 알 수 있다. $\det(A^n)=\{\det(A)\}^n$이므로 det(A)=0이다. 따라서 A의 역행렬은 존재하지 않는다.
지금부터 (2)에 대해서 알아보자.

pf)
$i)\ A=O$

자명하다.

$ii)\ A\neq O$

$A=\begin{pmatrix} a\ b \\ c\ d \end{pmatrix}$라 하자.

A의 케일리$-$해밀턴 식은 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$이다.

그런데 (1)에서 A의 역행렬이 없음을 확인하였으므로 $ad-bc=0$이고

$A^2=(a+d)A$로 정리할 수 있다. $-\ \ast$

양변에 A를 곱하면

$A^3=(a+d)A^2=(a+d)^2A$

이런식으로 계속 양변에 A를 곱하여 정리해나가면

$A^n=(a+d)^{n-1}A$이 된다. 그런데 $A^n=O$이므로 $(a+d)^{n-1}A=O$이다.

이 때, $a+d=0$이거나 $A=O$이어야 한다. 하지만 $A\neq O$이므로 $a+d=0$이다.

$\ast\ : A^2=(a+d)A=O$

따라서 $A^2=O$이다.

cf) 다음 두 명제에 답하시오.

A, $A+E$, $A-E$ 중 적어도 하나는 역행렬을 가진다. ( )

$A-2E$, $A-3E$: 모두 역행렬이 없다. $\Rightarrow A^2-5A+6E=O$ ( )

해설)

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A-tE$ 꼴의 행렬중에서 역행렬을 갖지않는것을 찾자.

$A-tE=\begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix}$이고, 행렬 $A-tE$가 역행렬을 갖지 않는다면

$\det(A-tE)=(a-t)(d-t)-bc=t^2-(a+d)t+(ad-bc)=0$이다.

주어진 식은 t에 대한 이차식이며 근이 되는 t를 대입하면 $A-tE$는 역행렬을 갖지 않는다.

따라서 t의 값은 서로 다른 두 허근을 갖거나 중근, 서로 다른 두 실근을 가질 수 있으므로

t의 값은 많아야 2개이다. 따라서 $A-tE$ 꼴의 행렬 중 역행렬을 갖지 않는것은 많아야 2개이다.

$\therefore$ $A, A+E, A-E$는 모두 $A-tE$꼴의 행렬이므로 셋 중 적어도 하나는 역행렬을 가진다.

계속해서 t에 대한 이차식의 두 근을 t_1, t_2라 하자.

근과 계수의 관계에 의해

$t_1+t_2=a+d$
$t_1t_2=ad-bc$

이 때, $A-tE$ 꼴의 행렬 중 역행렬을 갖지 않는 두 행렬 $A-t_1E$와 $A-t_2E$를 곱하자.

$(A-t_1E)(A-t_2E)=A^2-(t_1+t_2)A+(t_1t_2)E=A^2-(a+d)A+(ad-bc)E$이다.

그런데 식을 정리하고보니 어디서 많이 보던 식이 보인다. 바로 케일리 – 해밀턴 식이다!

임의의 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대해 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$이므로

$(A-t_1E)(A-t_2E)=0$이다. 따라서 $A-tE$꼴의 행렬 중 역행렬을 갖지 않는 두개의 행렬을 곱하면

항상 영행렬이 된다.

$\therefore$ $A-2E$와 $A-3E$가 모두 역행렬이 없다면 $A-tE$꼴의 행렬 중 역행렬을 갖지않는 두 개의 행렬에 해당하므로 두 행렬의 곱은 영행렬이 된다.

따라서 두 개의 명제가 모두 옳다.

그런데 이런 내용을 학생들에게 설명하면 또 엉뚱한 생각을 해버린다. 예를 들어 다음과 같은 이차식이 있다고 하자.

$$(A-2E)(A-3E)=0$$

호성이는 주어진 이차식을 보고 이런 질문을 한다.

호성 : 선생님! A-2E랑 A-3E를 곱해서 영행렬이 나왔으니까 A-2E랑 A-3E가 A-tE꼴의 행렬 중 역행렬을 갖지 않는 두 개의 행렬이 되겠네요?

아마 이 책을 보고있는 많은 학생들이 호성이와 같은 오해를 할 것이다. 말 그대로 잘못된 생각이다. 간단한 반례를 들어보자. A=2E일 때 A-2E는 영행렬이 되므로 역행렬이 없지만 A-3E는 -E가 되므로 역행렬이 존재한다. A=3E일때도 마찬가지이다. 하지만 A가 2E, 3E가 아니라면 A-2E와 A-3E는 역행렬이 없는 것이 확실하다. 왜냐하면 두 행렬 모두 영행렬이 아니면서 곱이 영행렬이 되려면 두 행렬이 영인자이고 영인자는 역행렬이 없기 때문이다.
다시 말해서 A-2E와 A-3E는 경우에 따라서 역행렬이 있을수도 있고 없을수도 있는 상황이다. 따라서 A-2E와 A-3E에 대해서 역행렬의 존재유무를 함부로 단정지을 수 없다. 한마디로 알 수 없다는 것이다. 하지만 A-2E와 A-3E를 제외한 나머지 A-tE꼴의 행렬들을 살펴보자.
주어진 이차식을 변형하면

$$A^2-5A+6E=0$$

$$A^2-5A-t(t-5)E=-(t^2-5t+6)E$$

$$(A-tE)(A+(t-5)E)=-(t^2-5t+6)E=-(t-2)(t-3)E$$

이 된다. t가 2와 3이 아니라면 이차식의 우변이 영행렬이 아니므로 A-tE는 역행렬을 가진다. 따라서 A-2E와 A-3E를 제외한 나머지 A-tE꼴의 행렬들은 '무조건' 역행렬을 가진다.

하지만 애석하게도 한 가지 예외가 있다. 다음과 같은 이차식이 있다.

$$(A-2E)^2=0$$

이때 우리가 위처럼 똑같이 생각을 하면 A-2E의 역행렬이 있는지 없는지 알 수 없다.
하지만 이 경우는 A-2E의 역행렬이 확실하게! 없다. $(A-2E)^2$이 영행렬이 되려면 A-2E가 영행렬이거나 A-2E가 영인자가 되는 것 이외에는 방법이 없다. A-2E가 영행렬이어도 역행렬이 없고 A-2E가 영인자라도 역행렬이 없기 때문에 A-2E는 역행렬이 없다. 따라서 A-2E가 A-tE꼴의 행렬 중 역행렬을 갖지 않는 '두' 행렬이 되는 것이다. A-2E 하나뿐인데 왜 두 행렬일까? 위에서 A-tE꼴의 행렬 중 역행렬을 갖지 않는 것을 찾는 과정에서 t에 대한 이차식이 있었을 것이다. 그 이차식이 중근을 가져 유일해보이지만 A-2E가 역행렬을 갖지 않는 두 행렬인 것이고 두 행렬의 곱이 영행렬인 것이다.
하지만 이번에도 위의 경우와 같이 A-2E를 제외한 A-tE꼴의 행렬은 모두 역행렬이 존재한

다. 증명은 위의 경우와 같다.
첫 번째 예와 두 번째 예를 잘 비교해가며 숙지하자.

연립일차방정식과 행렬

이번에는 연립일차방정식과 행렬에 관하여 살펴보자

x,y의 연립방정식

$$\begin{matrix} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{matrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A\,:\,\text{계수행렬}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x\ \ y) \underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}_{A\text{의 전치행렬}} = (e\ \ f)$$

① ② ③

주어진 연립방정식 ①을 ②와 같은 행렬식으로 표현할 수 있다는 것은 누구나 잘 알고 있을 것이다. 추가로 ③의 형태로도 표현될 수 있다. 전개해보면 같은 식이라는 것을 알 수 있다.
여기서 중요한 포인트는 ①, ②, ③ 모두 같은 식이라는 것이다. 표현만 다를 뿐이지 모두 동일한 식이다. 따라서 우리는 ②와 ③과 같은 행렬식을 보았을 때 ①과 같은 연립방정식으로 바라볼 필요가 있다. ①을 보면 중학교 시절부터 늘 봐왔던 연립일차방정식이다. 그래프를 그린다면 두 개의 직선이고 즉, 연립방정식의 해는 두 직선의 교점이다.
지금부터 연립방정식의 해가 어떻게 되는지 경우에 따라 나눠 살펴보자.

(1) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = \dfrac{e}{f}$

$\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = \dfrac{e}{f} = k$라 두면 $a = kc,\, b = kd,\, e = kf$이다. 관계식을 각각의 직선에 대입하면 두 직선은 같은 직선이고 일치한다. 직선상의 모든 점이 두 직선의 교점이다. 따라서 연립방정식의 해는 무수히 많다. 우리는 이 경우를 '부정(不定)'이라고 한다.

(不定 : (해를) 정할 수 없다.)

(2) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \neq \dfrac{e}{f}$

$\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = k$라 두면 $a = kc,\, b = kd$이다. 관계식을 각각의 직선에 대입하면 두 직선은 평행하고 만나지 않는다. 따라서 연립방정식의 해는 존재하지 않는다. 우리는 이 경우를 '불능(不能)'이라고 한다.

(不能 : (해를 갖는 것이) 가능하지 않다.)

(3) $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$

$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$이므로 두 직선의 기울기가 다르고 두 직선은 한 점에서 만난다. 따라서 연립방정식의 해는 유일하다. 우리는 이 경우를 '한 쌍의 해를 갖는다.'라고 한다.

(1), (2), (3)에서 두 직선이 가질 수 있는 위치관계를 모두 살펴보았다.
(1), (2)에서는 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$이므로 $ad - bc = 0$이고 ②에서 계수행렬 A의 역행렬이 존재하지 않는다. (3)에서는 $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$이므로 $ad - bc \neq 0$이고 ②에서 계수행렬 A의 역행렬이 존재한다.
여기서 내가 말하고 싶은 것은 ②와 같은 행렬식이 문제에서 주어지면 반드시 두 개의 직선으로 해석하고 두 직선간의 위치관계로 조건을 해석하자는 것이다.
더 말할 것 없이 문제를 풀어보자

$ex1)$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, x, y의 연립방정식 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x = y = 0$이외의 해를 가진다.

이 때, 행렬 A의 역행렬의 존재유무를 판단하시오.

해설) 주어진 행렬식은 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이다. 전개하면 $\begin{matrix} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{matrix}$인 연립방정식이고 두 개의 직선이다. 그런데 두 직선을 살펴보니 모두 원점을 지나는 직선이다. 그런데 문제의 조건에서 원점 이외의 해를 가진다고 하였으므로 두 직선은 일치한다. 따라서 계수행렬 A의 역행렬은 존재하지 않는다.

$ex2)$ x, y의 연립방정식 $\begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}$가 $x = y = 0$이외의 해를 가질 때, (a, b)의 자취를 구하시오.

해설) 주어진 행렬식을 정리하면 $\begin{pmatrix} -a-1 & b+1 \\ b-1 & a-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이고 전개하면

$\begin{matrix} -(a+1)x + (b+1)y = 0 \\ (b-1)x + (a-3)y = 0 \end{matrix}$이다. 두 직선은 모두 원점을 지나는 직선인데 원점 이외의 해를 가지려면 두 직선은 일치해야한다. 따라서 $-(a-1)(a-3) - (b+1)(b-1) = 0$이고 정리하면 $(a-2)^2 + b^2 = 2$이다. 따라서 (a, b)의 자취는 중심이 $(2, 0)$이고 반지름이 $\sqrt{2}$인 원이다.

$ex3)$ 두 실수 a,b에 대해 x,y의 연립방정식 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 $x<0,\ y<0$인 해를 가질 때, 다음 중 옳은것을 고르시오.

1. $a+b$의 최솟값은 0

2. $a+b$의 최댓값은 0

3. $a+b$의 최솟값은 2

4. $a+b$의 최댓값은 2

5. $a+b$의 최솟값은 4

해설) 주어진 행렬식은 $\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & b-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이다. 전개하면 $\begin{matrix} (a-1)x+y=0 \\ x+(b-1)y=0 \end{matrix}$이다.
마찬가지로 두 직선은 모두 원점을 지난다. 그런데 $x,y<0$인 해를 가진다고 하는 것은 원점 이외의 해가 있다는 말이므로 두 직선은 일치한다. 하지만 여기서 우리는 한 가지를 더 알 수 있다. 제3사분면에서 해를 가져야한다. 따라서 일치하는 두 직선의 기울기가 양수가 되어야 한다. 두 조건을 모두 정리하면 $a,b<1,\ (a-1)(b-1)-1=0$이다. 주어진 조건을 ab평면에 나타내면 분수함수의 일부가 나타날 것이다. 이 때 $a+b=k$라 두면 분수함수에 주어진 직선이 접할 때 k의 값이 최댓값을 가진다. 분수함수와 직선을 연립하여 이차식을 만든 뒤 판별식을 이용하면 $k\le 0$이 되므로 답은 2번이다.

실전문제

(05년 06월 평가원)

1. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$는 $A=100A^{-1}$을 만족시킨다.

   점 P가 나타내는 도형의 둘레의 길이를 a라 할 때, $\dfrac{a}{\pi}$의 값을 구하시오.

   (단, A^{-1}은 A의 역행렬이다.)

(12년 06월 평가원)

2. 집합 S가 $S=\{M \mid M$은 이차정사각행렬이고 $M^2=M\}$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in S$

ㄴ. $A \in S$이고 A의 역행렬이 존재하면 $A=E$이다.

ㄷ. $A+E \in S$이면 $A^4 \in S$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(06년 수능)

3. 이차정사각행렬 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $D(X)=ad-bc$라 하자. 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix}$에 대하여 $D(A^2)=D(5A)$를 만족시키는 모든 상수 p의 합을 구하시오.

(08년 수능)

4. 집합 U를 $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,\ b,\ c,\ d\text{는 1이 아닌 양수}\right\}$라 하자. U의 부분집합 S를

$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \log_a d=\log_b c,\ a\neq b,\ bc\neq 1\right\}$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$이면 $A\in S$이다.

ㄴ. $A\in U$이고 A가 역행렬을 가지면 $A\in S$이다.

ㄷ. $A\in S$이면 A는 역행렬을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(10년 07월 교육청)

5. 좌표평면 위에서 부등식 $x^2+y^2<1$을 만족하는 영역에 존재하는 임의의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 행렬 $M=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$라 하자. 행렬 $M+kE$의 역행렬이 항상 존재하기 위한 양수 k의 최솟값은?

(단, E는 단위행렬이다.)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2

④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4