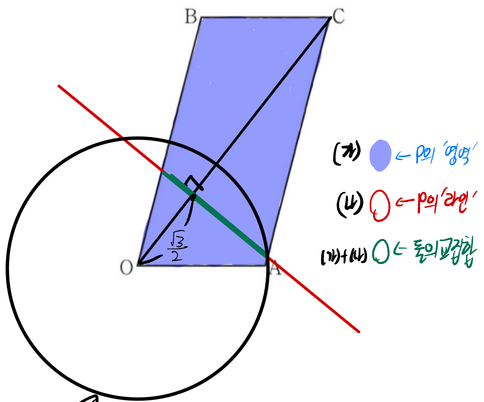
29. 좌표평면에서 $\overline{OA} = \sqrt{2}$, $\overline{OB} = 2\sqrt{2}$ 이고 $\cos(\angle AOB) = \frac{1}{4}$ 인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ $(0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 1)$
(나) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M \times m = a\sqrt{6} + b$일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]



X 라인

(가)에서 P의 영역
$= \square OABC$

$\vec{op} \cdot \vec{oB} + (\vec{op} - \vec{oB})\vec{BC} = 2$

$\to \vec{op}(\vec{oB} + \vec{BC}) - \vec{oB} \cdot \vec{BC} = 2$

$\to \vec{op} \cdot \vec{oc} = 3$

$|\vec{oc}| = 2\sqrt{3}$

$\vec{ox}$ = 원 vec → 구할필요X

$|3\vec{op} - \vec{ox}|$ 최댓값은

$3|\vec{op}|$ + 원의 반지름,

최솟값은

$3|\vec{op}|$ - 원의 반지름

① 영역잡기
② 라인따기
③ 원벡터활용

⇒ 알수있는 것은 ①, ②, ③ 각각은 너무 쉽다는거, 기출한번 돌린 초심자도 풀기 쉽다 문제는 엮어서 나온다는거...

계속 고민했다...

어떻게 해야지 이 칼럼을 보는 사람들이 도움을 받아갈수있을까?

내가 쓰는 기술들을 주구창창 설명할까? → X 나보다 강사가 더 잘가르침

내가 푼 기출들을 늘어놓을까? → △ 내 풀이가 몸에 안맞으면 역효과

그래서 내린 결론은 막혔을때 해야하는 행동강령을

적어두자! 다...

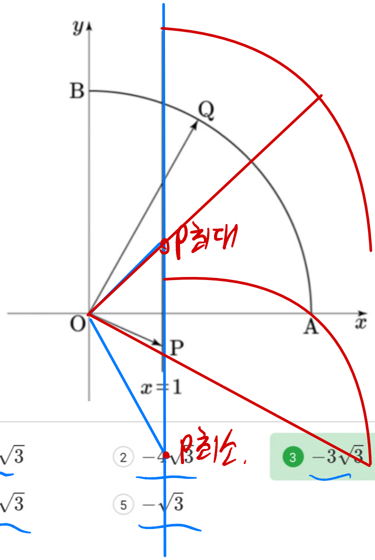
살면서 기출분석을 한번도 해 본적 없었는데

수능끝나고... 롤도 멈추고... 평가원 문제를 42 문제를

풀었다...

그렇게 이틀... 뭔가 눈에 잡히기 시작했다

좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(3,0), \mathrm{B}(0,3)$과 직선 $x=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,a)$가 있다. 점 Q가 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위를 움직일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$의 최댓값을 $f(a)$라 하자. $f(a)=5$가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.)



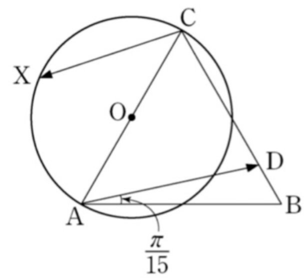
① $-5\sqrt{3}$ ② $-4\sqrt{3}$ ③ $-3\sqrt{3}$ ④ $-2\sqrt{3}$ ⑤ $-\sqrt{3}$

발문이 전부 음수

→ $a<0$인 경우 있다...

그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC 와 선분 AC 를 지름으로 하는 원 O 가 있다. 선분 BC 위의 점 D 를 $\angle\mathrm{DAB}=\frac{\pi}{15}$ 가 되도록 정한다. 점 X 가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{CX}}$ 의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 X 를 점 P 라 하자. $\angle\mathrm{ACP}=\frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



정답 정답은 **17** 입니다

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}=\overbrace{\overrightarrow{AD}}^{\text{고정}}\underbrace{(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OX})}_{\text{유동}}$$

위의 두문제의 특징은 최대, 최소 를 구할때 원벡터를 사용하게끔 "유도"했다는 것이다. 왼쪽은 동점 2개이고 오른쪽은 동점 1개로 풀이 방법이 아예 다르다.

여기서 생기는 의문.

평벡의 최대최소 문제는 원 vec이 무조건 있는가?

1

좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(2,0), \mathrm{B}(0,2), \mathrm{C}(-2,0), \mathrm{D}(0,-2)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}})(\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = 0$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \geq -2$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \geq 0$이다.

(다) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \geq -2$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \leq 0$이다.

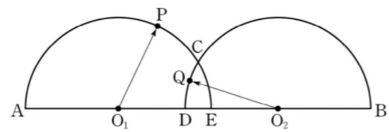
점 $\mathrm{R}(4,4)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{RP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

정답 | 정답은 **48** 입니다

2

그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{DB}} = 2$ 인 두 점 D, E 가 있다. 두 선분 AE, DB 를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB 가 만나는 점을 C 라 하고, 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{O_1A}} = \overline{\mathrm{O_2B}} = 1$인 두 점을 $\mathrm{O_1}, \mathrm{O_2}$ 라 하자. 호 AC 위를 움직이는 점 P 와 호 DC 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}} + \overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}|$ 의 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 일 때, 선분 AB 의 길이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

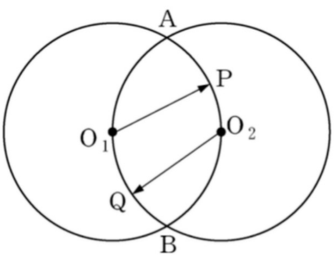
(단, $1 < \overline{\mathrm{O_1O_2}} < 2$이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



정답 | 정답은 **19** 입니다

3

평면 위의 두 점 $\mathrm{O_1}, \mathrm{O_2}$ 사이의 거리가 1 일 때, $\mathrm{O_1}, \mathrm{O_2}$ 를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1 인 두 원의 교점을 A, B 라 하자. 호 $\mathrm{AO_2B}$ 위의 점 P 와 호 $\mathrm{AO_1}B$ 위의 점 Q 에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}, \overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$ 의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?



① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 1

4

좌표평면 위에 $\overline{\mathrm{AB}} = 5$인 두 점 A,B를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 두 원을 각각 $\mathrm{O_1}, \mathrm{O_2}$라 하자. 원 $\mathrm{O_1}$ 위의 점 C와 원 $\mathrm{O_2}$ 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle \mathrm{CAB}) = \frac{3}{5}$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 30$이고 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}| < 9$이다.

선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값이 $a + b\sqrt{74}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 유리수이다.)

정답 | 정답은 **31** 입니다

5

좌표평면에서 곡선 $C : y = \sqrt{8-x^2}\ (2 \leq x \leq 2\sqrt{2})$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}} = 2, \angle \mathrm{POQ} = \frac{\pi}{4}$를 만족시키고 직선 OP의 아랫부분에 있는 점을 Q라 하자.

점 P가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OX}} + \overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자.

영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 최댓값과 최솟값의 합이 $a + b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.(단, O는 원점이고, a와 b는 유리수이다.)

정답 | 정답은 **24** 입니다

6

좌표평면에서 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1 인 원 위의 한 점을 A, 중심이 O 이고 반지름의 길이가 3 인 원 위의 한 점을 B 라 할 때, 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$

(나) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 = 20$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ 의 최솟값은 m 이고 이때 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = k$ 이다. $m + k^2$ 의 값을 구하시오.

정답 | 정답은 **7** 입니다

놀랍게도 모두 원vec를 사용해야한다. !!

어떤문제는 동점이 2개여서 역벡전개를 해야하기도 했고

동점이 1개여서 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{MB}|^2$를
정점 2개

쓰기도 하는 등 풀이 방법은 천차만별이다

그런데도 결론은 원vec로 귀결, 아니 "유도"된다.

지금까지 내가 풀면서도 왜 알아 차리지 못했나 싶을정도로

억측이 아닐까? 싶을정도였다. 2017, 18, 19, 21 에서

나온 "어려운 평면vec"는 전부 "최대, 최소"를 구하는

문제였다.

무슨 말을 하려는지 눈치 챘나?

앞으로 여러분이 29, 30을 풀면서 평면vec가

막힌다면 원벡터가 나오게끔 조작해라

다음은 자작문제다. 올해 파급N제에도 들어갈 예정인
사실 유료인 문제다 (사장님 봐주세요...) 눈물을 머금고 올리는거니

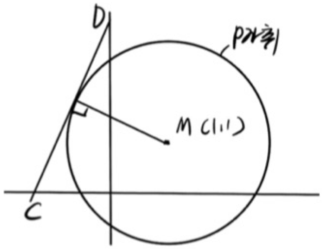
원벡터를 의식하면서 풀어봐라

2. 좌표평면 위의 네 점 $A(0,2), B(2,0), C(-\sqrt{3},0), D(0,3)$에 대하여 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = k$를 만족하는 점 P가 $\overline{CD}$ 위에 오직 하나 있도록 하는 k값의 범위는 $k=\gamma$ 또는 $p<k\leq q$이다. $p+2q-4r$의 값을 구하여라.

답) 10

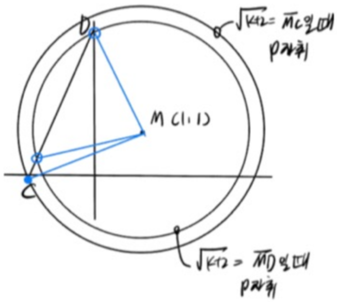
해설) $\overline{AB}$의 중점을 $M(1,1)$이라하면 $\overrightarrow{PA} \bullet \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{MB}|^2 = |\overrightarrow{PM}|^2 - 2 = k$이다.
따라서 $|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{k+2}$이다. 즉, 동점$P$는 $M(1,1)$을 중심으로 하는 반지름이 $\sqrt{k+2}$인 원 위의 점이다. 이 동점P가 $\overline{CD}$위에 오직 하나 있기 위해선

① $\overline{CD}$와 원이 접할 때,



M과 $\overline{CD}$ 사이거리$\rightarrow \sqrt{3}x - y + 3 = 0$과 $(1,1)$사이 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{k+2}$와 같아야 하므로
$\sqrt{k+2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1,\ k = \sqrt{3} - \dfrac{1}{4} = \gamma$이다.

② $\overline{MD} < \sqrt{k+2} \le \overline{MC}$일 때. $(\because |\overline{MC}| > |\overline{MD}|)$



$\overline{MD} \ge \sqrt{k+2} > \gamma$이면 가능한 P의 개수가 2이므로
$\sqrt{k+2} > \overline{MD} = \sqrt{5}$이고
$\overline{MC} < \sqrt{k+2}$이면 가능한 P의 개수가 0이므로
$\sqrt{k+2} \le \overline{MC} = \sqrt{5+2\sqrt{3}}$
즉, $3 < k \le 3 + 2\sqrt{3}$이어야 조건 성립한다.
$p = 3,\ q = 3 + 2\sqrt{3}$이다.

$\therefore p + 2q - 4r = 10$

원을 의식했다면 문제의 갈피를 잡았을거다.

여기서 이런 질문을 할수있다

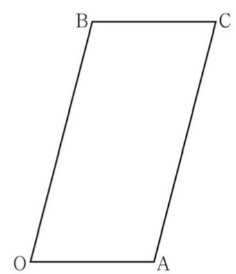
Q. 벡터가 많을때는 문제 풀때 자꾸 막혀요.

A. 발문을 봐라 출제자는 힌트를 던져준다. 다시 처음문제를 보자

29. 좌표평면에서 $\overline{OA}=\sqrt{2}$, $\overline{OB}=2\sqrt{2}$ 이고 $\cos(\angle AOB)=\frac{1}{4}$ 인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ $(0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$
(나) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}=2$

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]



(나)에서 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{BP}$를 어떻게 처리해야할지 막힐수있다. (본인도 수능때 막혔었다)

근데 $\overrightarrow{OP}$를 언급을 3번이나 했다.

→ $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}$로 나누는게 합리적이다.

결론 : ① 발문을 유심히 봐라. 분명 힌트가 있다.

② 원벡터를 항상고려하라. 킬러. 최대최소는 항상 특이한 vec가 있고 기하는 99% 원vec이다.

③ 기하 킬러문제는 쉬운문제를 여러개 엮어놓은 문제다. 차근차근 하게 풀어라

오늘 주제는 연습이 상당히 필요하다. 특히 기출을 잘활용하자.
위에 기출 6개를 다시 올리겠다. 한번 풀어보자

①

좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(2,0), \mathrm{B}(0,2), \mathrm{C}(-2,0), \mathrm{D}(0,-2)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

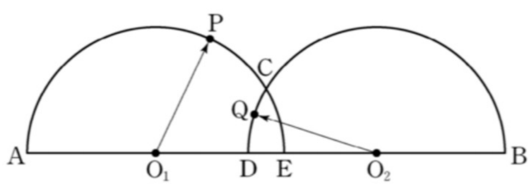
(가) $(\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}})(\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = 0$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \geq -2$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \geq 0$이다.
(다) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \geq -2$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \leq 0$이다.

점 $\mathrm{R}(4,4)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{RP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

정답	정답은 **48** 입니다

②

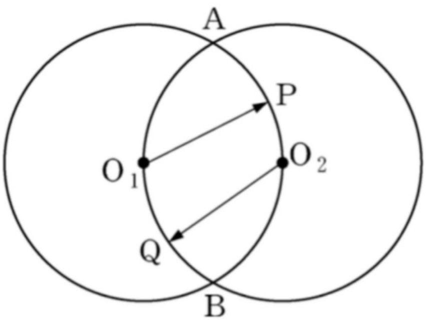
그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{DB}} = 2$ 인 두 점 D, E 가 있다. 두 선분 AE, DB 를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB 가 만나는 점을 C 라 하고, 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{O_1A}} = \overline{\mathrm{O_2B}} = 1$인 두 점을 $\mathrm{O_1}, \mathrm{O_2}$ 라 하자.
호 AC 위를 움직이는 점 P 와 호 DC 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}} + \overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}|$ 의 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 일 때, 선분 AB 의 길이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, $1 < \overline{\mathrm{O_1O_2}} < 2$이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



정답	정답은 **19** 입니다

3

평면 위의 두 점 $\mathrm{O_1, O_2}$ 사이의 거리가 1 일 때, $\mathrm{O_1, O_2}$ 를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1 인 두 원의 교점을 A, B 라 하자. 호 $\mathrm{AO_2B}$ 위의 점 P 와 호 $\mathrm{AO_1}B$ 위의 점 Q 에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}, \overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$ 의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?



① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 0

④ $\frac{1}{4}$　⑤ 1

4

좌표평면 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=5$인 두 점 A,B를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 두 원을 각각 $\mathrm{O_1, O_2}$라 하자. 원 $\mathrm{O_1}$ 위의 점 C와 원 $\mathrm{O_2}$ 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle \mathrm{CAB})=\frac{3}{5}$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}=30$이고 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|<9$이다.

선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{74}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 유리수이다.)

정답	정답은 **31** 입니다

5

좌표평면에서 곡선 $C : y = \sqrt{8-x^2}\ (2 \leq x \leq 2\sqrt{2})$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}} = 2, \angle \mathrm{POQ} = \frac{\pi}{4}$를 만족시키고 직선 OP의 아랫부분에 있는 점을 Q라 하자.

점 P가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OX}} + \overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자.

영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 최댓값과 최솟값의 합이 $a + b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.(단, O는 원점이고, a와 b는 유리수이다.)

정답	정답은 **24** 입니다

6

좌표평면에서 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1 인 원 위의 한 점을 A , 중심이 O 이고 반지름의 길이가 3 인 원 위의 한 점을 B 라 할 때, 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$
(나) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 = 20$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ 의 최솟값은 m 이고 이때 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = k$ 이다. $m + k^2$ 의 값을 구하시오.

정답	정답은 **7** 입니다