제 3 교 시

2013학년도 육군사관학교 1차 선발시험 문제지

수 리 영 역

이 과

성명	

수험번호							

- ○ 먼저 문제지에 성명과 수험번호를 기입하시오.
- ○ 답안지에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- ○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- ○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 0이 포함된 경우에는 0을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

육 군 사 관 학 교

1. $\sqrt[6]{9^5}\times 24^{-\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ 3

2. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{(2x-\pi)^2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

3. 곡선 $x^2+xy+y^2=7$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는? [2점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ -1 ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ 의 값은? [3점]

① $\pi+1$ ② $\pi+2$ ③ $\pi+3$
④ $\pi+4$ ⑤ $\pi+5$

5. 정규분포 $N(50, 10^2)$을 따르는 모집단에서 임의로 25개의 표본을 뽑았을 때의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $P(48 \le \overline{X} \le 54)$의 값을 구한 것은? [3점]

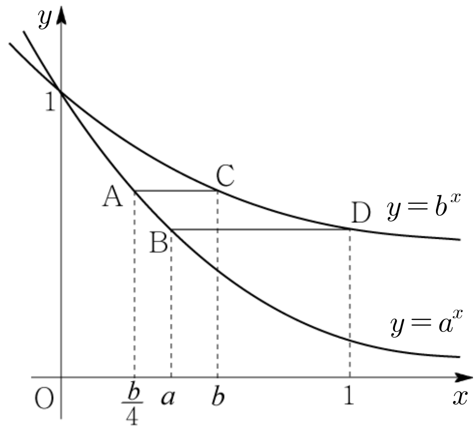
z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745
④ 0.8185 ⑤ 0.9104

6. 어느 인터넷 동호회에서 한 종류의 사은품 10개를 정회원 2명, 준회원 2명에게 모두 나누어 주려고 한다. 정회원은 2개 이상, 준회원은 1개 이상을 받도록 나누어 주는 방법의 수는? (단, 사은품은 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

7. 그림과 같이 $0<a<b<1$인 두 실수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $\frac{b}{4}$, a이고, 곡선 $y=b^x$ 위의 두 점 C, D의 x좌표는 각각 b, 1이다. 두 선분 AC와 BD가 모두 x축과 평행할 때, a^2+b^2의 값은? [3점]



① $\frac{7}{16}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{9}{16}$

④ $\frac{5}{8}$

⑤ $\frac{11}{16}$

8. 어느 지역에 서식하는 어떤 동물의 개체 수에 대한 변화를 조사한 결과, 지금으로부터 t년 후에 이 동물의 개체 수를 N이라 하면 등식

$$\log N = k + t\log\frac{4}{5} \quad (\text{단, } k\text{는 상수})$$

가 성립한다고 한다. 이 동물의 현재 개체 수가 5000일 때, 개체 수가 처음으로 1000보다 적어지는 때는 지금으로부터 n년 후이다. 자연수 n의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$으로 계산한다.) [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

9. 행렬 $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환에 의하여 점 $\mathrm{A}(1, 2)$가 옮겨지는 점을 B, 행렬 M^3으로 나타내어지는 일차변환에 의하여 점 $\mathrm{C}(2, 0)$이 옮겨지는 점을 D라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $-\frac{1}{2}$

④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 두 실수 x, y $(x>y)$가 $x+y=1$, $xy=-1$을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$을

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^{k-1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

으로 정의하자. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 제 n항을 구하는 과정이다.

> $x+y=1$, $xy=-1$에서 두 실수 x, y는 방정식
>
> $$t^2-t+\boxed{\text{(가)}}=0$$
>
> 의 두 근이다. 한편
>
> $$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^{k-1} \\ &= x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1} \quad \cdots\cdots(*) \end{aligned}$$
>
> (*)은 첫째항이 x^{n-1}이고 공비가 $\dfrac{y}{x}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이므로
>
> $$a_n=\frac{\boxed{\text{(나)}}}{\sqrt{5}}$$

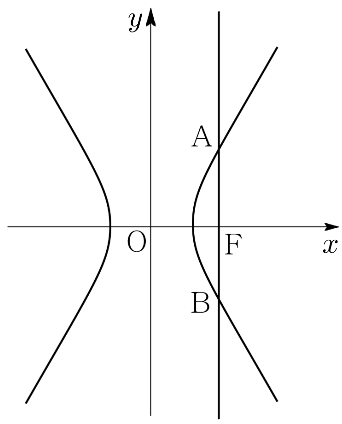
위의 과정에서 (가)에 들어갈 수를 m, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $m+\{f(3)\}^2$의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

11. 포물선 $y^2=8x$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=3:1$일 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① $\frac{26}{3}$ ② $\frac{28}{3}$ ③ 10 ④ $\frac{32}{3}$ ⑤ $\frac{34}{3}$

12. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점 $\mathrm{F}(c,0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}\,c$일 때, a와 b 사이의 관계식은? (단, $a>0$, $b>0$, $c>0$) [3점]



① $a=b$
② $a=\sqrt{2}\,b$
③ $2a=3b$
④ $a=\sqrt{3}\,b$
⑤ $a=2b$

13. 모든 실수 x에서 정의된 함수

$$f(x)=2\sin 2x+4\sin x-4\cos x+1$$

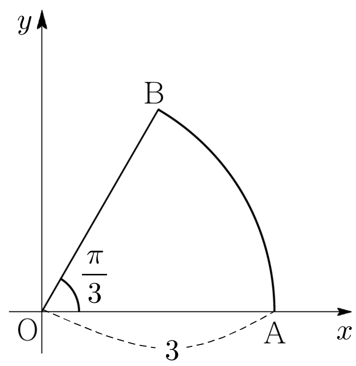
의 최댓값과 최솟값의 합은? [3점]

① $4-4\sqrt{2}$　② $4-3\sqrt{2}$　③ $4-2\sqrt{2}$　④ $5-2\sqrt{2}$　⑤ $5-\sqrt{2}$

14. 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)=\int_1^x (x^2-t)\,dt$에 대하여 직선 $y=6x-k$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\frac{11}{2}$　② $\frac{13}{2}$　③ $\frac{15}{2}$　④ $\frac{17}{2}$　⑤ $\frac{19}{2}$

15. 그림과 같이 좌표평면에서 원점 O와 점 A$(3, 0)$을 잇는 선분 OA를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB가 있다. 일차변환 f를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}$일 때, 일차변환 f에 의하여 부채꼴 OAB가 옮겨진 도형을 D라 하자. 도형 D의 내부와 부채꼴 OAB의 내부의 공통부분을 나타내는 도형을 E_1이라 하고, 일차변환 f에 의하여 도형 E_1이 옮겨진 도형을 E_2라 하자. 두 도형 E_1, E_2의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, S_1+S_2의 값은? [4점]



① $\frac{3}{8}\pi$

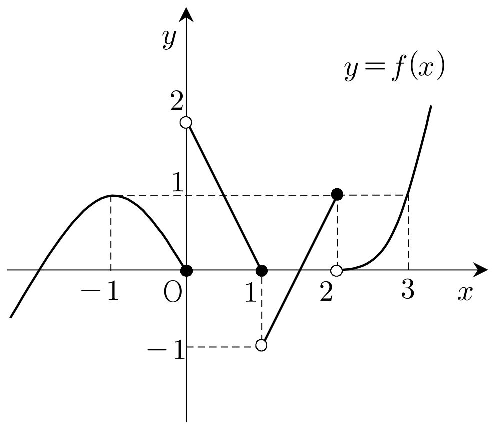
② $\frac{7}{16}\pi$

③ $\frac{1}{2}\pi$

④ $\frac{9}{16}\pi$

⑤ $\frac{5}{8}\pi$

16. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x-1)$은 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 불연속이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 세 이차정사각행렬 A, B, C가 $(AB)^2 = A^2B^2$, $BA = AC$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $B^2A = AC^2$

ㄴ. B의 역행렬이 존재하면 $A^2B = A^2C$이다.

ㄷ. AC의 역행렬이 존재하면 $B = C$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하기 위한 필요충분조건인 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2}$의 값이 존재한다.

ㄴ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^3) - f(a)}{h^3}$의 값이 존재한다.

ㄷ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

19. 닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{\sin 2x}{1+\sin x}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x) \geq 0$

ㄴ. $f'(c)=0$인 c가 열린 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $2-2\ln 2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

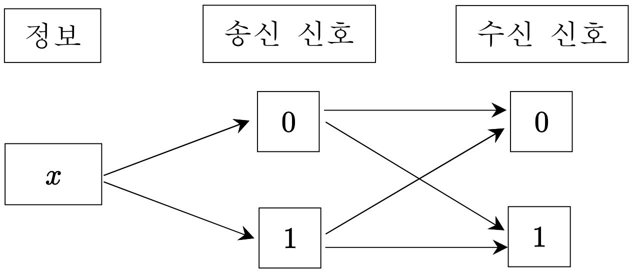
20. $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{(\ln x)^6}{x^2}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^6}{x^2}=0$이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $x=e^3$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. $x=e$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. $x>0$에서 방정식 $f(x)=1$의 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림은 어떤 정보 x를 0과 1의 두 가지 중 한 가지의 송신 신호로 바꾼 다음 이를 전송하여 수신 신호를 얻는 경로를 나타낸 것이다.



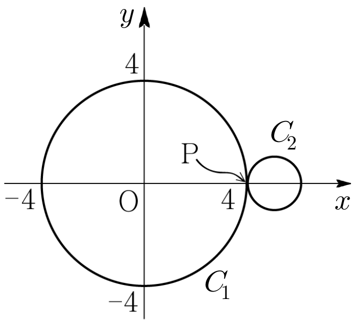
이때 송신 신호가 전송되는 과정에서 수신 신호가 바뀌는 경우가 생기는 데, 각각의 경우에 따른 확률은 다음과 같다.

(가) 정보 x가 0, 1의 송신 신호로 바뀔 확률은 각각 0.4, 0.6이다.
(나) 송신 신호 0이 수신 신호 0, 1로 전송될 확률은 각각 0.95, 0.05이다.
(다) 송신 신호 1이 수신 신호 0, 1로 전송될 확률은 각각 0.05, 0.95이다.

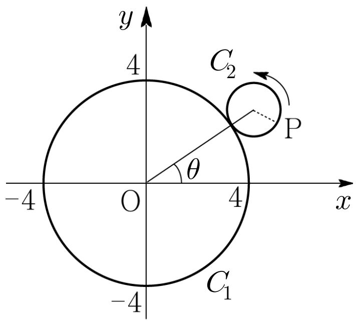
정보 x를 전송한 결과 수신 신호가 1이었을 때, 송신 신호가 1이었을 확률은? [4점]

① $\frac{54}{59}$ ② $\frac{55}{59}$ ③ $\frac{56}{59}$ ④ $\frac{57}{59}$ ⑤ $\frac{58}{59}$

22. [그림 1]과 같이 좌표평면 위에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 큰 원 C_1과 반지름의 길이가 1인 작은 원 C_2가 점 $(4, 0)$에서 외접하고 있다. 이때 작은 원 위의 한 점을 P라 하자. [그림 2]와 같이 원 C_2가 원 C_1에 접한 상태로 굴러갈 때, 두 원의 중심을 연결한 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하자. θ의 값이 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변할 때, 점 $(4, 0)$에서 출발한 점 P가 움직인 거리는? [4점]



[그림 1]



[그림 2]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

23. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

(가) $a_1=0,\ b_1=2$
(나) n이 짝수이면 $a_n=a_{n-1}+\dfrac{b_{n-1}}{n},\quad b_n=b_{n-1}-\dfrac{b_{n-1}}{n}$이다.
(다) n이 1보다 큰 홀수이면 $a_n=a_{n-1}-\dfrac{a_{n-1}}{n},\quad b_n=b_{n-1}+\dfrac{a_{n-1}}{n}$이다.

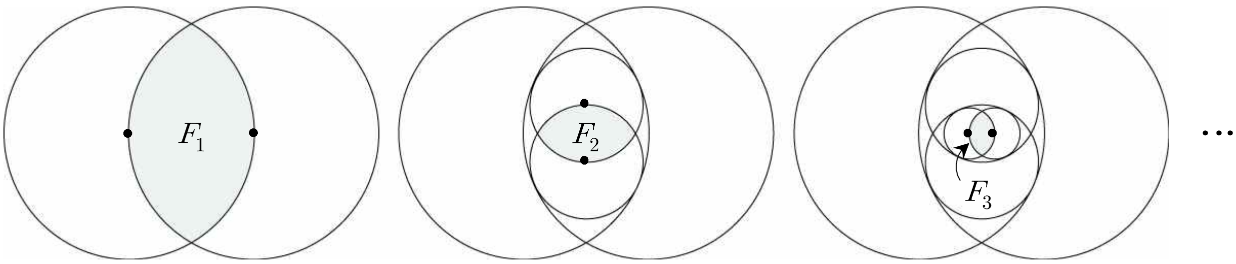
$a_{41}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

① 79 ② 80 ③ 81 ④ 82 ⑤ 83

24. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 두 원을 서로의 중심을 지나도록 그렸을 때, 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_1이라 하자.

F_1의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_1과 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_2라 하자.

F_2의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_2와 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_3이라 하자.



이와 같은 방법으로 계속하여 도형 F_n을 그려 나갈 때, F_n의 둘레의 길이를 l_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]

① $2\pi(1+\sqrt{7})$　② $\frac{8\pi}{3}(1+\sqrt{7})$　③ $\frac{4\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

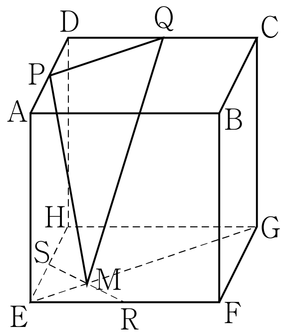
④ $2\pi(2+\sqrt{7})$　⑤ $\frac{5\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

25. 분수방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-12}=\frac{2}{5}$ 의 모든 실근의 합을 구하시오. [3점]

26. 좌표공간 위의 점 A$(4,\ 6,\ 7)$에서 두 점 B$(1,\ -1,\ 2)$, C$(5,\ -3,\ 8)$을 지나는 직선까지의 거리를 d라 할 때, d^2의 값을 구하시오. [3점]

27. 두 곡선 $y=\ln x+3$, $y=\ln\frac{1}{x}+3$과 직선 $x=e$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는 V이다. $\frac{V}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같은 정육면체 ABCD−EFGH에서 네 모서리 AD, CD, EF, EH의 중점을 각각 P, Q, R, S라 하고, 두 선분 RS와 EG의 교점을 M이라 하자. 평면 PMQ와 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan^2\theta+\sec^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]



29. 다음과 같이 두 수 0과 1만을 사용하여 제 n행에 n자리의 자연수를 크기순으로 모두 나열해 나간다. ($n=1, 2, 3, \cdots$)

제 1 행	1
제 2 행	10, 11
제 3 행	100, 101, 110, 111
제 4 행	1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111
$\cdots$	$\cdots$

제 n행에 나열한 모든 수의 합을 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2=21$, $a_3=422$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{20^n}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $g(1)=2$
(나) 모든 실수 x, y에 대하여 $f(xy+1)=xg(y)+h(x+y)$이다.

이때 $\int_0^3 \{f(x)+g(x)+h(x)\}\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

제 3교시

2014학년도 해군사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

B형

성명	

수험번호							

○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 먼저 문제지에 성명과 수험번호를 기입하시오.

○ 답안지에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 0이 포함된 경우에는 0을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

해 군 사 관 학 교

1. $\log_2(4\sqrt{2}-\sqrt{10})-\log_2(4-\sqrt{5})$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^3-1}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

3. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|3\vec{a}-2\vec{b}|=6$일 때, 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 1008, 1233과 같이 각 자리의 숫자의 합이 9인 네 자리의 자연수의 개수는? [3점]

① 165 ② 170 ③ 175 ④ 180 ⑤ 185

5. 주머니 속에 1, 2, 3, 4, 5의 수가 각각 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 적힌 수를 확인하고 다시 집어넣는 시행을 한다. 이와 같은 시행을 25회 반복할 때, 꺼낸 3개의 공에 적힌 수들 중 두 수의 합이 나머지 한 수와 같은 경우가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 X^2의 평균 $\mathrm{E}(X^2)$의 값은? [3점]

① 102 ② 104 ③ 106 ④ 108 ⑤ 110

6. $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$인 두 수 α, β가

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{3}+1}{4},\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\cos(3\alpha+\beta)$의 값은? [3점]

① -1 ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 0

[7~8] 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_n=\int_0^n f(x)\,dx,\ b_n=\int_{n-1}^n g(x)\,dx\quad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

7번과 8번의 두 물음에 답하시오.

7. $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=f(x)+1$일 때, a_3+b_4의 값은? [3점]

① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$ ④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

8. $f(x)=g(x)$이고 $b_n=2n+3$일 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 110 ② 120 ③ 130 ④ 140 ⑤ 150

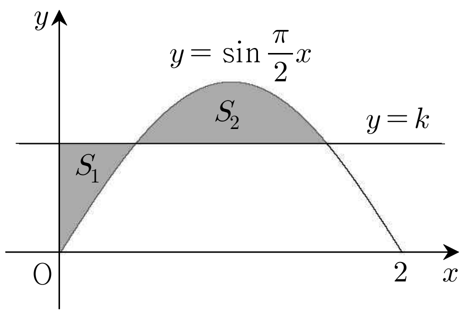
9. 모든 실수 x에서 미분가능하고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=4$$

가 성립한다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{x\to3}\frac{g(g(x))-1}{x-3}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

10. 그림과 같이 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$ $(0\le x\le 2)$와 직선 $y=k$ $(0<k<1)$가 있다. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$와 직선 $y=k$, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_2=2S_1$일 때, 상수 k의 값은? [3점]



① $\frac{1}{2\pi}$ ② $\frac{1}{\pi}$ ③ $\frac{3}{2\pi}$ ④ $\frac{2}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{2\pi}$

11. 수직선 위의 원점에 위치한 점 A가 있다. 주사위 1개를 던질 때 3의 배수의 눈이 나오면 점 A를 양의 방향으로 3만큼 이동하고, 그 이외의 눈이 나오면 점 A를 음의 방향으로 2만큼 이동하는 시행을 한다. 이와 같은 시행을 72회 반복할 때, 점 A의 좌표를 확률변수 X라 하자. 확률 $\mathrm{P}(X \geq 11)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.00	0.3413
1.25	0.3944
1.50	0.4332
1.75	0.4599
2.00	0.4772

① 0.0228 ② 0.0401 ③ 0.0668
④ 0.1056 ⑤ 0.1587

12. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2 - A = O,\ A - B = E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $AB = O$
ㄴ. $A \neq E$이면 A의 역행렬은 존재하지 않는다.
ㄷ. $A + B$의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 곡선 $x^2+(y-1)^2=1$ $(y \geq 1)$과 두 직선 $x=-1$, $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? [3점]

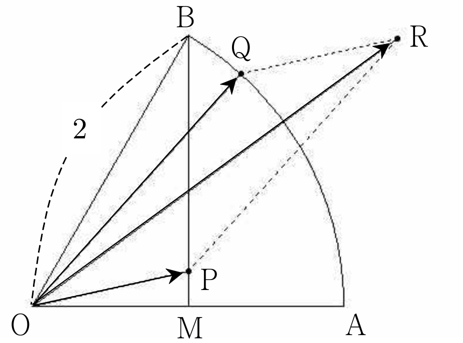
① $\frac{1}{2}\pi^2+\frac{5}{3}\pi$　② $\frac{1}{2}\pi^2+\frac{10}{3}\pi$　③ $\pi^2+\frac{5}{3}\pi$

④ $\pi^2+\frac{10}{3}\pi$　⑤ $2\pi^2+\frac{5}{3}\pi$

14. 두 함수 $f(x)=e^x(x^2+ax+b)$, $g(x)=e^{-x}(x^2+ax+b)$는 각각 $x=-3$, $x=2$에서 극댓값을 갖는다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 극솟값을 각각 m_1, m_2라 할 때, m_1+m_2의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $-2e$　② $-e-1$　③ 0　④ $e-1$　⑤ $2e$

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OA의 중점을 M이라 하자. 점 P는 두 선분 OM과 BM 위를 움직이고, 점 Q는 호 AB 위를 움직인다. $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 R가 나타내는 영역 전체의 넓이는? [4점]



① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{3}$

16. 첫째항이 -8인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{n+1}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=2^{n+1}(n^2+n+2)\ (n\ge 1)$$

이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

> 주어진 식에 의하여
>
> $$a_n-2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}=2^n(n^2-n+2)\ \ (n\ge 2)$$
>
> 이다. 따라서 2 이상의 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1}-a_n-\frac{2}{n}a_n=\boxed{\text{(가)}}$$
>
> 이므로
>
> $$a_{n+1}-\frac{n+2}{n}a_n=\boxed{\text{(가)}}$$
>
> 이다. $b_n=\dfrac{a_n}{n(n+1)}$이라 하면
>
> $$b_{n+1}-b_n=\boxed{\text{(나)}}\ \ (n\ge 2)$$
>
> 이고, $b_2=0$이므로
>
> $$b_n=\boxed{\text{(다)}}\ \ (n\ge 2)$$
>
> 이다.
>
> ⋮

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\dfrac{f(4)}{g(5)}+h(6)$의 값은? [4점]

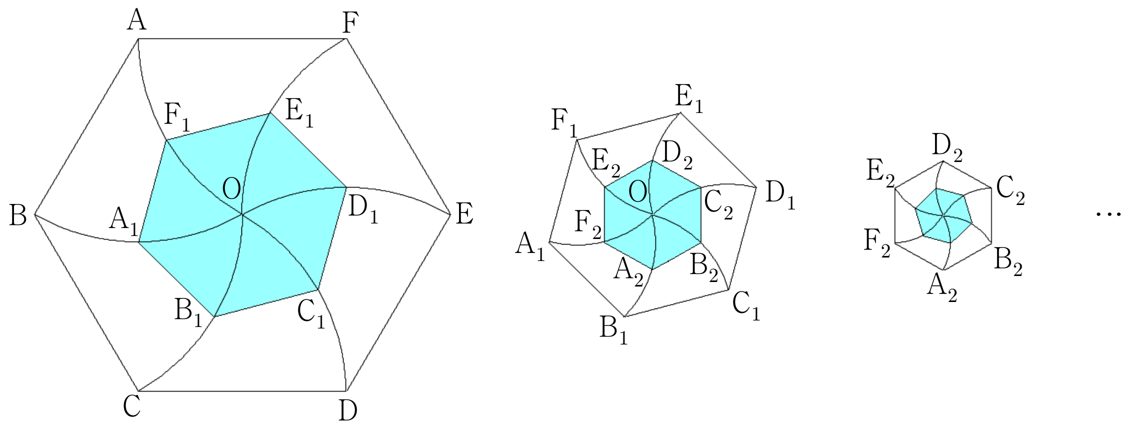
① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

17. 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 길이가 2인 대각선의 교점을 O라 하자. 그림과 같이 꼭짓점 A, B, C, D, E, F를 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 $60°$만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1이라 하자.

정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$에서 꼭짓점 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1을 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 $60°$만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2라 하자.

정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$에서 꼭짓점 A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2를 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 $60°$만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정육각형 $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



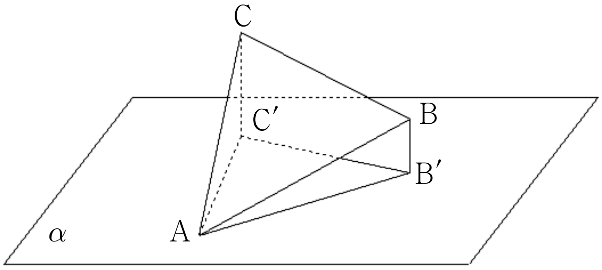
① $\frac{7-3\sqrt{3}}{4}$　② $\frac{7-2\sqrt{3}}{4}$　③ $\frac{9-4\sqrt{3}}{4}$

④ $\frac{9-3\sqrt{3}}{4}$　⑤ $\frac{9-2\sqrt{3}}{4}$

18. $0 \le x \le \pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x+2}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=\pi$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. S_1+S_2의 값은? [4점]

① $\ln\dfrac{3}{2}$　② $\ln\dfrac{4}{3}$　③ $2\ln\dfrac{3}{2}$　④ $2\ln\dfrac{4}{3}$　⑤ $4\ln\dfrac{3}{2}$

19. 그림과 같이 평면 α와 한 점 A에서 만나는 정삼각형 ABC가 있다. 두 점 B, C의 평면 α 위로의 정사영을 각각 B′, C′이라 하자. $\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{B'C'}}=2$, $\overline{\mathrm{C'A}}=\sqrt{3}$일 때, 정삼각형 ABC의 넓이는? [4점]



① $\sqrt{3}$
② $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$
③ $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$
④ $\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$
⑤ $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$

20. 함수 $f(x)=x\sin x$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. 직선 $y=x$는 곡선 $y=f(x)$에 접한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖는 a가 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$에 존재한다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x) = e^x - 1$ 이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = -f(x) + e - 1$이다.

$\int_0^3 f(x)\, dx$의 값은? [4점]

① $2e-3$ ② $2e-1$ ③ $2e+1$
④ $2e+3$ ⑤ $2e+5$

22. 좌표평면에서 x축에 대한 대칭변환을 f, 원점을 중심으로 $60°$만큼 회전하는 회전변환을 g라 하자. 일차변환 $(g \circ f)^{-1}$을 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ b & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$이라 할 때, $100(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. [3점]

23. 표는 어느 학교의 두 동아리 A, B의 남학생 수와 여학생 수를 나타낸 것이다.

구분 / 동아리	남학생(명)	여학생(명)	합계(명)
A	8	16	24
B	12	12	24

다음은 여름방학이 지난 후 두 동아리 A, B의 변동된 학생 수에 대한 설명이다.

(가) 동아리 A에서는 남학생 x명이 새로 가입하여 동아리 A의 학생 중에서 남학생의 비율이 y%가 되었다.
(나) 동아리 B에서는 여학생 x명이 탈퇴하여 동아리 B의 학생 중에서 남학생의 비율이 $(y+25)$%가 되었다.

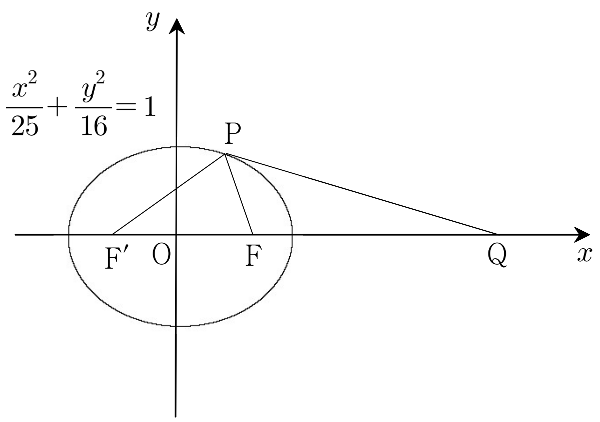
$x+y$의 값을 구하시오. [3점]

24. 한 모서리의 길이가 $6\sqrt{6}$인 정사면체 ABCD에 대하여 등식

$$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PA}$$

를 만족시키는 점 P가 있다. 삼각형 BCD의 무게중심을 G라 할 때, 선분 PG의 길이를 구하시오. [3점]

25. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점을 각각 F, F′이라 하자. 타원 위의 한 점 P와 x축 위의 한 점 Q에 대하여 $\overline{PF}:\overline{PF'}=\overline{QF}:\overline{QF'}=2:3$일 때, $\overline{PQ}^2$의 값을 구하시오. (단, 점 Q는 타원 외부의 점이다.) [3점]



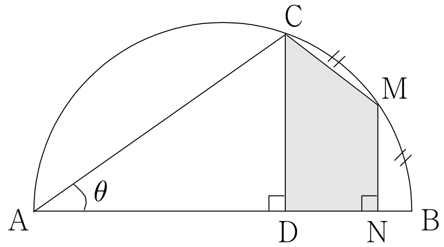
26. 지호와 영수는 가위바위보를 한 번 할 때마다 다음과 같은 규칙으로 사탕을 받는 게임을 한다.

(가) 이긴 사람은 2개의 사탕을 받고, 진 사람은 1개의 사탕을 받는다.
(나) 비긴 경우에는 두 사람 모두 1개의 사탕을 받는다.

게임을 시작하고 나서 지호가 받은 사탕의 총 개수가 5인 경우가 생길 확률은 $\frac{k}{243}$ 이다. 자연수 k의 값을 구하시오.(단, 두 사람이 각각 가위, 바위, 보를 낼 확률은 같다.) [4점]

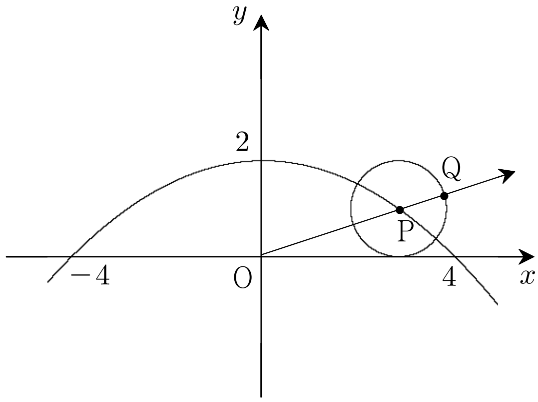
27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위를 움직이는 점 C가 있다. 호 BC의 길이를 이등분하는 점을 M이라 하고, 두 점 C, M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 D, N이라 하자. $\angle \mathrm{CAB} = \theta$ 라 할 때, 사각형 CDNM의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = a$일 때, $16a$의 값을 구하시오. (단, 점 C는 선분 AB의 양 끝점이 아니다.) [4점]



28. 좌표공간에 여섯 개의 점 $A(0, 0, 2)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(-2, 0, 0)$, $E(0, -2, 0)$, $F(0, 0, -2)$를 꼭짓점으로 하는 정팔면체 ABCDEF가 있다. 이 정팔면체와 평면 $x+y+z=0$이 만나서 생기는 도형의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림과 같이 좌표평면에서 세 점 $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0, 2)$를 지나는 포물선이 있다. $-4 < x < 4$인 범위에서 포물선 위를 움직이는 점을 P라 할 때, 점 P를 중심으로 하고 x축에 접하는 원을 그린 다음, 반직선 OP와 이 원의 교점 중에서 원점 O로부터 더 멀리 있는 점을 Q라 하자. 점 Q가 그리는 도형과 x축 및 직선 $x = -4$, $x = 4$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표와 가수를 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하자. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}_n(f(n), g(n))$이 연립부등식

$$\begin{cases} y \geq \dfrac{1}{3}x \\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

의 영역에 속하도록 하는 자연수 n의 개수를 오른쪽 상용로그표를 이용하여 구하시오. [4점]

x	$\log x$
2.1	0.3222
2.2	0.3424
3.1	0.4914
3.2	0.5051

제3교시

2015학년도 육군사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

B형

성명	

수험번호							

○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 먼저 문제지에 성명과 수험번호를 기입하시오.

○ 답안지에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 0이 포함된 경우에는 0을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

육 군 사 관 학 교

1. $\log_2 9 \times \log_3 8$의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $AX=A+B$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은? [2점]

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

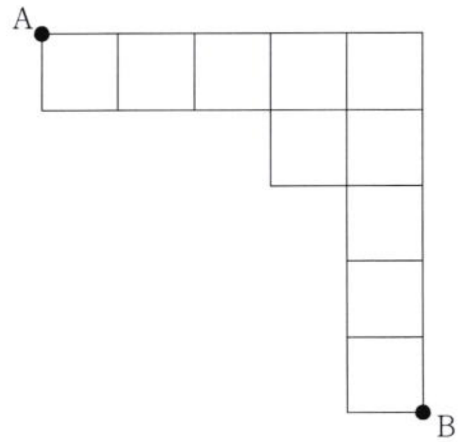
3. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°이고, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$일 때, $|\vec{a}-2\vec{b}|$의 값은? [2점]

① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

4. 함수 $f(x)=8\sin x+4\cos 2x+1$의 최댓값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

5. 그림과 같이 정사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다.



이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

6. 좌표평면에서 원점을 중심으로 90° 만큼 회전하는 회전변환을 f, 원점을 닮음의 중심으로 하고 닮음비가 $k(k>0)$인 닮음변환을 g라 하자. 합성변환 $g \circ f$에 의하여 원 C_1 : $(x-5)^2+y^2=16$이 옮겨진 원을 C_2라 할 때, 두 원 C_1, C_2가 외접하기 위한 모든 k의 값의 합은? [3점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{31}{9}$ ③ $\frac{32}{9}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ $\frac{34}{9}$

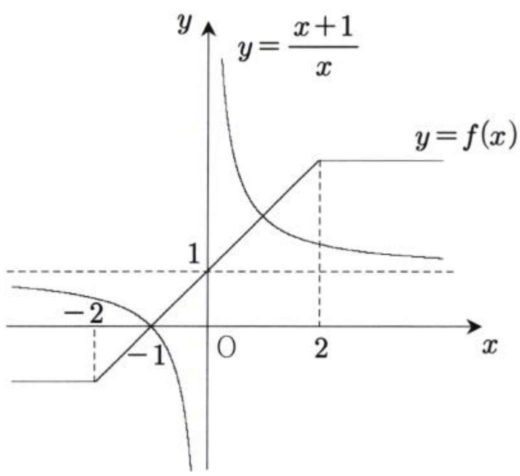
7. 어느 상품의 수요량이 D, 공급량이 S일 때의 판매가격을 P라 하면 관계식

$$\log_2 P = C + \log_3 D - \log_9 S \text{ (단, } C\text{는 상수)}$$

가 성립한다고 한다. 이 상품의 수요량이 9배로 증가하고 공급량이 3배로 증가하면 판매가격은 k배로 증가한다. k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

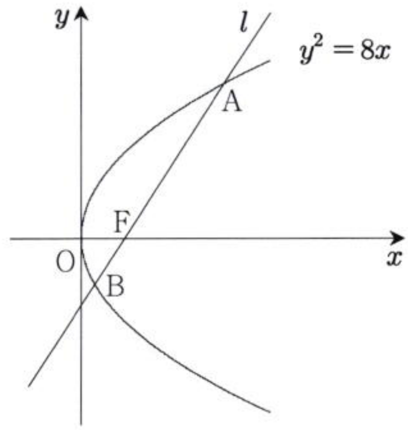
8. 함수 $f(x)=\begin{cases} -1 & (x<-2) \\ x+1 & (-2 \le x < 2) \\ 3 & (x \ge 2) \end{cases}$가 있다. 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=\dfrac{x+1}{x}$의 그래프를 나타낸 것이다.



집합 $\left\{ x \,\middle|\, \dfrac{x+1}{f(x)} > x,\ x\text{는 } |x|<10\text{인 정수} \right\}$의 원소의 개수는? [3점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

9. 포물선 $y^2=8x$의 초점 F를 지나는 직선 l이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=14$를 만족시키는 직선 l의 기울기를 m이라 할 때, 양수 m의 값은? [3점]



① $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

10. 정규분포를 따르는 두 연속확률변수 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{E}(X)=10$ (나) $Y=3X$

$\mathrm{P}(X\le k)=\mathrm{P}(Y\ge k)$를 만족시키는 상수 k의 값은? [3점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

11. 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 4개, 검은 공 2개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣고 섞은 다음 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 주머니 A에 넣었더니 두 주머니에 있는 검은 공의 개수가 서로 같아졌다. 이때 주머니 A에서 꺼낸 공이 모두 검은 공이었을 확률은? [3점]

① $\frac{6}{11}$ ② $\frac{13}{22}$ ③ $\frac{7}{11}$ ④ $\frac{15}{22}$ ⑤ $\frac{8}{11}$

12. 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(-3, 0)$, $\mathrm{B}(3, 0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원이 있다. 초점이 B이고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이 타원과 만나는 한 점을 P라 할 때, 선분 PB의 길이는? [3점]

① $\frac{22}{7}$ ② $\frac{23}{7}$ ③ $\frac{24}{7}$ ④ $\frac{25}{7}$ ⑤ $\frac{26}{7}$

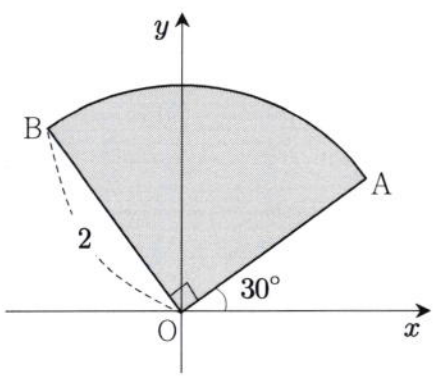
13. 모든 실수에서 연속이고 역함수가 존재하는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제1사분면에 있는 두 점 $(2, a)$, $(4, a+8)$을 지난다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{2k}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(a+\frac{8k}{n}\right)=50$$

을 만족시키는 상수 a의 값은? [3점]

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

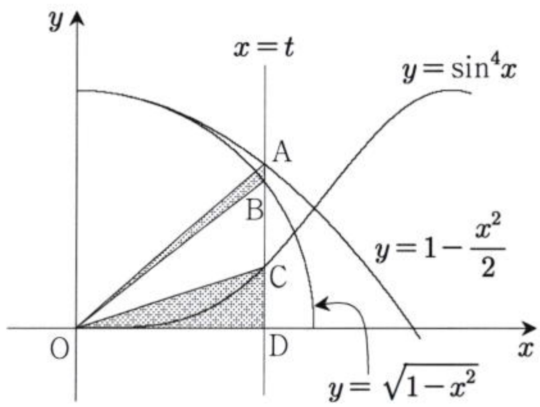
14. 그림은 좌표평면에 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 OAB를 나타낸 것이다. 선분 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30°일 때, 부채꼴 OAB의 내부를 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? (단, O는 원점이고, 점 B는 제2사분면에 있다.) [4점]



① $\frac{4(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$　② $\frac{5(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$　③ $2(\sqrt{3}+1)\pi$

④ $\frac{7(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$　⑤ $\frac{8(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$

15. 그림과 같이 직선 $x=t$ $(0<t<1)$이 세 곡선 $y=1-\frac{x^2}{2}$, $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sin^4 x$ 및 x축과 만나는 점을 각각 A, B, C, D라 하자. 두 삼각형 AOB, COD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $\lim_{t\to+0}\frac{S_1}{S_2}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

16. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$AB=O,\ (A+2B)(2A-B)=E$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $BA=O$

ㄴ. 행렬 $A+B$의 역행렬이 존재한다.

ㄷ. $A^2+B^2=\frac{1}{2}E$이면 $B=O$이다.

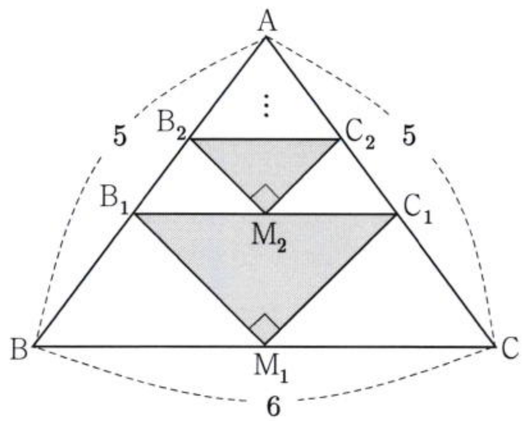
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=5$, $\overline{BC}=6$인 이등변삼각형 ABC가 있다.

선분 BC의 중점 M_1을 잡고 두 선분 AB, AC 위에 각각 점 B_1, C_1을 $\angle B_1M_1C_1=90°$이고 $\overline{B_1C_1} /\!/ \overline{BC}$가 되도록 잡아 직각삼각형 $B_1M_1C_1$을 만든다.

선분 B_1C_1의 중점 M_2를 잡고 두 선분 AB_1, AC_1 위에 각각 점 B_2, C_2를 $\angle B_2M_2C_2=90°$이고 $\overline{B_2C_2} /\!/ \overline{B_1C_1}$이 되도록 잡아 직각삼각형 $B_2M_2C_2$를 만든다.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 만든 직각삼각형 $B_nM_nC_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

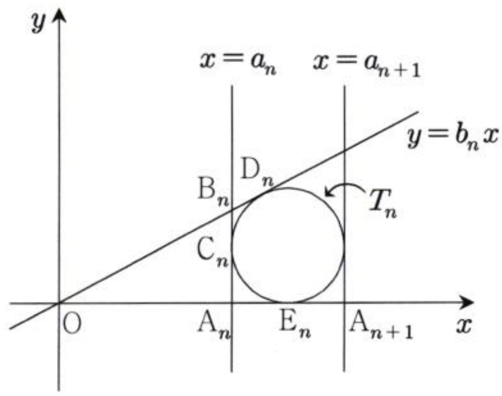


① $\frac{47}{11}$ ② $\frac{48}{11}$ ③ $\frac{49}{11}$ ④ $\frac{50}{11}$ ⑤ $\frac{51}{11}$

18. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (Ⅰ) $a_1=2$이고 $a_n<a_{n+1}$ $(n\ge 1)$이다.
>
> (Ⅱ) $b_n=\dfrac{1}{2}\left(n+1-\dfrac{1}{n+1}\right)$ $(n\ge 1)$이라 할 때, 좌표평면에서 네 직선 $x=a_n$, $x=a_{n+1}$, $y=0$, $y=b_nx$에 동시에 접하는 원 T_n이 존재한다.

다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

> 원점을 O라 하고, 원 T_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하자.
>
> 직선 $x=a_n$과 두 직선 $y=0$, $y=b_nx$의 교점을 각각 A_n, B_n이라 하고,
>
> 원 T_n과 세 직선 $x=a_n$, $y=b_nx$, $y=0$의 접점을 각각 C_n, D_n, E_n이라 하면
>
> $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=a_nb_n$이고 $\overline{\mathrm{OB}_n}=a_n\sqrt{\boxed{(가)}+b_n^2}$이다.
>
> $$\overline{\mathrm{OD}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$$
>
> $$=a_n\sqrt{\boxed{(가)}+b_n^2}+a_nb_n-r_n$$
>
> $$\overline{\mathrm{OE}_n}=a_n+r_n$$
>
> 
>
>
> $\overline{\mathrm{OD}_n}=\overline{\mathrm{OE}_n}$이므로
>
> $$r_n=\frac{a_n\left(b_n-1+\sqrt{\boxed{(가)}+b_n^2}\right)}{2}$$
>
> $$\therefore\ a_{n+1}=a_n+2r_n=\left(\boxed{(나)}\right)\times a_n\quad(n\ge 1)$$
>
> 이때 $a_1=2$이고
>
> $$a_n=\boxed{}\times a_{n-1}=\boxed{}\times a_{n-2}=\cdots=\boxed{}\times a_1$$
>
> 이므로
>
> $$a_n=\boxed{(다)}$$

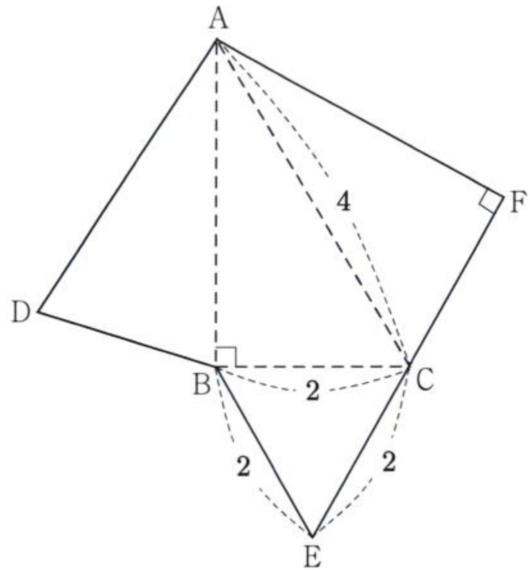
위의 과정에서 (가)에 알맞은 수를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+f(4)+g(4)$의 값은? [4점]

① 54 ② 55 ③ 56 ④ 57 ⑤ 58

19. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$이라 할 때, 좌표평면에서 점 A_n의 좌표를 $(f(n), g(n))$이라 하자. 10보다 크고 1000보다 작은 두 자연수 k, m $(k<m)$에 대하여 세 점 A_1, A_k, A_m이 한 직선 위에 있을 때, $k+m$의 최댓값은? [4점]

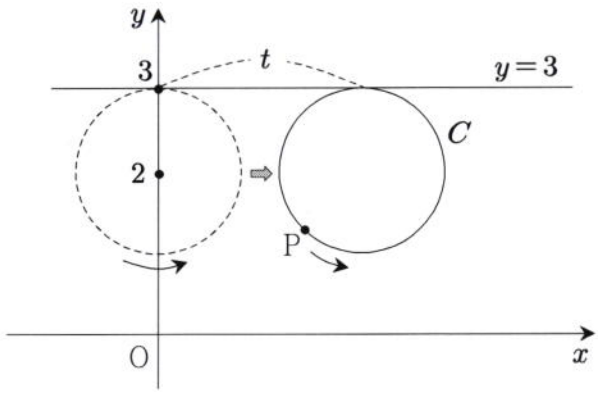
① 988 ② 990 ③ 992 ④ 994 ⑤ 996

20. 그림은 어떤 사면체의 전개도이다. 삼각형 BEC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고, $\angle ABC = \angle CFA = 90°$, $\overline{AC} = 4$이다. 이 전개도로 사면체를 만들 때, 두 면 ACF, ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{6}$　② $\frac{\sqrt{2}}{6}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$　⑤ $\frac{1}{3}$

21. 좌표평면에 중심이 (0, 2)이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있고, 이 원 위의 점 P가 점 (0, 3)의 위치에 있다. 원 C는 직선 $y=3$에 접하면서 x축의 양의 방향으로 미끄러지지 않고 굴러간다. 그림은 원 C가 굴러간 거리가 t일 때, 점 P의 위치를 나타낸 것이다.



점 P가 나타내는 곡선을 F라 하자. $t=\frac{2}{3}\pi$일 때 곡선 F 위의 점에서의 접선의 기울기는?

[4점]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

22. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_2+a_4=16$, $a_8+a_{12}=58$일 때, a_{17}의 값을 구하시오. [3점]

23. 방정식 $\sqrt{x+3}=|x|-3$의 모든 근의 합을 구하시오. [3점]

24. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x t^2 f'(t)\,dt = \frac{3}{2}x^4 + kx^3$ 이다.
(나) $x=1$에서 극솟값 7을 갖는다.

$f(10)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

25. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)=x^n \ln x$의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $g(n) \le -\frac{1}{6e}$을 만족시키는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [3점]

26. 이차함수 $f(x)=ax^2$에 대하여 구간 $[0, 2]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ f(x-1)+f(1) & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

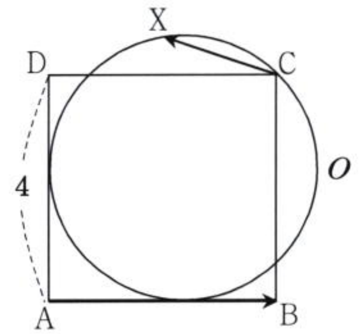
일 때, $\mathrm{P}(a \le X \le a+1)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

27. 두 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{k}{x}$ $(k>1)$에 대하여 좌표평면에서 직선 $x=2$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 곡선 $y=f(x)$에 대하여 점 P에서의 접선을 l, 곡선 $y=g(x)$에 대하여 점 Q에서의 접선을 m이라 하자. 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, 상수 k에 대하여 $3k$의 값을 구하시오. [4점]

28. 좌표공간에서 구 $(x-6)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=16$ 위의 점 P와 yz평면 위에 있는 원 $(y-2)^2+(z-1)^2=9$ 위의 점 Q 사이의 거리의 최댓값을 구하시오. [4점]

29. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 변 AB와 변 AD에 모두 접하고 점 C를 지나는 원을 O라 하자. 원 O 위를 움직이는 점 X에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CX}$의 내적 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CX}$의 최댓값은 $a-b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.) [4점]



30. 함수 $f(x) = -xe^{2-x}$과 상수 a가 다음 조건을 만족시킨다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, $x<a$이면 $f(x)>g(x)$이고, $x>a$이면 $f(x)<g(x)$이다.

곡선 $y=f(x)$와 접선 $y=g(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $k-e^2$이다. k의 값을 구하시오. [4점]

제 3 교 시

2016학년도 육군사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

B 형

성명	

수험번호							

○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 먼저 문제지에 성명과 수험번호를 기입하시오.

○ 답안지에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며 ‘0’이 포함된 경우에는 ‘0’을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

육 군 사 관 학 교

1. ${}_{3}\mathrm{H}_{1}+{}_{3}\mathrm{H}_{2}+{}_{3}\mathrm{H}_{3}$의 값은? [2점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

2. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $(A+B)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$이고 행렬 A의 모든 성분의 합이 2일 때, 행렬 B의 모든 성분의 합은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

3. 좌표공간에서 두 점 A$(2,\ 3,\ -1)$, B$(-1,\ 3,\ 2)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 할 때, $a+b+c$의 값은? [2점]

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

4. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 있다. 행렬 AB로 나타내어지는 일차변환에 의하여 두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$이 각각 두 점 $(0,\ 2)$, $(-2,\ 0)$으로 옮겨질 때, $a+b+c+d$의 값은? [3점]

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

5. 쌍곡선 $7x^2 - ay^2 = 20$ 위의 점 $(2, b)$에서의 접선이 점 $(0, -5)$를 지날 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

6. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = e^x + \int_0^1 tf(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① $e-1$ ② $e+1$ ③ $2e-1$ ④ $2e$ ⑤ $2e+1$

7. 어느 과수원에서 생산되는 사과의 무게는 평균이 350 g이고 표준편차가 30 g인 정규분포를 따르고, 배의 무게는 평균이 490 g이고 표준편차가 40 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 생산된 사과 중에서 임의로 선택한 9개의 무게의 총합을 $X(\mathrm{g})$이라 하고, 이 과수원에서 생산된 배 중에서 임의로 선택한 4개의 무게의 총합을 $Y(\mathrm{g})$이라 하자. $X \geq 3240$이고 $Y \geq 2008$일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 사과의 무게와 배의 무게는 서로 독립이다.) [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.4	0.16
0.6	0.23
0.8	0.29
1.0	0.34

① 0.0432 ② 0.0482 ③ 0.0544 ④ 0.0567 ⑤ 0.0614

8. 어느 액체의 끓는 온도 T(℃)와 증기압 P(mmHg) 사이에는 다음 관계식이 성립한다.

$$\log P = k - \frac{1000}{T+250} \quad (\text{단, } k\text{는 상수})$$

이 액체의 끓는 온도가 0℃일 때와 50℃일 때의 증기압을 각각 P_1(mmHg), P_2(mmHg)라 할 때, $\frac{P_2}{P_1}$의 값은? [3점]

① $10^{\frac{1}{4}}$ ② $10^{\frac{1}{3}}$ ③ $10^{\frac{1}{2}}$ ④ $10^{\frac{2}{3}}$ ⑤ $10^{\frac{3}{4}}$

9. 주머니에 흰 공 1개, 파란 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 색을 확인한 후 꺼낸 공과 같은 색의 공을 1개 추가하여 꺼낸 공과 함께 주머니에 넣는다. 이와 같은 시행을 두 번 반복하여 두 번째 꺼낸 공이 검은 공이었을 때, 첫 번째 꺼낸 공도 검은 공이었을 확률은? (단, 공의 크기와 모양은 모두 같다.) [3점]

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{10}{21}$ ③ $\frac{11}{21}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{13}{21}$

10. $0 \le x \le \pi$에서 함수 $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\cos x$는 $x = \theta$일 때 최댓값을 갖는다. $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{12}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[11~12] 좌표평면에서 매개변수 θ로 나타내어진 곡선

$$x=2\cos\theta+\cos 2\theta,\ y=2\sin\theta+\sin 2\theta$$

에 대하여 11번과 12번의 두 물음에 답하시오. (단, θ는 실수이다.)

11. $\theta=\frac{\pi}{6}$에 대응하는 이 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기는? [3점]

① -2 ② $-\sqrt{3}$ ③ -1 ④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

12. $0\le\theta\le\pi$일 때, 이 곡선의 길이는? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

13. 이차함수 $f(x)=x^2+2kx+2k^2+k$가 있다. x에 대한 방정식

$$\frac{1}{\sqrt{f(x)+3}}-\frac{1}{f(x)}=\frac{3}{f(x)\sqrt{f(x)+3}}$$

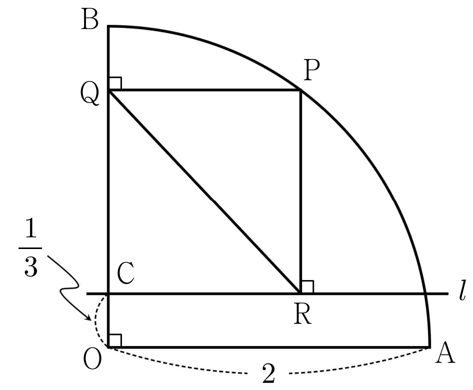
이 서로 다른 두 개의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

14. $x \geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{4}{1+x^2}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} g\left(1+\dfrac{3k}{n}\right)$의 값은? [4점]

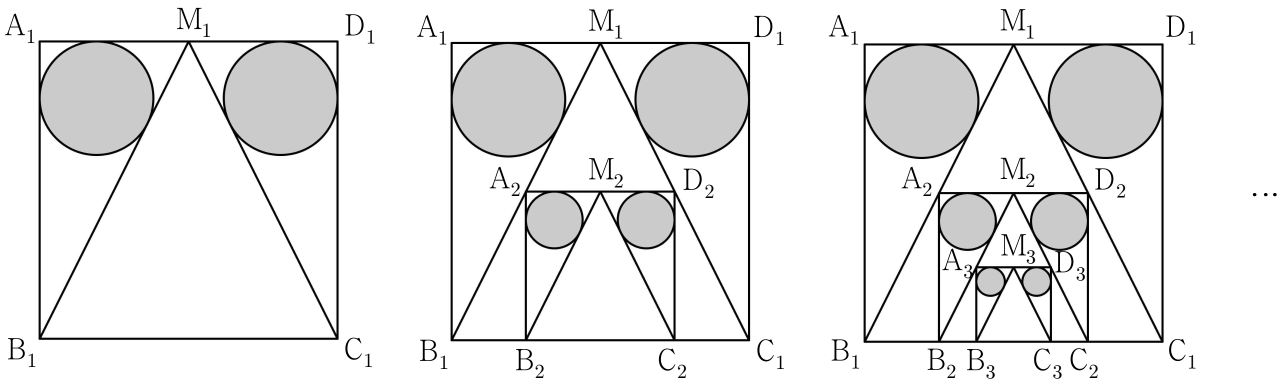
① $\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{3}$ ② $\dfrac{\pi+\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{9}$ ④ $\dfrac{4\pi+3\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\dfrac{2\pi-\sqrt{3}}{3}$

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OB 위에 $\overline{OC}=\frac{1}{3}$인 점 C를 잡고, 점 C를 지나고 선분 OA와 평행한 직선을 l이라 하자. 호 AB 위를 움직이는 점 P에서 선분 OB와 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{7}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{6}$ ③ $\frac{5\sqrt{7}}{24}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{7}}{24}$

16. 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 변 A_1D_1의 중점을 M_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1B_1M_1$과 $M_1C_1D_1$에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 두 꼭짓점이 변 B_1C_1 위에 있고 삼각형 $M_1B_1C_1$에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린 후 변 A_2D_2의 중점을 M_2라 할 때, 두 삼각형 $A_2B_2M_2$와 $M_2C_2D_2$에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 두 꼭짓점이 변 B_2C_2 위에 있고 삼각형 $M_2B_2C_2$에 내접하는 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$을 그린 후 변 A_3D_3의 중점을 M_3이라 할 때, 두 삼각형 $A_3B_3M_3$과 $M_3C_3D_3$에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 R_3 …

① $\dfrac{4(7-3\sqrt{5})}{3}\pi$ ② $\dfrac{4(8-3\sqrt{5})}{3}\pi$ ③ $\dfrac{5(7-3\sqrt{5})}{3}\pi$
④ $\dfrac{5(8-3\sqrt{5})}{3}\pi$ ⑤ $\dfrac{5(9-4\sqrt{5})}{3}\pi$

17. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = -\frac{5}{3}$이고

$$a_{n+1} = -\frac{3a_n + 2}{a_n} \quad (n \geq 1) \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> $(*)$에서
>
> $$a_{n+1} + 2 = -\frac{a_n + \boxed{\text{(가)}}}{a_n} \quad (n \geq 1)$$
>
> 이다. 여기서
>
> $$b_n = \frac{1}{a_n + 2} \quad (n \geq 1)$$
>
> 이라 하면 $b_1 = 3$이고
>
> $$b_{n+1} = 2b_n - \boxed{\text{(나)}} \quad (n \geq 1)$$
>
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
>
> $$b_n = \boxed{\text{(다)}} \quad (n \geq 1)$$
>
> 이므로
>
> $$a_n = \frac{1}{\boxed{\text{(다)}}} - 2 \quad (n \geq 1)$$
>
> 이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p \times q \times f(5)$의 값은? [4점]

① 54 ② 58 ③ 62 ④ 66 ⑤ 70

18. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 1+\sin x & (x \le 0) \\ -1+\sin x & (x > 0) \end{cases}$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to 0} f(x)f(-x) = -1$

ㄴ. 함수 $f(f(x))$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이다.

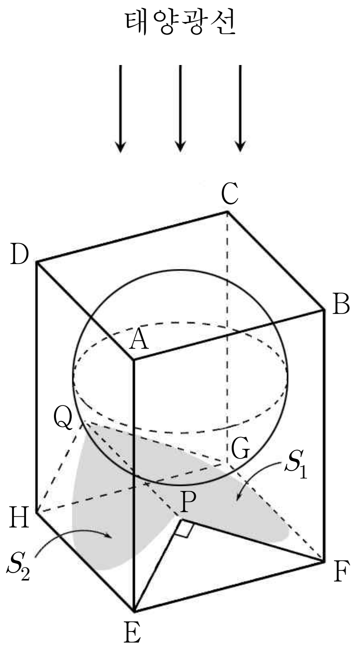
ㄷ. 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 좌표공간에서 구 $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ 와 xy평면이 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하자. 점 P에서 이 구와 접하고 점 A$(3,\ 3,\ -4)$를 지나는 평면을 α라 할 때, 원점과 평면 α 사이의 거리는? [4점]

① $\frac{14}{3}$　② 5　③ $\frac{16}{3}$　④ $\frac{17}{3}$　⑤ 6

20. 한 변의 길이가 8인 정사각형을 밑면으로 하고 높이가 $4+4\sqrt{3}$ 인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. 그림과 같이 이 직육면체의 바닥에 $\angle \mathrm{EPF}=90°$ 인 삼각기둥 EFP−HGQ가 놓여있고 그 위에 구를 삼각기둥과 한 점에서 만나도록 올려놓았더니 이 구가 밑면 ABCD와 직육면체의 네 옆면에 모두 접하였다. 태양광선이 밑면과 수직인 방향으로 구를 비출 때, 삼각기둥의 두 옆면 PFGQ, EPQH에 생기는 구의 그림자의 넓이를 각각 S_1, $S_2\,(S_1>S_2)$라 하자. $S_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}S_2$의 값은? [4점]



① $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\pi$　② $8\sqrt{3}\pi$　③ $\dfrac{28\sqrt{3}}{3}\pi$　④ $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}\pi$　⑤ $12\sqrt{3}\pi$

21. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $1 < x < 10^5$인 x에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱을 A라 할 때, $\log A$의 값은? (단, $\log 3 = 0.4771$로 계산한다.) [4점]

(가) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = g(x^{10}) + 2$

(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} f(kx) = 3f(x)$

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

22. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3n\ \ (n \geq 1)$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

23. 일차변환 f를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$이다. 합성변환 $f \circ f$에 의하여 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 2)$, $\mathrm{C}(-3,\ 4)$, $\mathrm{D}(-3,\ -3)$이 옮겨진 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 S라 할 때, $81S$의 값을 구하시오. [3점]

24. 타원 $2x^2+y^2=16$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 이 타원 위의 점 P에 대하여 $\frac{\overline{\mathrm{PF'}}}{\overline{\mathrm{PF}}}=3$일 때, $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$의 값을 구하시오. [3점]

25. 이차정사각행렬 A가 다음 조건을 만족시킨다. (단, E는 단위행렬이다.)

(가) $A-E$의 역행렬은 $A-3E$이다. (나) $A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

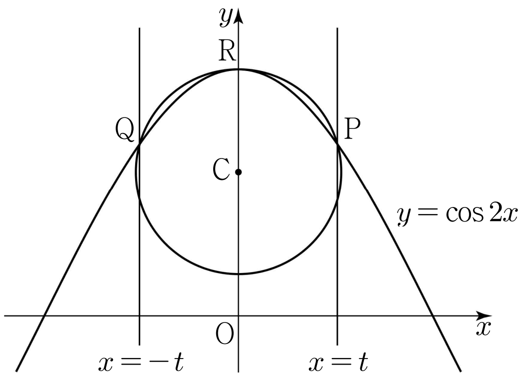
$A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하시오. [3점]

26. 이차함수 $f(x)$가

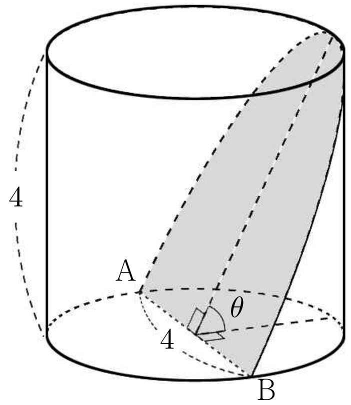
$$f(1)=2,\ f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(x)}{x}+\frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

27. 좌표평면에서 곡선 $y=\cos 2x$가 두 직선 $x=t$, $x=-t$ $\left(0<t<\frac{\pi}{4}\right)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 곡선 $y=\cos 2x$가 y축과 만나는 점을 R라 하자. 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 중심을 $\mathrm{C}(0,\ f(t))$라 할 때, $\lim_{t\to+0} f(t)=\alpha$이다. 100α의 값을 구하시오. [4점]

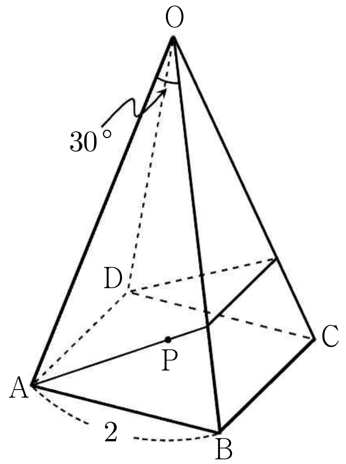


28. 그림과 같이 밑면의 지름의 길이와 높이가 모두 4인 원기둥이 있다. 밑면의 지름 AB를 포함하는 평면으로 이 원기둥을 잘랐을 때 생기는 단면이 원기둥의 밑면과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta = 2$이다. 이 단면을 직선 AB를 회전축으로 하여 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 V라 할 때, $\dfrac{3V}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점]



29. 바닥에 놓여 있는 5개의 동전 중 임의로 2개의 동전을 선택하여 뒤집는 시행을 하기로 한다. 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여있는 상태에서 이 시행을 3번 반복한 결과 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여 있을 확률을 p라 할 때, $125p$의 값을 구하시오. (단, 동전의 크기와 모양은 모두 같다.) [4점]

30. 그림과 같이 옆면은 모두 합동인 이등변삼각형이고 밑면은 한 변의 길이가 2인 정사각형인 사각뿔 O$-$ABCD에서 $\angle \mathrm{AOB} = 30°$이다. 점 A에서 출발하여 사각뿔의 옆면을 따라 모서리 OB 위의 한 점과 모서리 OC 위의 한 점을 거쳐 점 D에 도착하는 최단경로를 l이라 하자. l 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 최댓값을 $a\sqrt{3}+b$라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



제3교시

2017학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

가형

성명		수험번호							

○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 먼저 <u>문제지</u>의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.

○ <u>답안지</u>의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, ‘0’이 포함된 경우에는 ‘0’을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1. $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2. 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따르는 확률변수 X의 평균이 5일 때, 자연수 n의 값은? [2점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

3. 좌표공간에서 세 점 A$(6,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 3,\ 0)$, C$(0,\ 0,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 선분 OG의 길이는? (단, O는 원점이다.) [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{10}$

4. 자연수 10의 분할 중에서 짝수로만 이루어진 것의 개수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

5. 한 개의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하자. $\mathrm{P}(B|A)-\mathrm{P}(B|A^C)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

6. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1-\cos x)^{\sec x}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1 ④ e ⑤ e^2

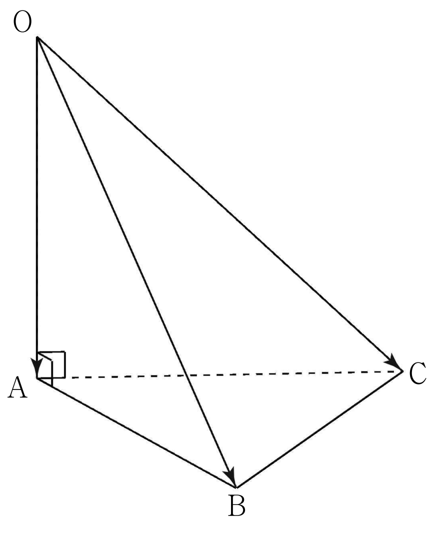
7. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	1

$\mathrm{E}(X)=1$, $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{4}$ 일 때, $\mathrm{P}(X=0)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

8. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC를 밑면으로 하고 $\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$인 사면체 OABC가 있다. $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$의 값은? [3점]

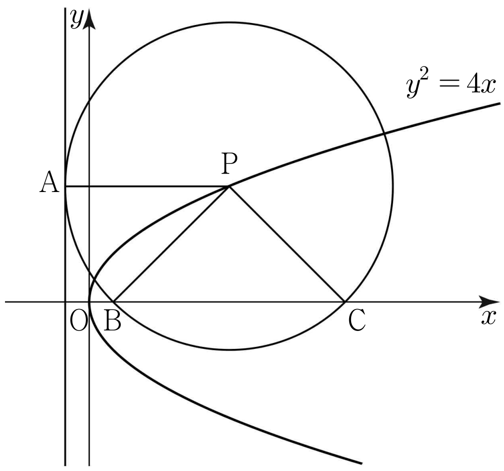


① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

9. 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생을 임의로 3명, 3명, 2명씩 3개의 조로 나눌 때, 두 학생 A, B가 같은 조에 속할 확률은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

10. 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 위의 한 점 P를 중심으로 하고 준선과 점 A에서 접하는 원이 x축과 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. 부채꼴 PBC의 넓이가 부채꼴 PAB의 넓이의 2배일 때, 원의 반지름의 길이는? (단, 점 P의 x좌표는 1보다 크고, 점 C의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다.) [3점]



① $2+2\sqrt{3}$ ② $3+2\sqrt{2}$ ③ $3+2\sqrt{3}$ ④ $4+2\sqrt{2}$ ⑤ $4+2\sqrt{3}$

11. 어느 공장에서 생산하는 군용 위장크림 1개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 군용 위장크림 중에서 임의로 택한 1개의 무게가 50 이상일 확률은 0.1587이다. 이 공장에서 생산하는 군용 위장크림 중에서 임의추출한 4개의 무게의 평균이 50 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.) [3점]

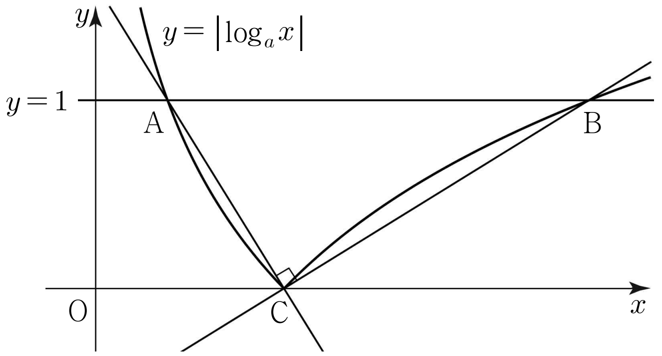
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587 ④ 0.3085 ⑤ 0.4332

12. 곡선 $y=\tan\frac{x}{2}$와 직선 $x=\frac{\pi}{2}$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{1}{4}\ln 2$ ② $\frac{1}{2}\ln 2$ ③ $\ln 2$ ④ $2\ln 2$ ⑤ $4\ln 2$

13. 그림과 같이 곡선 $y=|\log_a x|$가 직선 $y=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 x축과 만나는 점을 C라 하자. 두 직선 AC, BC가 서로 수직이 되도록 하는 모든 양수 a의 값의 합은? (단, $a\neq 1$) [3점]

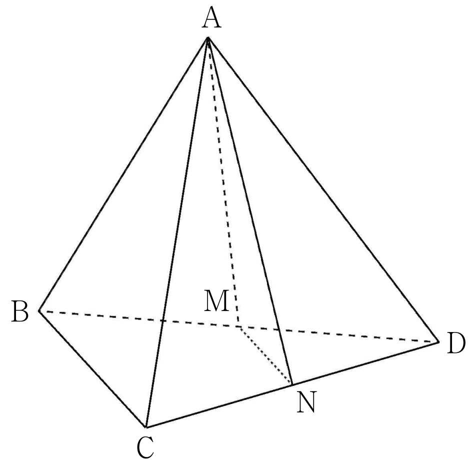


① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

14. 같은 종류의 볼펜 6개, 같은 종류의 연필 6개, 같은 종류의 지우개 6개가 필통에 들어 있다. 이 필통에서 8개를 동시에 꺼내는 경우의 수는? (단, 같은 종류끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

① 18 ② 24 ③ 30 ④ 36 ⑤ 42

15. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12인 정사면체 ABCD에서 두 모서리 BD, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 사각형 BCNM의 평면 AMN 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



① $\frac{15\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{18\sqrt{11}}{11}$ ③ $\frac{21\sqrt{11}}{11}$ ④ $\frac{24\sqrt{11}}{11}$ ⑤ $\frac{27\sqrt{11}}{11}$

16. 자연수 n에 대하여 $S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1}$ 이라 할 때, 다음은 $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값을 구하는 과정이다.

$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2} = \boxed{(가)} - (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{1+x^2}$ 이므로

$$\begin{aligned} S_n &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} \\ &= \int_0^1 \{1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2}\} dx \\ &= \int_0^1 \boxed{(가)}\, dx - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

이다. 한편, $0 \le \frac{x^{2n}}{1+x^2} \le x^{2n}$ 이므로

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \le \int_0^1 x^{2n} dx = \boxed{(나)}$$

이다. 따라서 $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = 0$ 이므로 $\lim_{n \to \infty} S_n = \int_0^1 \boxed{(가)}\, dx$ 이다.

$x = \tan\theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \int_0^1 \boxed{(가)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta} d\theta = \boxed{(다)}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(x)$, $g(n)$, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $k \times f(2) \times g(2)$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{40}$ ② $\frac{\pi}{60}$ ③ $\frac{\pi}{80}$ ④ $\frac{\pi}{100}$ ⑤ $\frac{\pi}{120}$

17. 좌표공간에 평행한 두 평면 $\alpha : 2x-y+2z=0$, $\beta : 2x-y+2z=6$ 위에 각각 점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 0,\ 1)$이 있다. 평면 α 위의 점 P와 평면 β 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은? [4점]

① 6　② $\sqrt{37}$　③ $\sqrt{38}$　④ $\sqrt{39}$　⑤ $2\sqrt{10}$

18. 함수 $f(x)=\int_{1}^{x} e^{t^3}dt$ 에 대하여 $\int_{0}^{1} xf(x)dx$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1-e}{2}$ ② $\frac{1-e}{3}$ ③ $\frac{1-e}{4}$ ④ $\frac{1-e}{5}$ ⑤ $\frac{1-e}{6}$

19. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 둘레의 길이를 $f(t)$라 하자.

(가) 점 P는 구 $x^2+y^2+z^2=25$ 위의 점이다.
(나) 점 $\mathrm{A}(t+5,\ 2t+4,\ 3t-2)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=\dfrac{20}{3}\pi$

ㄴ. $\lim_{t\to\infty} f(t)=10\pi$

ㄷ. $f(t)$는 $t=-1$에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 지수함수 $f(x)=a^{x}$ $(0<a<1)$의 그래프가 직선 $y=x$와 만나는 점의 x좌표를 b라 하자. 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le b) \\ f^{-1}(x) & (x > b) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, ab의 값은? [4점]

① e^{-e-1} ② $e^{-e-\frac{1}{e}}$ ③ $e^{-e+\frac{1}{e}}$ ④ e^{e-1} ⑤ e^{e+1}

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

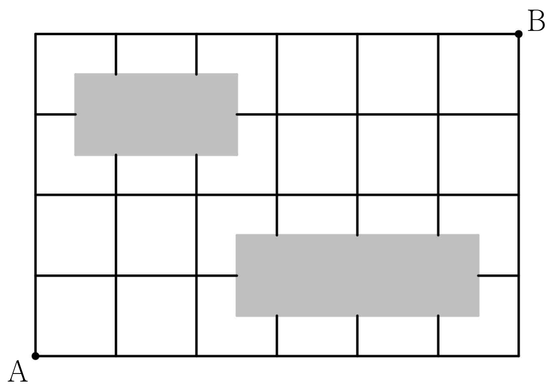
(가) $f(0)=0$, $f'(0)=1$
(나) 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$이다.

$f(-1)=k\ (-1<k<0)$일 때, $\displaystyle\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx$의 값을 k로 나타낸 것은? [4점]

① $1-k^2$　② $1-2k$　③ $1-k$　④ $1+k$　⑤ $1+k^2$

22. $\sin^2\theta = \dfrac{4}{5}\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$일 때, $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = p$이다. $\dfrac{1}{p^2}$의 값을 구하시오. [3점]

23. 어느 부대가 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망에서 장애물(어두운 부분)을 피해 A 지점에서 B 지점으로 도로를 따라 이동하려고 한다. A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하시오. [3점]



24. 두 초점 F, F′ 을 공유하는 타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 과 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 이 있다. 타원과 쌍곡선이 만나는 점 중 하나를 P 라 할 때, $\left|\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{PF'}}^2\right|$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 양수이다.) [3점]

25. 매개변수 $t\,(t>0)$ 으로 나타내어진 함수

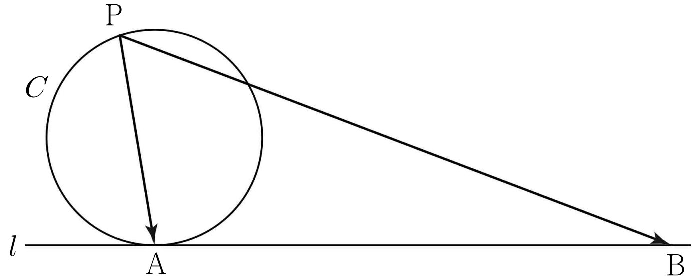
$$x=t^3,\ y=2t-\sqrt{2t}$$

의 그래프 위의 점 $(8,\ a)$ 에서의 접선의 기울기는 b 이다. $100ab$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 곡선 $y=\sin^2 x\ (0 \le x \le \pi)$의 두 변곡점을 각각 A, B라 할 때, 점 A에서의 접선과 점 B에서의 접선이 만나는 점의 y좌표는 $p+q\pi$이다. $40(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

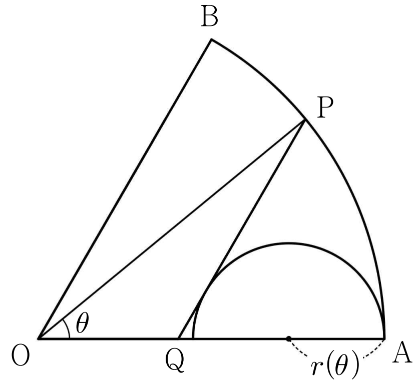
27. 주머니에 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 차례로 꺼낸다. 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 곱이 짝수일 때, 첫 번째로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이었을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원 C와 원 C 위의 점 A에서의 접선 l이 있다. 원 C 위의 점 P와 $\overline{\mathrm{AB}}=24$를 만족시키는 직선 l 위의 점 B에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값을 구하시오. [4점]



29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 선분 OA와 만나는 점을 Q라 하고 $\angle \mathrm{AOP} = \theta$라 하자. 점 A를 지름의 한 끝점으로 하고 지름이 선분 AQ 위에 있으며 선분 PQ에 접하는 반원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta} = a + b\sqrt{3}$이다. $a^2 + b^2$의 값을 구하시오.

$\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \text{이고, } a, b \text{는 유리수이다.} \right)$ [4점]



30. 좌표공간에 평면 $z=1$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(1,\ -1,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$이 있다. 점 $\mathrm{P}(2,\ 3,\ 2)$를 지나고 벡터 $\vec{d}=(a,\ b,\ 1)$과 평행한 직선이 삼각형 ABC의 둘레 또는 내부를 지날 때, $\left|\vec{d}+3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$의 최솟값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a, b는 실수이다.) [4점]

제 3 교 시

2018학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

가 형

성명		수험번호							

○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, ‘0’이 포함된 경우에는 ‘0’을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1. 두 벡터 $\vec{a}=(2,1)$, $\vec{b}=(-1,k)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직일 때, k의 값은? [2점]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

2. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(50, \frac{1}{4}\right)$을 따를 때, $\mathrm{V}(4X)$의 값은? [2점]

① 50　② 75　③ 100　④ 125　⑤ 150

3. 함수 $f(x)=x^2e^{x-1}$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\, dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\ln 3}{2}$ ③ $\ln 2$ ④ $\ln 3$ ⑤ $2\ln 2$

5. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(1, 2, -1)$, $\mathrm{B}(3, 1, -2)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는? [3점]

① $(5, 0, -3)$ ② $(5, 3, -4)$ ③ $(4, 0, -3)$ ④ $(4, 3, -3)$ ⑤ $(3, 0, -4)$

6. 함수 $f(x)=a\sin bx+c\ (a>0,\ b>0)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -2이다. 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 양수 p의 최솟값이 π일 때, abc의 값은?
(단, a, b, c는 상수이다.) [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

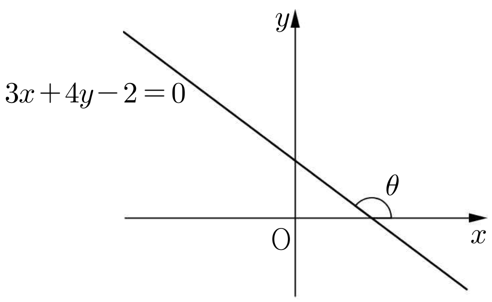
7. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{1}^{x}(x-t)f(t)\,dt = e^{x-1}+ax^2-3x+1$$

을 만족시킬 때, $f(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

8. 그림과 같이 직선 $3x+4y-2=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$의 값은? [3점]



① $\frac{1}{14}$　② $\frac{1}{7}$　③ $\frac{3}{14}$　④ $\frac{2}{7}$　⑤ $\frac{5}{14}$

9. 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\left\{f(x)\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right\}=4$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x-3}$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

10. 상자 A에는 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있고, 상자 B에는 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있다. 한 개의 동전을 던져 앞면이 나오면 상자 A를, 뒷면이 나오면 상자 B를 택하고, 택한 상자에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼내기로 한다. 이 시행을 한 번 하여 꺼낸 공의 색깔이 서로 같았을 때, 상자 A를 택하였을 확률은? [3점]

① $\frac{11}{29}$ ② $\frac{12}{29}$ ③ $\frac{13}{29}$ ④ $\frac{14}{29}$ ⑤ $\frac{15}{29}$

11. 다음 표는 어느 고등학교의 수학 점수에 대한 성취도의 기준을 나타낸 것이다.

성취도	A	B	C	D	E
수학 점수	89점 이상	79점 이상 ～89점 미만	67점 이상 ～79점 미만	54점 이상 ～67점 미만	54점 미만

예를 들어, 어떤 학생의 수학 점수가 89점 이상이면 성취도는 A이고, 79점 이상이고 89점 미만이면 성취도는 B이다. 이 학교 학생들의 수학 점수는 평균이 67점, 표준편차가 12점인 정규분포를 따른다고 할 때, 이 학교의 학생 중에서 수학 점수에 대한 성취도가 A 또는 B인 학생의 비율을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

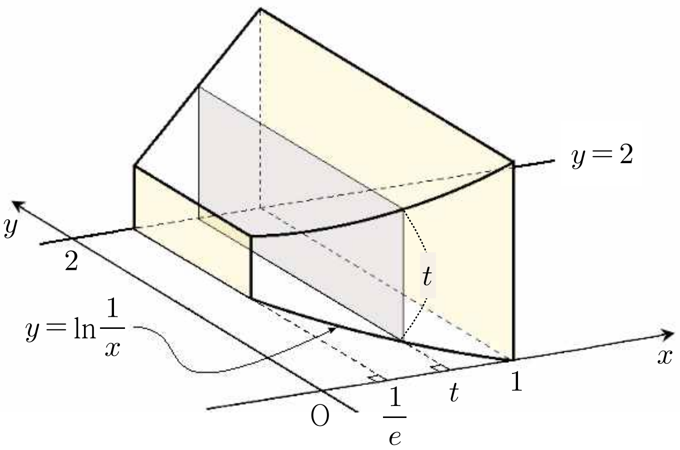
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587 ④ 0.1915 ⑤ 0.3085

12. 좌표공간에서 점 $(0, a, b)$를 지나고 평면 $x+3y-z=0$에 수직인 직선이 구 $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=1$과 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{\mathrm{AB}}=2$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

13. 그림과 같이 곡선 $y=\ln\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e}\le x\le 1\right)$과 직선 $x=\frac{1}{e}$, 직선 $x=1$ 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축 위의 $x=t\left(\frac{1}{e}\le t\le 1\right)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 한 변의 길이가 t인 직사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{1}{2}-\frac{1}{3e^2}$ ② $\frac{1}{2}-\frac{1}{4e^2}$ ③ $\frac{3}{4}-\frac{1}{3e^2}$ ④ $\frac{3}{4}-\frac{1}{4e^2}$ ⑤ $\frac{3}{4}-\frac{1}{5e^2}$

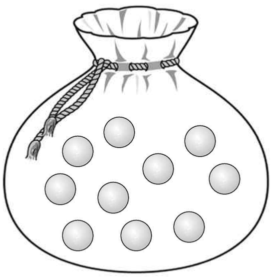
14. 집합 $S=\{a, b, c, d\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 중에서 임의로 한 개씩 두 개의 부분집합을 차례로 택한다. 첫 번째로 택한 집합을 A, 두 번째로 택한 집합을 B라 할 때, $n(A)\times n(B)=2\times n(A\cap B)$가 성립할 확률은? (단, 한 번 택한 집합은 다시 택하지 않는다.) [4점]

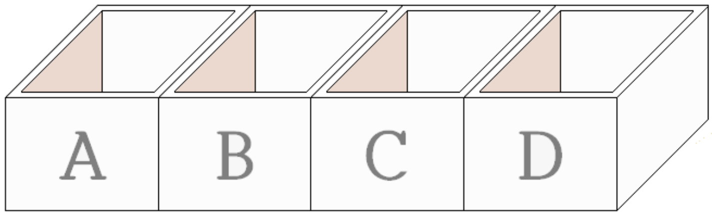
① $\frac{2}{35}$ ② $\frac{3}{35}$ ③ $\frac{4}{35}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{6}{35}$

15. 평면 α 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B와 평면 α 위에 있지 않은 점 P에 대하여 삼각형 PAB는 $\overline{\mathrm{PB}}=4$, $\angle\mathrm{PAB}=\frac{\pi}{2}$ 인 직각이등변삼각형이고, 평면 PAB와 평면 α가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$ 이다. 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 사면체 PHAB의 부피는? [4점]

① $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{6}}{6}$

16. 그림과 같이 10개의 공이 들어 있는 주머니와 일렬로 나열된 네 상자 A, B, C, D가 있다. 이 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내어 이웃한 두 상자에 각각 한 개씩 넣는 시행을 5회 반복할 때, 네 상자 A, B, C, D에 들어 있는 공의 개수를 각각 a, b, c, d라 하자. a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? (단, 상자에 넣은 공은 다시 꺼내지 않는다.) [4점]





① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

17. 1부터 $(2n-1)$까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 $(2n-1)$장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 3장의 카드를 택할 때, 택한 3장의 카드 중 짝수가 적힌 카드의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, n은 4 이상의 자연수이다.)

> 정수 $k(0 \le k \le 3)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 짝수가 적혀 있는 카드 중에서 k장의 카드를 택하고, 홀수가 적혀 있는 카드 중에서 $\left(\boxed{(가)}-k\right)$장의 카드를 택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나눈 값이므로
>
> $$\mathrm{P}(X=0)=\frac{n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=2)=\boxed{(나)}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=3)=\frac{(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{3}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$$
>
> $$=\frac{\boxed{(다)}}{2n-1}$$
>
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $a\times f(5)\times g(8)$의 값은? [4점]

① 22 ② $\frac{45}{2}$ ③ 23 ④ $\frac{47}{2}$ ⑤ 24

18. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 a_n이라 하자.

(가) 한 변의 길이가 n이고 네 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 자연수이다.
(나) 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_{16} x$와 각각 서로 다른 두 점에서 만난다.

a_3+a_4의 값은? [4점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

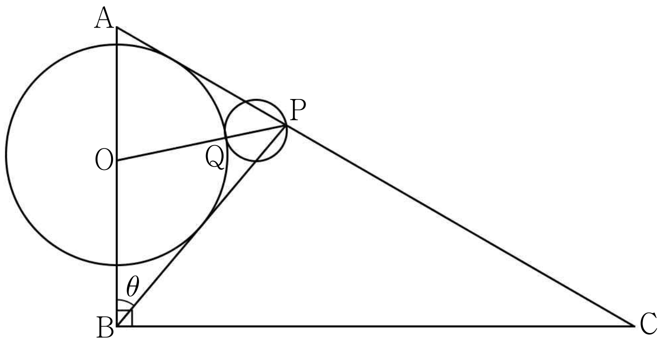
19. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 $(x,\,y)$가

$$x=t^3+2t,\; y=\ln(t^2+1)$$

이다. 점 P에서 직선 $y=-x$에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $t=1$일 때, 점 Q의 속력은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

20. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$, $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 가 있다. 선분 CA 위의 점 P 에 대하여 $\angle \mathrm{ABP}=\theta$ 라 할 때, 선분 AB 위의 점 O 를 중심으로 하고 두 선분 AP, BP 에 동시에 접하는 원의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하자. 이 원과 선분 PO 가 만나는 점을 Q 라 할 때, 선분 PQ 를 지름으로 하는 원의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? [4점]



① $\frac{17-5\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $\frac{18-5\sqrt{3}}{3}\pi$ ③ $\frac{19-5\sqrt{3}}{3}\pi$ ④ $\frac{18-4\sqrt{3}}{3}\pi$ ⑤ $\frac{19-4\sqrt{3}}{3}\pi$

21. 자연수 n에 대하여 한 개의 주사위를 반복하여 던져서 나오는 눈의 수에 따라 다음과 같은 규칙으로 a_n을 정한다.

(가) $a_1 = 0$이고, $a_n\,(n \geq 2)$는 세 수 -1, 0, 1 중 하나이다. (나) 주사위를 n번째 던져서 나온 눈의 수가 짝수이면 a_{n+1}은 a_n이 아닌 두 수 중에서 작은 수이고, 홀수이면 a_{n+1}은 a_n이 아닌 두 수 중에서 큰 수이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_2 = 1$일 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

ㄴ. $a_3 = 1$일 확률과 $a_4 = 0$일 확률은 서로 같다.

ㄷ. $a_9 = 0$일 확률이 p이면 $a_{11} = 0$일 확률은 $\frac{1-p}{4}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오. [3점]

23. 직선 $y=-4x$가 곡선 $y=\frac{1}{x-2}-a$에 접하도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. [3점]

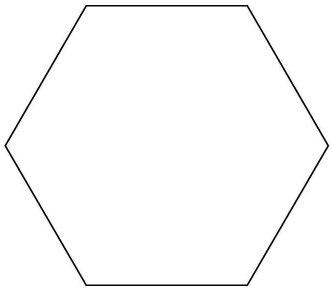
24. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 의 두 초점을 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하자. 이 타원 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 점 F′을 중심으로 하고 점 P를 지나는 원과 직선 PF′이 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하고, 점 F를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원과 직선 PF가 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R라 할 때, 삼각형 PQR의 둘레의 길이를 구하시오. [3점]

25. 도함수가 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

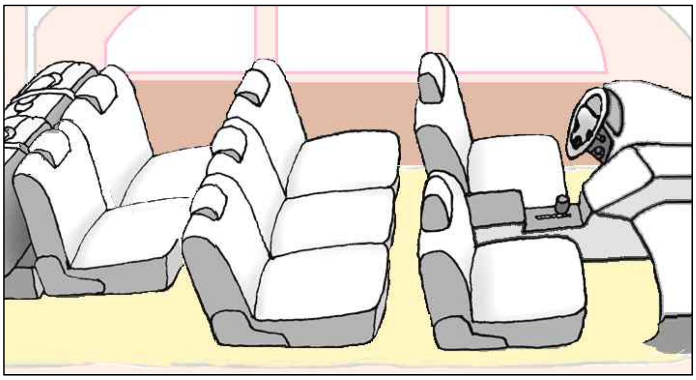
(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $f(\pi)=0$
(다) $\int_{0}^{\pi} x^2 f'(x)\,dx=-8\pi$

$\int_{-\pi}^{\pi}(x+\cos x)f(x)\,dx=k\pi$일 때, k의 값을 구하시오. [3점]

26. 한 변의 길이가 1인 정육각형의 6개의 꼭짓점 중에서 임의로 서로 다른 3개의 점을 택하여 이 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만들 때, 이 삼각형의 넓이를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}\left(X \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

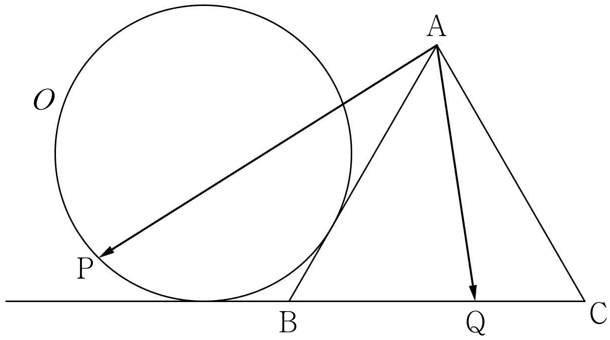


27. 그림과 같이 7개의 좌석이 있는 차량에 앞줄에 2개, 가운데 줄에 3개, 뒷줄에 2개의 좌석이 배열되어 있다. 이 차량에 1학년 생도 2명, 2학년 생도 2명, 3학년 생도 2명이 탑승하려고 한다. 이 7개의 좌석 중 6개의 좌석에 각각 한 명씩 생도 6명이 앉는다고 할 때, 3학년 생도 2명 중 한 명은 운전석에 앉고 1학년 생도 2명은 같은 줄에 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. [4점]



28. 함수 $f(x)=(x^3-a)e^x$ 과 실수 t 에 대하여 방정식 $f(x)=t$ 의 실근의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 불연속인 점의 개수가 2 가 되도록 하는 10 이하의 모든 자연수 a 의 값의 합을 구하시오. (단, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$) [4점]

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC와 반지름의 길이가 1이고 선분 AB와 직선 BC에 동시에 접하는 원 O가 있다. 원 O 위의 점 P와 선분 BC 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $a+b\sqrt{3}$ 이다. a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이고, 원 O의 중심은 삼각형 ABC의 외부에 있다.) [4점]



30. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-ax-a$의 역함수가 존재할 때, $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 자연수 n에 대하여 $n\times g'(n)=1$을 만족시키는 실수 a의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{27} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

제3교시

2019학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

가형

성명	

수험번호							

○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, ‘0’이 포함된 경우에는 ‘0’을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1. 두 벡터 $\vec{a}=(6,\ 2,\ 4)$, $\vec{b}=(1,\ 3,\ 2)$에 대하여 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

2. 함수 $f(x)=\ln(2x+3)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{4}{7}$

3. 방정식 $2^x + \frac{16}{2^x} = 10$의 모든 실근의 합은? [2점]

① 3 ② $\log_2 10$ ③ $\log_2 12$ ④ $\log_2 14$ ⑤ 4

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(B) = \frac{2}{5}, \qquad \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{4}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

5. 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(5, a, -3)$, $\mathrm{B}(6, 4, b)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이 x축 위에 있을 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

6. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	b	1

$\mathrm{E}(X)=\frac{11}{6}$일 때, $\frac{b}{a}$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0<t<\pi)$에서의 위치 $\mathrm{P}(x,\,y)$가

$$x=\cos t+2,\qquad y=3\sin t+1$$

이다. 시각 $t=\dfrac{\pi}{6}$에서 점 P의 속력은? [3점]

① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{6}$　③ $\sqrt{7}$　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

8. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

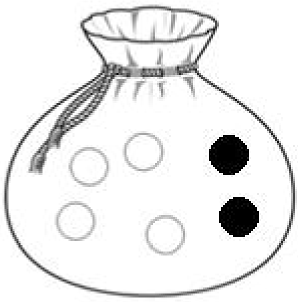
$$\int_{1}^{e^2} \frac{f(1+2\ln x)}{x}\,dx = 5$$

일 때, $\int_{1}^{5} f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

9. 흰 공 4개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공의 색을 확인한 후 다시 넣는 시행을 5회 반복한다. 각 시행에서 꺼낸 공이 흰 공이면 1점을 얻고, 검은 공이면 2점을 얻을 때, 얻은 점수의 합이 7일 확률은? [3점]

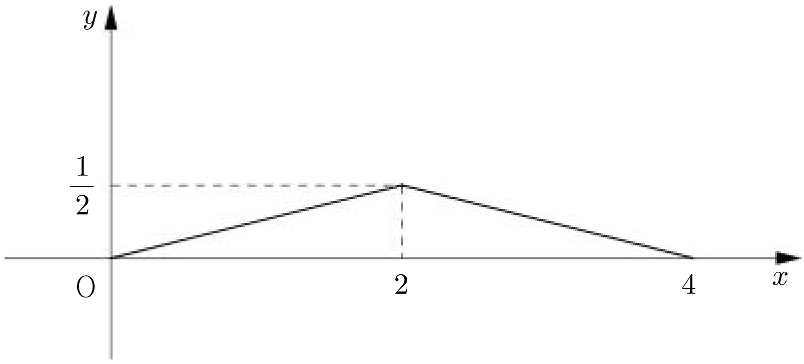
① $\frac{80}{243}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{82}{243}$ ④ $\frac{83}{243}$ ⑤ $\frac{28}{81}$



10. 곡선 $y=e^{\frac{x}{3}}$과 이 곡선 위의 점 $(3, e)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [3점]

① $\frac{e}{2}-1$ ② $e-2$ ③ $\frac{3}{2}e-3$ ④ $2e-4$ ⑤ $\frac{5}{2}e-5$

11. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \leq X \leq 4$이고, X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다. $1 < k < 2$일 때, $\mathrm{P}(k \leq X \leq 2k)$가 최대가 되도록 하는 k의 값은? [3점]



① $\frac{7}{5}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{17}{10}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

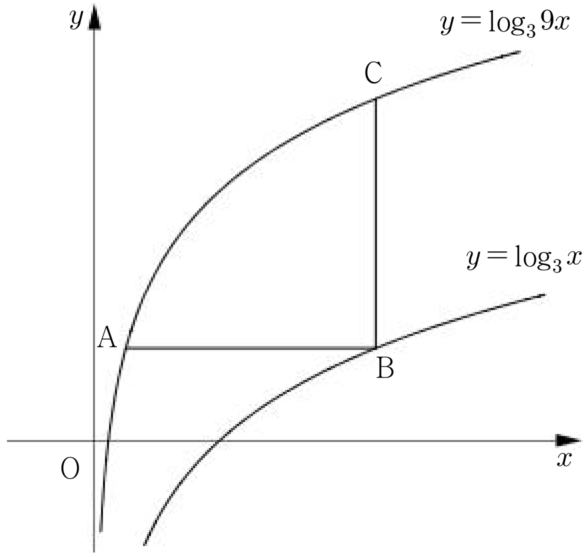
12. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=x^2e^{-x}+\int_1^x f(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{e+1}{e^2}$ ③ $\frac{e+2}{e^2}$ ④ $\frac{e+3}{e^2}$ ⑤ $\frac{e+4}{e^2}$

13. 곡선 $y=\log_3 9x$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, b)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_3 x$와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_3 9x$와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$일 때, $a+3^b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]



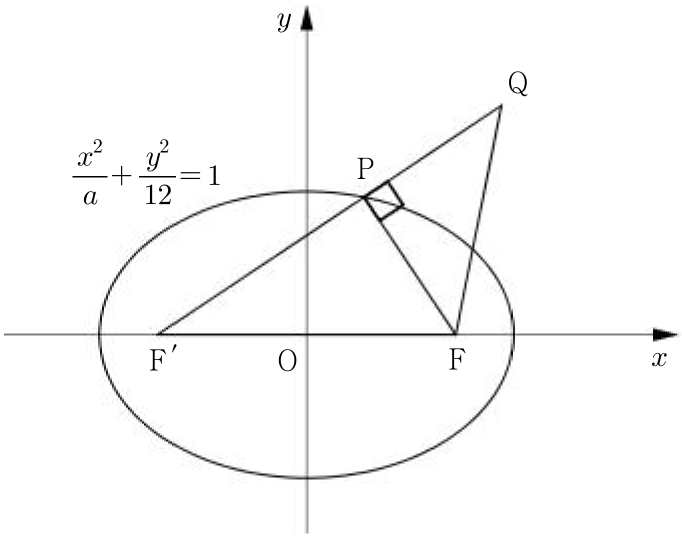
① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

14. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)\sin x$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은? [4점]

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}=0$	(나) $\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{x}=6$

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

15. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F$'$이라 하자. 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{12}=1$ 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 F$'$P의 연장선 위에 점 Q를 $\overline{\mathrm{F'Q}}=10$이 되도록 잡는다. 삼각형 PFQ가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 QF$'$F의 넓이는? (단, $a>12$) [4점]

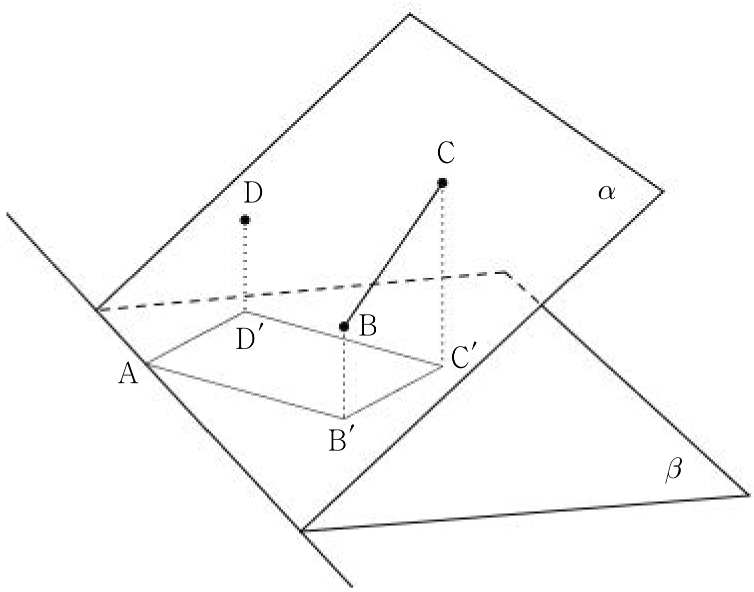


① 15　② $\frac{35}{2}$　③ 20　④ $\frac{45}{2}$　⑤ 25

16. 서로 다른 6개의 사탕을 세 명의 어린이 A, B, C에게 남김없이 나누어 줄 때, 어린이 A가 받은 사탕의 개수가 어린이 B가 받은 사탕의 개수보다 많도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 사탕을 하나도 받지 못하는 어린이는 없다.) [4점]

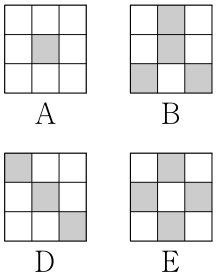
① 180 ② 190 ③ 200 ④ 210 ⑤ 220

17. 그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 점 A가 있다. 평면 α 위의 세 점 B, C, D의 평면 β 위로의 정사영을 각각 B′, C′, D′이라 할 때, 사각형 AB′C′D′은 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$인 정사각형이고, $\overline{BB'}=\overline{DD'}$이다. 두 평면 α와 β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta=\frac{3}{4}$이다. 선분 BC의 길이는? (단, 선분 BD와 평면 β는 만나지 않는다.) [4점]

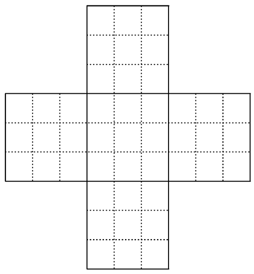


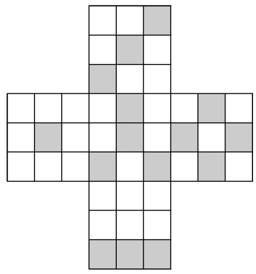
① $\sqrt{35}$ ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{39}$ ④ $\sqrt{41}$ ⑤ $\sqrt{43}$

18. [그림 1]과 같이 5개의 스티커 A, B, C, D, E는 각각 흰색 또는 회색으로 칠해진 9개의 정사각형으로 이루어져 있다. 이 5개의 스티커를 모두 사용하여 [그림 2]의 45개의 정사각형으로 이루어진  모양의 판에 빈틈없이 붙여 문양을 만들려고 한다. [그림 3]은 스티커 B를  모양의 판의 중앙에 붙여 만든 문양의 한 예이다.



[그림 1]


[그림 2]


[그림 3]

다음은 5개의 스티커를 모두 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 문양의 개수를 구하는 과정의 일부이다. (단,  모양의 판을 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

 모양의 판의 중앙에 붙이는 스티커에 따라 다음과 같이 3가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) A 또는 E를 붙이는 경우

나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 $3!$

이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는 $1\times2\times4\times4$

그러므로 이 경우의 수는 $2\times3!\times32$

(ii) B 또는 C를 붙이는 경우

나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 $\boxed{(가)}$

이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는 $1\times1\times2\times4$

그러므로 이 경우의 수는 $2\times\boxed{(가)}\times8$

(iii) D를 붙이는 경우

나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$

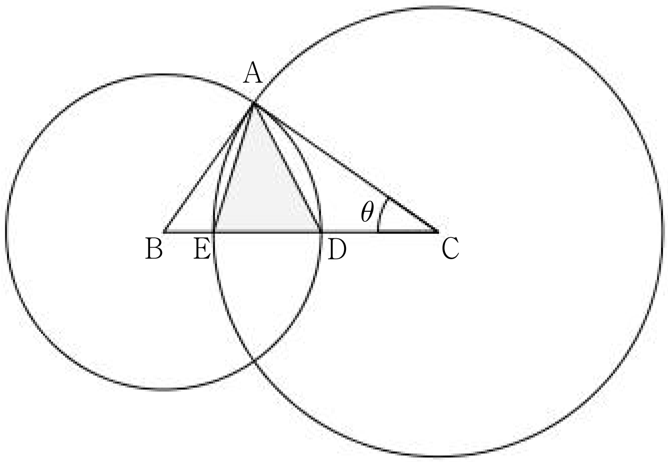
이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는 $\boxed{(다)}$

그러므로 이 경우의 수는 $\boxed{(나)}\times\boxed{(다)}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은? [4점]

① 52 ② 54 ③ 56 ④ 58 ⑤ 60

19. 그림과 같이 선분 BC를 빗변으로 하고, $\overline{\mathrm{BC}}=8$인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AB}}$인 원이 선분 BC와 만나는 점을 D, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AC}}$인 원이 선분 BC와 만나는 점을 E라 하자. $\angle\mathrm{ACB}=\theta$라 할 때, 삼각형 AED의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? [4점]



① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

20. 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(0, 12)$와 양수 t에 대하여 점 $\mathrm{P}(0, t)$와 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$

(나) $\dfrac{t}{3} \le \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| \le \dfrac{t}{2}$

$6 \le t \le 12$에서 $\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은? [4점]

① $12\sqrt{2}$ ② $14\sqrt{2}$ ③ $16\sqrt{2}$ ④ $18\sqrt{2}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

21. 함수 $f(x)=\left|x^2-x\right|e^{4-x}$이 있다. 양수 k에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\leq kx) \\ kx & (f(x)>kx) \end{cases}$$

라 하자. 구간 $(-\infty, \infty)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수를 $h(k)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=2$일 때, $g(2)=4$이다.
ㄴ. 함수 $h(k)$의 최댓값은 4이다.
ㄷ. $h(k)=2$를 만족시키는 k의 값의 범위는 $e^2\leq k<e^4$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. $\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 상수항을 구하시오. [3점]

23. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -14x+a & (x \leq 1) \\ \dfrac{5\ln x}{x-1} & (x>1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

24. 곡선 $x^2+y^3-2xy+9x=19$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

25. 모평균이 85, 모표준편차가 6인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때,

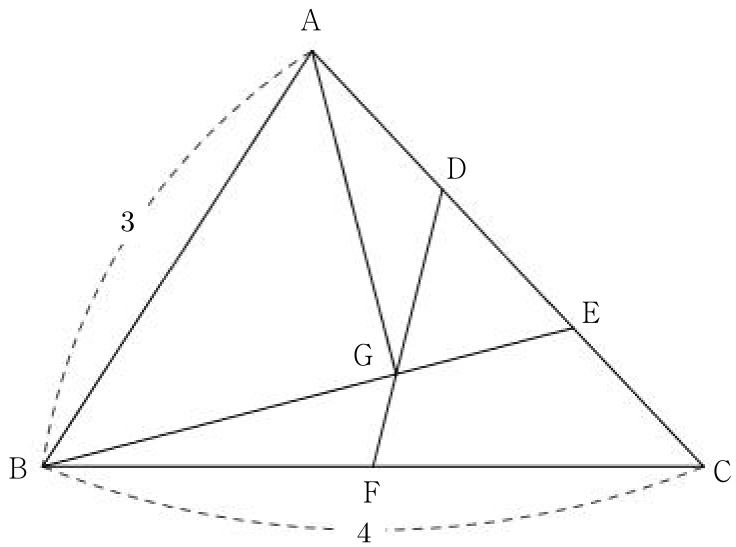
$$\mathrm{P}\left(\overline{X} \geq k\right)=0.0228$$

을 만족시키는 상수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

26. 함수 $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ 의 그래프 위의 두 점 $(0, 0)$, $(1, 1)$ 에서의 접선을 각각 l, m 이라 하자. 두 직선 l, m 이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $12\tan\theta$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점을 E라 하자. 선분 BC의 중점을 F라 하고, 두 선분 BE, DF의 교점을 G라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BE}}=0$일 때, $\cos(\angle \mathrm{ABC})=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28. 1부터 11까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 11장의 카드 중에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 택할 때, 택한 카드에 적혀 있는 숫자를 각각 m, $n\,(m<n)$이라 하자. 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(1,\,0)$, $\mathrm{B}\left(\cos\frac{m\pi}{6},\,\sin\frac{m\pi}{6}\right)$, $\mathrm{C}\left(\cos\frac{n\pi}{6},\,\sin\frac{n\pi}{6}\right)$에 대하여 삼각형 ABC가 이등변삼각형일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29. 좌표공간에 평면 $\alpha : 2x+y+2z-9=0$과 구 $S : (x-4)^2+(y+3)^2+z^2=2$가 있다. $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \leq 3\sqrt{2}$인 평면 α 위의 점 P와 구 S 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, 점 O는 원점이고, a, b는 유리수이다.) [4점]

30. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ 에 대하여 구간 $\left[\dfrac{12}{e^{12}},\ \infty\right)$ 에서 정의된 함수

$$g(t)=\int_0^{12}|f(x)-t|\,dx$$

가 $t=k$ 에서 극솟값을 갖는다. 방정식 $f(x)=k$ 의 실근의 최솟값을 a 라 할 때, $g'(1)+\ln\left(\dfrac{6}{a}+1\right)$ 의 값을 구하시오. [4점]

제 3 교 시

2020학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

가형

성명	

수험번호							

- ○ 먼저 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- ○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.
- ○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- ○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- ○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, '0'이 포함된 경우에는 '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1. 제3사분면의 각 θ에 대하여 $\cos\theta = -\frac{1}{2}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [2점]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

2. 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$, $\mathrm{C}(4,\ 0)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3. $\lim_{x \to 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A^C \cup B) = \frac{2}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

5. 같은 종류의 흰 바둑돌 5개와 같은 종류의 검은 바둑돌 4개가 있다. 이 9개의 바둑돌을 일렬로 나열할 때, 검은 바둑돌 4개 중 2개는 서로 이웃하고, 나머지 2개는 어느 검은 바둑돌과도 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 60 ② 72 ③ 84 ④ 96 ⑤ 108

6. 초점이 F인 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ 6)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}} = k$이다. $a+k$의 값은? [3점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

7. 이산확률변수 X가 가지는 값이 0, 2, 4, 6이고 X의 확률질량함수가

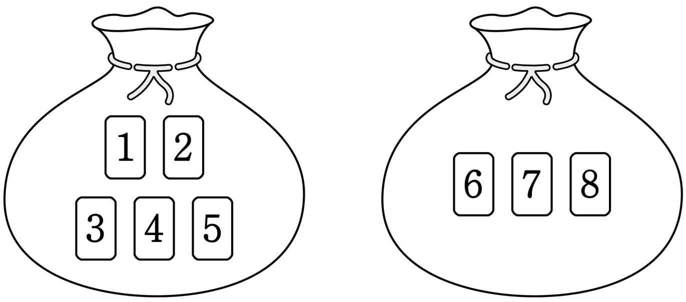
$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} a & (x=0) \\ \dfrac{1}{x} & (x=2,\ 4,\ 6) \end{cases}$$

일 때, $\mathrm{E}(aX)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

8. 주머니 A에는 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 6부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 3장의 카드가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내고, 주머니 B에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낸다. 꺼낸 2장의 카드에 적힌 두 수의 합이 홀수일 때, 주머니 A에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 홀수일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$



주머니 A 주머니 B

9. 평면 α 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B와 평면 α 위에 있지 않은 점 P에 대하여 삼각형 PAB는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다. 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{\mathrm{PH}}=4$일 때, 삼각형 HAB의 넓이는? [3점]

① $3\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{7}$ ④ 9 ⑤ $3\sqrt{11}$

10. 함수 $f(x)=\dfrac{6x^3}{x^2+1}$ 의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

11. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 2,\ 1)$, $\mathrm{B}(a,\ b,\ c)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 y축 위에 있다. 직선 AB와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$이다. 양수 b의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

12. $0 \le x \le 2\pi$ 일 때, 방정식 $\tan 2x \sin 2x = \frac{3}{2}$ 의 모든 해의 합은? [3점]

① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

13. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 꼭짓점 중 x좌표가 음수인 점을 중심으로 하는 원 C가 있다. 점 $(3,\ 0)$을 지나고 원 C에 접하는 두 직선이 각각 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$과 한 점에서만 만날 때, 원 C의 반지름의 길이는? [3점]

① 2　② $\sqrt{5}$　③ $\sqrt{6}$　④ $\sqrt{7}$　⑤ $2\sqrt{2}$

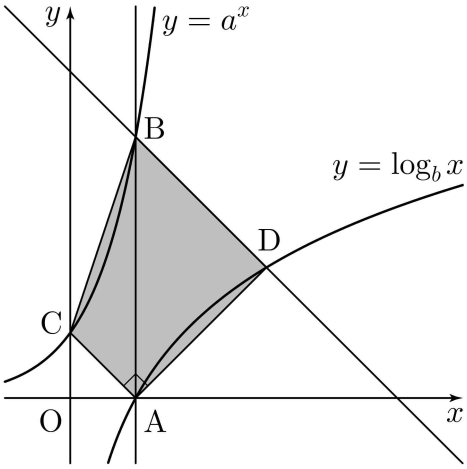
14. 어느 도시의 직장인들이 하루 동안 도보로 이동한 거리는 평균이 $m$km, 표준편차가 σkm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시의 직장인들 중에서 36명을 임의추출하여 조사한 결과 36명이 하루 동안 도보로 이동한 거리의 총합은 216km이었다. 이 결과를 이용하여, 이 도시의 직장인들이 하루 동안 도보로 이동한 거리의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $a \le m \le a+0.98$이다. $a+\sigma$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [4점]

① 6.96 ② 7.01 ③ 7.06 ④ 7.11 ⑤ 7.16

15. 두 상수 a, $b\,(b<0<a)$에 대하여 직선 $\dfrac{x-a}{a}=3-y=\dfrac{z}{b}$ 위의 임의의 점과 평면 $2x-2y+z=0$ 사이의 거리가 4로 일정할 때, $a-b$의 값은? [4점]

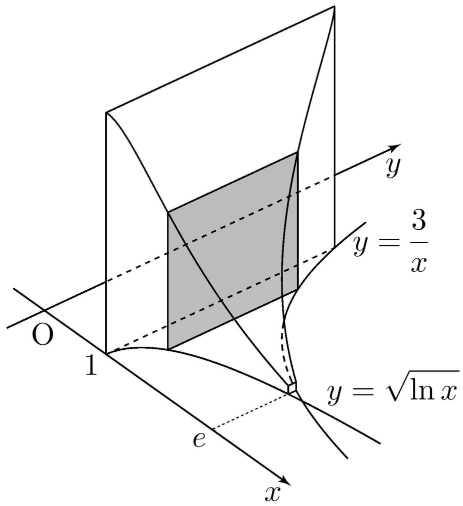
① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

16. 그림과 같이 1보다 큰 두 상수 a, b에 대하여 점 A$(1,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점을 B라 하고, 점 C$(0,\ 1)$에 대하여 점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$이고, 사각형 ADBC의 넓이가 6일 때, $a\times b$의 값은? [4점]



① $4\sqrt{2}$　② $4\sqrt{3}$　③ 8　④ $4\sqrt{5}$　⑤ $4\sqrt{6}$

17. 그림과 같이 두 곡선 $y=\dfrac{3}{x}$, $y=\sqrt{\ln x}$ 와 두 직선 $x=1$, $x=e$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [4점]



① $5-\dfrac{9}{e}$ ② $5-\dfrac{8}{e}$ ③ $5-\dfrac{7}{e}$ ④ $6-\dfrac{9}{e}$ ⑤ $6-\dfrac{8}{e}$

18. 다음은 자연수 n에 대하여 방정식 $a+b+c=3n$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 (a, b, c)가

$a>b$ 또는 $a>c$

를 만족시킬 확률을 구하는 과정이다.

방정식

$a+b+c=3n$ …… $(*)$

을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.

방정식 $(*)$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)가 $a>b$ 또는 $a>c$를 만족시키는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 방정식 $(*)$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)가 $a \le b$와 $a \le c$를 만족시키는 사건이다.

이제 $n(A^C)$의 값을 구하자.

자연수 $k\,(1 \le k \le n)$에 대하여 $a=k$인 경우,

$b \ge k$, $c \ge k$이고 방정식 $(*)$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $\boxed{\text{(나)}}$이므로

$$n(A^C)=\sum_{k=1}^{n}\boxed{\text{(나)}}$$

이다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 식에 $n=2$를 대입한 값을 p, (나)에 알맞은 식에 $n=7$, $k=2$를 대입한 값을 q, (다)에 알맞은 식에 $n=4$를 대입한 값을 r라 할 때, $p\times q\times r$의 값은? [4점]

① 88 ② 92 ③ 96 ④ 100 ⑤ 104

19. 함수 $f(x) = xe^{2x} - (4x+a)e^{x}$ 이 $x = -\frac{1}{2}$ 에서 극댓값을 가질 때, $f(x)$ 의 극솟값은? (단, a 는 상수이다.) [4점]

① $1 - \ln 2$ ② $2 - 2\ln 2$ ③ $3 - 3\ln 2$ ④ $4 - 4\ln 2$ ⑤ $5 - 5\ln 2$

20. 두 상수 a, b와 함수 $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+1}$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(b-x) & (x \ge a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\displaystyle\int_a^{a-b} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{2}\ln 5$　② $\ln 5$　③ $\dfrac{3}{2}\ln 5$　④ $2\ln 5$　⑤ $\dfrac{5}{2}\ln 5$

21. 두 함수

$$f(x)=4\sin\frac{\pi}{6}x,$$

$$g(x)=|2\cos kx+1|$$

이 있다. $0<x<2\pi$에서 정의된 함수

$$h(x)=(f\circ g)(x)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 자연수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=1$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=\frac{2}{3}\pi$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $k=2$일 때, 방정식 $h(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

ㄷ. 함수 $|h(x)-k|$가 $x=\alpha\ (0<\alpha<2\pi)$에서 미분가능하지 않은 실수 α의 개수를 a_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{4}a_k=34$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 함수 $f(x)=(3x+e^x)^3$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x=2\sqrt{2}\sin t+\sqrt{2}\cos t,\ y=\sqrt{2}\sin t+2\sqrt{2}\cos t$$

가 있다. 이 곡선 위의 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 y 절편을 구하시오. [3점]

24. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \geq 128) = \mathrm{P}(X \leq 140)$
(나) $\mathrm{P}(m \leq X \leq m+10) = \mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 0)$

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

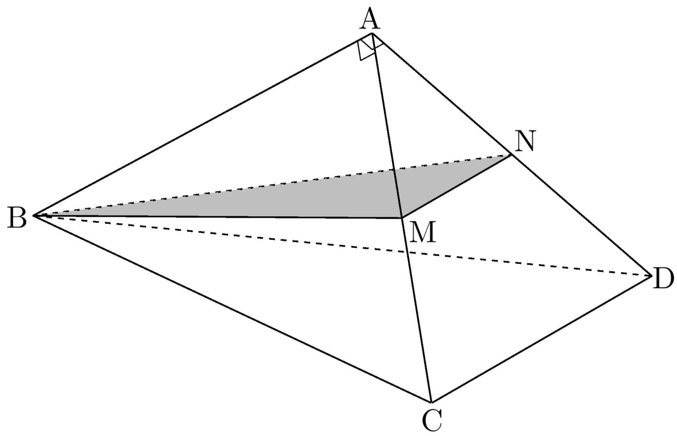
$\mathrm{P}(X \geq k) = 0.0668$을 만족시키는 상수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [3점]

25. 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9개의 공을 같은 종류의 세 상자에 3개씩 나누어 넣으려고 한다. 세 상자 중 어떤 한 상자에 들어 있는 3개의 공에 적힌 수의 합이 나머지 두 상자에 들어 있는 6개의 공에 적힌 수의 합보다 크도록 9개의 공을 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 공을 넣는 순서는 고려하지 않는다.) [3점]

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ACD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

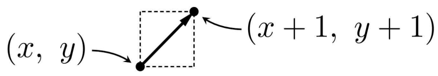
(가) $\overline{\mathrm{BC}}=3\sqrt{10}$
(나) $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$

두 모서리 AC, AD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 삼각형 BMN의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. $40\times S$의 값을 구하시오. [4점]

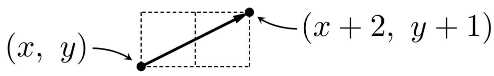


27. 한 번 누를 때마다 좌표평면 위의 점 P를 다음과 같이 이동시키는 두 버튼 ㉠, ㉡이 있다.

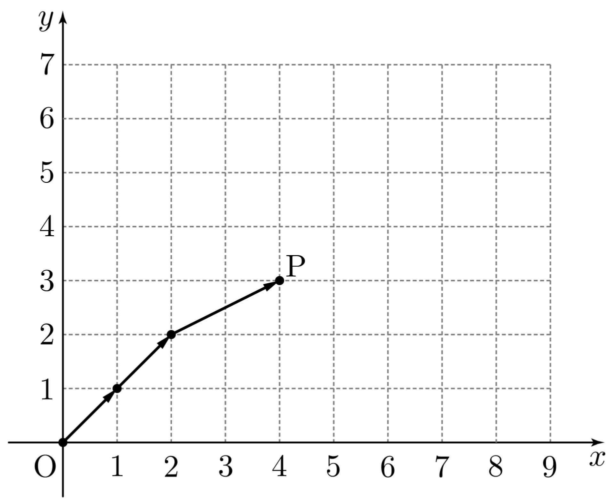
[버튼 ㉠] 그림과 같이 길이가 $\sqrt{2}$ 인 선분을 따라 점 (x, y)에 있는 점 P를 점 $(x+1, y+1)$로 이동시킨다.



[버튼 ㉡] 그림과 같이 길이가 $\sqrt{5}$ 인 선분을 따라 점 (x, y)에 있는 점 P를 점 $(x+2, y+1)$로 이동시킨다.

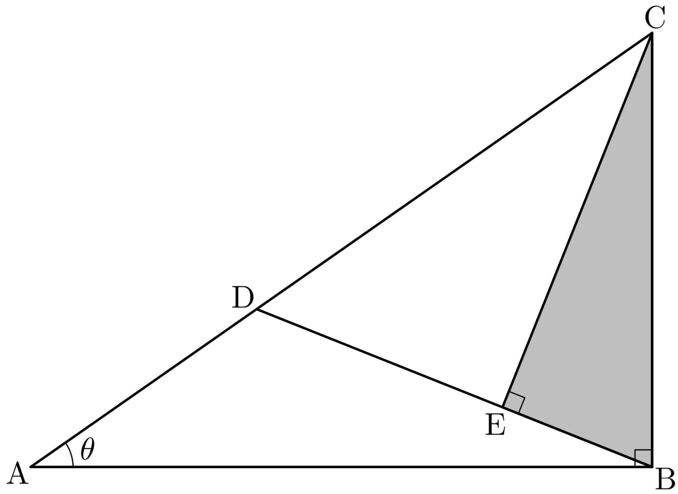


예를 들어, 버튼을 ㉠, ㉠, ㉡ 순으로 누르면 원점 $(0, 0)$에 있는 점 P는 아래 그림과 같이 세 선분을 따라 점 $(4, 3)$으로 이동한다. 또한 원점 $(0, 0)$에 있는 점 P를 점 $(4, 3)$으로 이동시키도록 버튼을 누르는 경우는 ㉠㉠㉡, ㉠㉡㉠, ㉡㉠㉠으로 3가지이다.



원점 $(0, 0)$에 있는 점 P를 두 점 A$(5, 5)$, B$(6, 4)$ 중 어느 점도 지나지 않고 점 C$(9, 7)$로 이동시키도록 두 버튼 ㉠, ㉡을 누르는 경우의 수를 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$ 이고 $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\angle\mathrm{CAB}=\theta$ 라 하자. 선분 AC 를 4 : 7 로 내분하는 점을 D 라 하고 점 C 에서 선분 BD 에 내린 수선의 발을 E 라 할 때, 삼각형 CEB 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 좌표공간에 구 $C: x^2+y^2+(z+2)^2=2$와 점 $\mathrm{A}(0,\ 3,\ 3)$이 있다. 구 C 위의 점 P와 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QA}}=3\sqrt{6}$을 만족시키는 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값은 $p\sqrt{2}+q\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p, q는 유리수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x}\frac{f(t)}{|t|+1}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(2)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이다.

$g'(-1)$의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)=\dfrac{n}{m-3\ln 3}$일 때, $|m\times n|$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이고, $\ln 3$은 $1<\ln 3<1.1$인 무리수이다.) [4점]

제 3 교 시

2021학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역 가형

성명	

수험번호							

○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 먼저 <u>문제지</u>의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하시오.

○ <u>답안지</u>의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.

○ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, ‘0’이 포함된 경우에는 ‘0’을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

공 란

1. $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{8}{27}$ ④ $\frac{16}{81}$ ⑤ $\frac{32}{243}$

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+5n}-n}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

3. $\sin\theta = -\frac{1}{3}$ 일 때, $\frac{\cos\theta}{\tan\theta}$ 의 값은? [2점]

① -4　② $-\frac{11}{3}$　③ $-\frac{10}{3}$　④ -3　⑤ $-\frac{8}{3}$

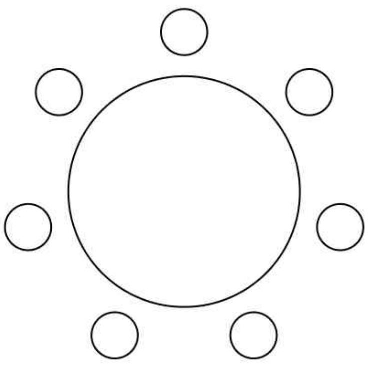
4. $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^5$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는? [3점]

① 5　② 10　③ 15　④ 20　⑤ 25

5. 함수 $y=4^{x}-1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=2^{2x-3}+3$의 그래프와 일치할 때, ab의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

6. 그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A, B, C를 포함한 7명의 학생이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A, B, C 세 명 중 어느 두 명도 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 108 ② 120 ③ 132 ④ 144 ⑤ 156

7. 곡선 $x^2-2xy+3y^3=5$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $-\frac{6}{5}$　② $-\frac{5}{4}$　③ $-\frac{4}{3}$　④ $-\frac{3}{2}$　⑤ -2

8. x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x} \geq \left(\dfrac{1}{16}\right)^{x-1} \\ \log_2 4x < \log_2 (x+k) \end{cases}$$

의 해가 존재하지 <u>않도록</u> 하는 양수 k의 최댓값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

9. 다섯 개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 3개의 수를 택할 때, 택한 세 수의 곱이 6 이상인 경우의 수는? [3점]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

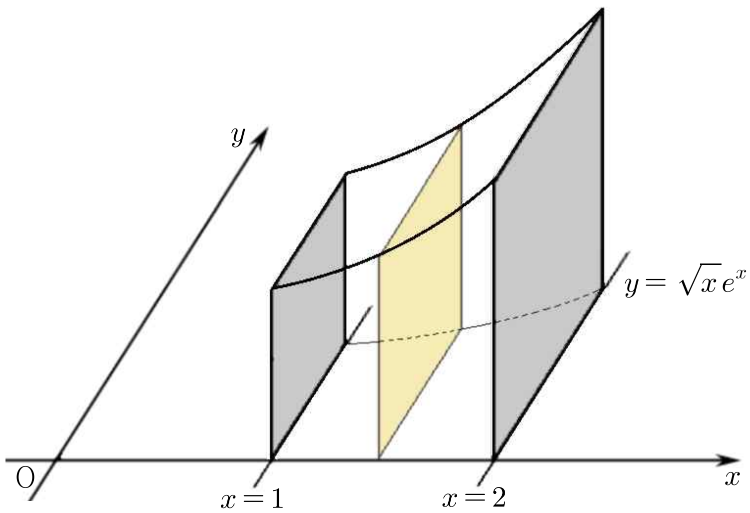
10. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\cos^2 3x - \sin 3x + 1 = 0$의 모든 실근의 합은? [3점]

① $\frac{3}{2}\pi$ ② $\frac{7}{4}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{9}{4}\pi$ ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

11. 함수 $f(x)=\dfrac{e^x}{\sin x+\cos x}$ 에 대하여 $-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi$ 에서 방정식 $f(x)-f'(x)=0$ 의 실근은? [3점]

① $-\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{6}$　③ $\dfrac{\pi}{4}$　④ $\dfrac{\pi}{3}$　⑤ $\dfrac{\pi}{2}$

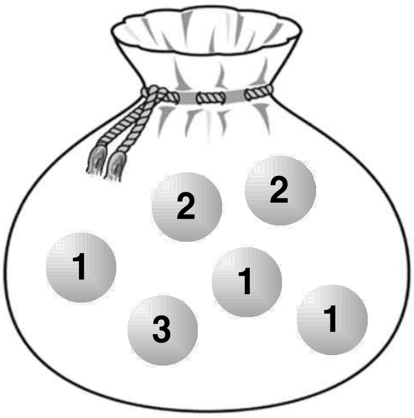
12. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}e^{x}\,(1 \le x \le 2)$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\dfrac{e^4+e^2}{4}$ ② $\dfrac{2e^4-e^2}{4}$ ③ $\dfrac{2e^4+e^2}{4}$ ④ $\dfrac{3e^4-e^2}{4}$ ⑤ $\dfrac{3e^4+e^2}{4}$

13. 주머니에 1, 1, 1, 2, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 두 수의 차를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은? [3점]

① $\frac{14}{15}$ ② 1 ③ $\frac{16}{15}$ ④ $\frac{17}{15}$ ⑤ $\frac{6}{5}$



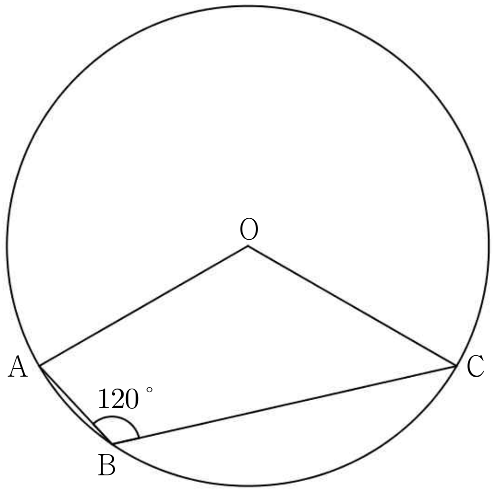
14. 함수 $f(x)=\ln x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$의 값은? [4점]

① $\ln 2$ ② $(\ln 2)^2$ ③ $\frac{\ln 2}{2}$ ④ $\frac{(\ln 2)^2}{2}$ ⑤ $\frac{(\ln 2)^2}{4}$

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$$\angle ABC = 120^\circ,\ \overline{AB} + \overline{BC} = 2\sqrt{15}$$

일 때, 사각형 OABC의 넓이는? [4점]



① $5\sqrt{3}$　② $\frac{11\sqrt{3}}{2}$　③ $6\sqrt{3}$　④ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$　⑤ $7\sqrt{3}$

16. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 4^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20, \sigma^2)$을 따른다. 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$일 때, $f(x)$와 두 확률변수 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+10)=f(20-x)$이다.
> (나) $\mathrm{P}(X \geq 17)=\mathrm{P}(Y \leq 17)$

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

$\mathrm{P}(X \leq m+\sigma)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $\sigma > 0$) [4점]

① 0.6915 ② 0.7745 ③ 0.9104 ④ 0.9332 ⑤ 0.9772

17. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2n)!}{2^n} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{{}_2\mathrm{P}_1}{2^1}=1$이고, (우변)$=\boxed{\text{(가)}}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2m)!}{2^m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} + \frac{{}_{2m+2}\mathrm{P}_{m+1}}{2^{m+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} + \frac{\boxed{\text{(나)}}}{2^{m+1}\times(m+1)!} \\ &\le \frac{(2m)!}{2^m} + \frac{\boxed{\text{(나)}}}{2^{m+1}\times(m+1)!} \\ &= \frac{\boxed{\text{(나)}}}{2^{m+1}} \times \left\{ \frac{1}{\boxed{\text{(다)}}} + \frac{1}{(m+1)!} \right\} \\ &< \frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2n)!}{2^n}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $p+\frac{f(2)}{g(4)}$의 값은? [4점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

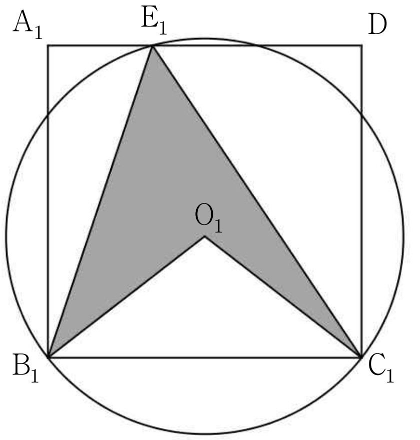
18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n+1} = -a_n + 3a_{n+1}$
(나) $a_{2n+2} = a_n - a_{n+1}$

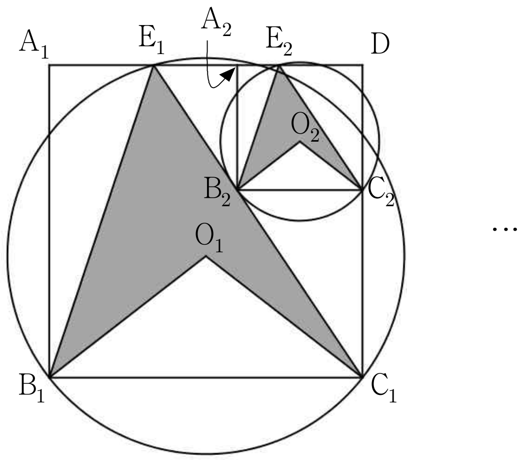
$a_1 = 1,\ a_2 = 2$일 때, $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은? [4점]

① 31　② 33　③ 35　④ 37　⑤ 39

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 $A_1B_1C_1D$에서 선분 A_1D를 $1:2$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 세 점 B_1, C_1, E_1을 지나는 원의 중심을 O_1이라 하자. 삼각형 $E_1B_1C_1$의 내부와 삼각형 $O_1B_1C_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 E_1D 위의 점 A_2, 선분 E_1C_1 위의 점 B_2, 선분 C_1D 위의 점 C_2와 점 D를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D$를 그린다. 정사각형 $A_2B_2C_2D$에서 선분 A_2D를 $1:2$로 내분하는 점을 E_2라 하고, 세 점 B_2, C_2, E_2를 지나는 원의 중심을 O_2라 하자. 삼각형 $E_2B_2C_2$의 내부와 삼각형 $O_2B_2C_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2 ⋯

① $\frac{90}{7}$ ② $\frac{275}{21}$ ③ $\frac{40}{3}$ ④ $\frac{95}{7}$ ⑤ $\frac{290}{21}$

20. 세 상수 a, b, c $(a > 0,\ c > 0)$에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} -ax^2 + 6ex + b & (x < c) \\ a(\ln x)^2 - 6\ln x & (x \geq c) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (나) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$f\left(\dfrac{1}{2e}\right)$의 값은? [4점]

① $-4\left(e^2 + \dfrac{1}{4e^2}\right)$ ② $-4\left(e^2 - \dfrac{1}{4e^2}\right)$ ③ $-3\left(e^2 + \dfrac{1}{4e^2}\right)$

④ $-3\left(e^2 - \dfrac{1}{4e^2}\right)$ ⑤ $-2\left(e^2 + \dfrac{1}{4e^2}\right)$

21. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x |t\sin t|\,dt-\left|\int_0^x t\sin t\,dt\right|$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

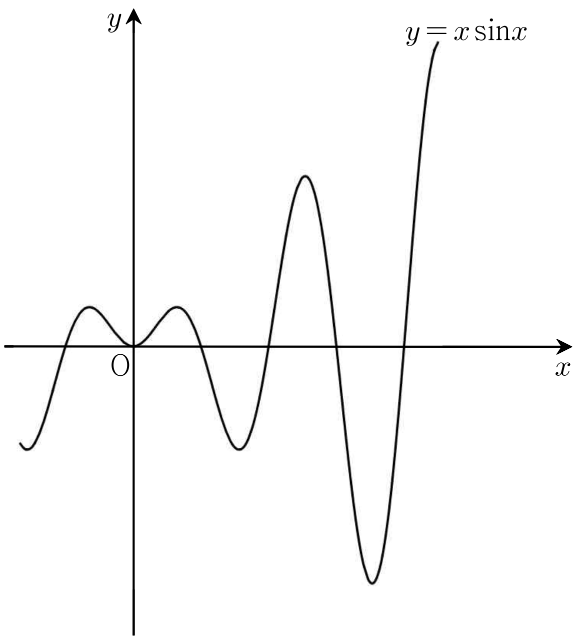
<보 기>

ㄱ. $f(2\pi)=2\pi$

ㄴ. $\pi<\alpha<2\pi$인 α에 대하여 $\int_0^{\alpha} t\sin t\,dt=0$이면 $f(\alpha)=\pi$이다.

ㄷ. $2\pi<\beta<3\pi$인 β에 대하여 $\int_0^{\beta} t\sin t\,dt=0$이면 $\int_{\beta}^{3\pi} f(x)\,dx=6\pi(3\pi-\beta)$이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



22. 함수 $f(x)=5\sin\left(\frac{\pi}{2}x+1\right)+3$ 의 주기를 p, 최댓값을 M이라 할 때, $p+M$의 값을 구하시오. [3점]

23. 모평균이 15이고 모표준편차가 8인 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})$의 값을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{(x^2-6x+9)^n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

25. 흰 구슬 3개와 검은 구슬 4개가 들어 있는 상자가 있다. 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 3의 배수이면 이 상자에서 임의로 2개의 구슬을 동시에 꺼내고, 나오는 눈의 수가 3의 배수가 아니면 이 상자에서 임의로 3개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 구슬 중 검은 구슬의 개수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

26. 두 실수 a, b와 수열 $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(m+2)$개의 수

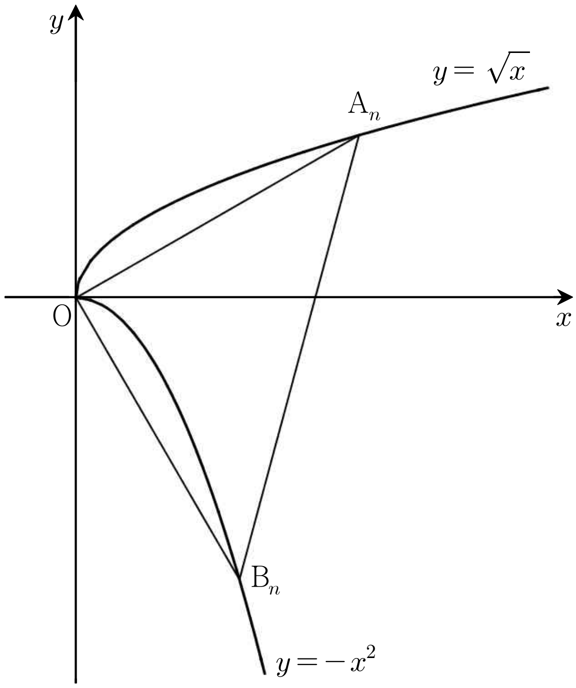
$$a,\ \log_2 c_1,\ \log_2 c_2,\ \log_2 c_3,\ \cdots\ ,\ \log_2 c_m,\ b$$

가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

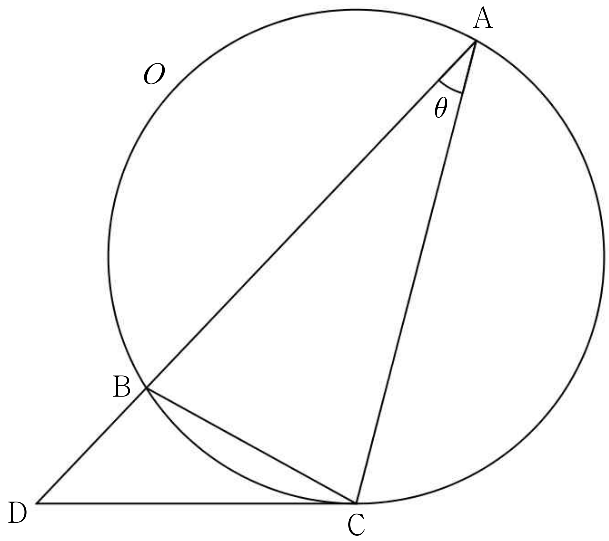
(나) 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 항을 모두 곱한 값은 32이다.

$a+b=1$일 때, 자연수 m의 값을 구하시오. [4점]

27. 모든 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{A}_n(n^2, n)$과 곡선 $y=-x^2\ (x \geq 0)$ 위의 점 B_n이 $\overline{\mathrm{OA}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}$을 만족시킨다. 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{2S_n}{n^2}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



28. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=4$인 이등변삼각형 ABC에 외접하는 원 O가 있다. 점 C를 지나고 원 O에 접하는 직선과 직선 AB의 교점을 D라 하자. $\angle CAB=\theta$라 할 때, 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$) [4점]



29. 그림은 여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 여섯 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타난 예이다.

1	2	4	3	5	6

이 여섯 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타날 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 두 함수 $f(x)=x^2-ax+b\ (a>0)$, $g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$에 대하여 상수 k와 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(0)<h(4)$
(나) 방정식 $\lvert h(x)\rvert=k$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그중 가장 큰 실근을 α라 할 때 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

$f(1)=-\frac{7}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+16b$의 값을 구하시오.

(단, $\frac{5}{2}<e<3$이고, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이다.) [4점]

공 란