01. [첫 문제니까 매너는 해드릴게]

sol)

시작부터 약간 참신한 방법으로 풀어보겠습니다. 이차정사각행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않을 필요충분조건은 $D = ad - bc = 0$인 것입니다. 보통 a, b, c, d 중에 0이 포함되어 있으면 계산이 너무 뻔하게 보이니까 $abcd \neq 0$이라 가정하고서 $ad - bc = 0$을 변형해보면 $ad = bc$에서 $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ 혹은 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$가 됩니다.

	$\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = k$	$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k'$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ck & dk \\ c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} bk' & b \\ dk' & d \end{pmatrix}$
$D = 0$이면	행이 서로 상수배	열이 서로 상수배

따라서, $A + E = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$에서 역행렬이 존재하지 않으려면 2행의 두 배가 1행이라 하면, 혹은 2열이 1열의 세 배라 하면 $a = 6$이 되어야 합니다.

[2008년 07월 교육청 수리(가형) 15번]

15. 함수 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 $y = f(x)$의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 위의 임의의 점 $\mathrm{Q}(c,\ d)$로 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 만든다. 다음 함수로 행렬 A를 만들 때, 역행렬 A^{-1}이 항상 존재하는 것은? [4점]

① $y = x + 1$　② $y = \log x$　③ $y = 2^x$　④ $y = \sqrt{x-1}$　⑤ $y = \dfrac{1}{x}$

역행렬이 존재하려면 $\dfrac{b}{a} \neq \dfrac{d}{c}$여야 하고, 이는 곧 원점을 지나면서 또 $f(x)$와 $f^{-1}(x)$를 동시에 지나는 직선이 존재해선 안 된다는 것이니(?!!) 답은 ④번이겠죠?

02. [삼각함수 덧셈정리]

sol)

설마 포카칩님이 탄젠트의 삼배각 공식을 외우고 있길 요구했을 리는 없을테니 순서대로 $\tan\theta \;\rightarrow\; \tan 2\theta = \tan(\theta + \theta) \;\rightarrow\; \tan 3\theta = \tan(\theta + 2\theta)$를 구해서 풀기를 의도했겠죠?

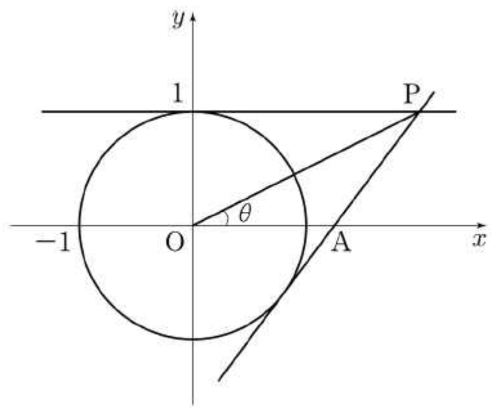
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \tan 3\theta = \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{3}}{1 - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}} = \frac{3+8}{6-4} = \frac{11}{2}$$

하지만 사실 평가원 기출문제에 이미 나왔던 아이디어입니다.

[2012년 05월 평가원 수학(B형) 16번]

16. 그림과 같이 직선 $y = 1$ 위의 점 P에서 원 $x^2 + y^2 = 1$에 그은 접선이 x축과 만나는 점을 A라 하고, $\angle\mathrm{AOP} = \theta$라 하자. $\overline{\mathrm{OA}} = \dfrac{5}{4}$일 때, $\tan 3\theta$의 값은? (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$이다.) [4점]

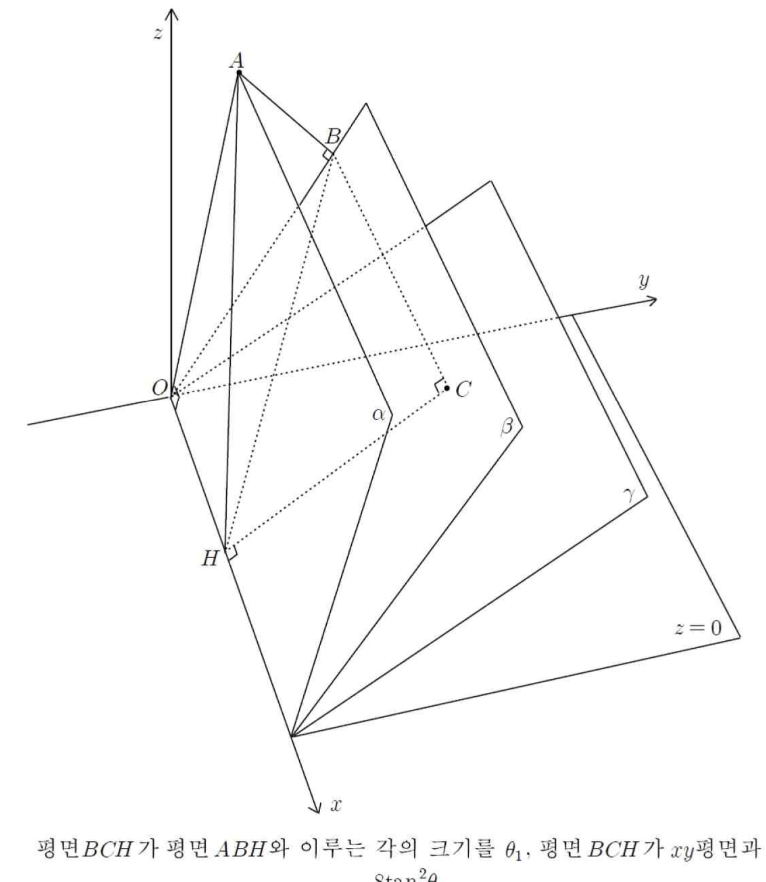


① 4　② $\dfrac{9}{2}$　③ 5　④ $\dfrac{11}{2}$　⑤ 6

그리고 일찍이 베르테르님도 이걸 문제화 하셨었죠.

77.좌표공간에서 평면 $\alpha : 11y = 2z\,(z \geq 0)$위의 한점 A에서 평면 $\beta : 4y = 3z$위로 내린 수선의 발을 B라 하고, 평면 $\gamma : y = 2z$위의 한점 C에서 x축위로 내린 수선의 발을 H라 할 때, 원점 O와 네 점 A, B, C, H가 다음조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{OA} \perp \overline{OH}$, $\overline{OA} = 5\sqrt{5}$
(나) $\overline{BC} \perp \overline{CH}$, $\overline{BC} = 4\sqrt{5}$



평면 BCH가 평면 ABH와 이루는 각의 크기를 θ_1, 평면 BCH가 xy평면과 이루는 각의 크기를 θ_2라 할 때, $\dfrac{8\tan^2\theta_1}{\cos^2\theta_2}$의 값을 구하시오.[4점]
(단, 두 점 O, H는 서로 다른 두 점이다.)

포만한 수학 연구소

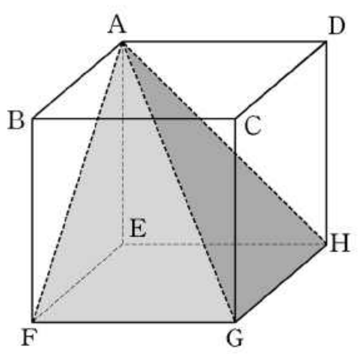
03. [두 평면의 법선벡터가 가리키는 방향]

sol)
두 평면의 법선 벡터 간에 내적을 해보면 $\cos\theta$ 혹은 $\cos(\pi-\theta)$가 나오는데 어차피 제곱하면 같기 때문에 맘 편하게 코사인 값을 계산해서 다시 제곱하면 됩니다.

$$\therefore \cos\theta = \frac{8+1+1}{\sqrt{6}\sqrt{18}} = \frac{5}{3\sqrt{3}} \rightarrow \cos^2\theta = \frac{25}{27}$$

[2006년 11월 대수능 수리(가형) 06번]

6. 정육면체 ABCD−EFGH에서 평면 AFG와 평면 AGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은? [3점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

04. [가비의 리]

sol.1)
$a_n = 1\cdot r^{n-1}$이라 두면 $\dfrac{r^4+r^6}{r+r^3} = \dfrac{r^4(1+r^2)}{r(1+r^2)} = r^3 = 4$이고,

$\therefore a_4 + a_7 = r^3 + r^6 = 4 + 16 = 20$

sol.2)
등장하는 항들을 보아하니 가비의 리가 성립합니다.

$$\frac{a_5}{a_2} = \frac{a_7}{a_4} = \frac{a_5+a_7}{a_2+a_4} = r^3 = 4$$

거기다 한 술 더 떠서 구하라고 하는 값이 미리 짜 맞추기라도 한 듯 a_4+a_7로 $a_4 = r^3, a_7 = r^6$으로 $a_4 + a_7 = 4 + 4^2 = 20$이 답이 됩니다.

[2008년 11월 대수능 수리(나형) 21번]

21. $1<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여

$$\frac{3a}{\log_a b} = \frac{b}{2\log_b a} = \frac{3a+b}{3}$$

가 성립할 때, $10\log_a b$의 값을 구하시오. [3점]

역시 가비의 리가 성립해서 $\log_a b = t$라 두면 $t + \dfrac{2}{t} = 3$에서 $10t = 20$이 됩니다. $\because 1 < a < b$이므로 $t > 1$

05. [기준을 잡은 후 대략적인 경우 나누기]

sol.1)
잘 생각해보면 같은 숫자를 최대 세 번까지 사용이 가능합니다. 따라서 다음과 같이 크게 경우를 나누면 네 가지를 생각할 수 있습니다. 가령, $3+1$의 카드 구성으로 만들 수 있는 숫자는 1113이나 3233등이 있고, $2+1+1$의 카드 구성으로 만들 수 있는 숫자로 4243이나 2344등이 있습니다. 그렇게 어떤 숫자 카드를 뽑을지를 고려한 후, 뽑은 카드들을 배열하여 네 자리 수를 만드는 것까지 각 경우를 각각 계산하여 마지막에 취합 해주면 됩니다.

카드 구성	경우의 수
$3+1$	${}_4P_2 \times 4 = 48$
$2+2$	${}_4C_2 \times {}_4C_2 = 36$
$2+1+1$	${}_4C_1 \times {}_3C_2 \times {}_4P_2 = 144$
$1+1+1+1$	$1 \times 4! = 24$
$\therefore 48+36+144+24 = 252$	

sol.2) 중복순열
카드가 만약 4장씩 있었다면 $4^4 = 2^8 = 256$가지로 바로 구할 수 있었겠지만, 3장씩 있다고 하네요. 따라서 추가적인 상황은 여사건 처리로 하여 카드가 4장씩 일때만 만들 수 있는 1111, 2222, 3333, 4444의 네 가지를 뺀 $4^4 - 4 = 252$가지가 답이라고 볼 수 있습니다.

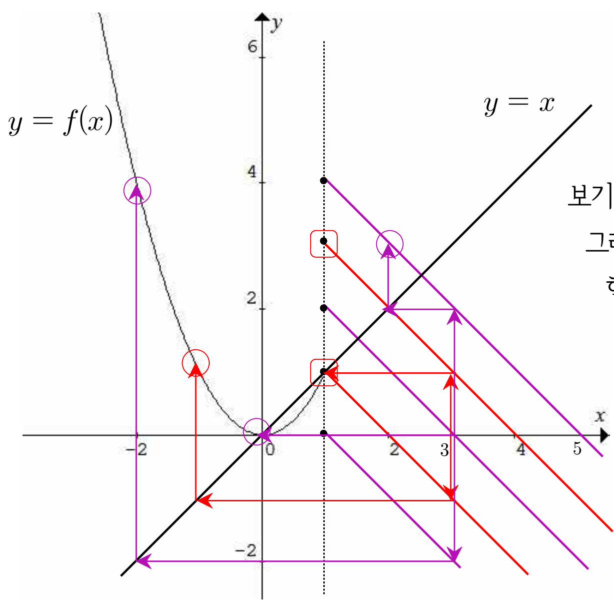
06. [정의로 돌아가라]

sol.1)
여차저차 정의된 함수 $f(f(x))$가 어찌됐든 $x=3$에서 불연속이 되어야 한다고 합니다. 그러면 $x=3$에서 연속이 아니면 되겠죠? 함숫값은 무조건 존재하는 꼴이니 극한값이 존재하지 않거나, 극한값이 존재하더라도 함숫값과 다르면 됩니다. 경험상 이럴 땐 표를 이용해서 풀면 빨리 해결됩니다.

x	$3-0$	3	$3+0$
$f(x)$	$(a-3)+0$	$a-3$	$(a-3)-0$
$f(f(x))$			

따라서 $a-3$이 함수가 다르게 정의되는 경계인 1에 해당하면 되고, 조건을 만족하는 값은 $a=4$입니다.

sol.2)



보기 다섯 개를 전부 다 그래프로 헤아린 것입니다. 합성함수도 결국 함수에 불과하니까요.

[2010년 06월 평가원 대비 포카칩 수리(가형) 23번]

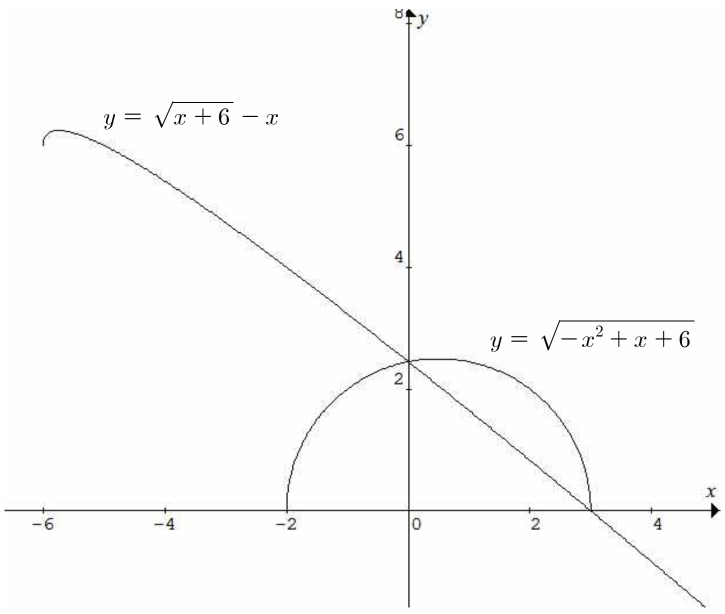
23. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2-a & (x\neq 2) \\ b & (x=2) \end{cases}$ 에 대하여 $(f\circ f)(x)$가 $x=2$에서 연속이기 위한 실수 b의 값이 두 개 이상 존재할 때, 이를 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

07. [계산은 과감하게]

sol)
무연근은 나중에 생각하기로 하고 계속 완전제곱을 이용하여 식을 우선 정리해줍니다. 그러고 마지막에 나온 근들을 처음 무리방정식에 넣어서 아닌 것들은 무연근으로 걸러내도 충분합니다.

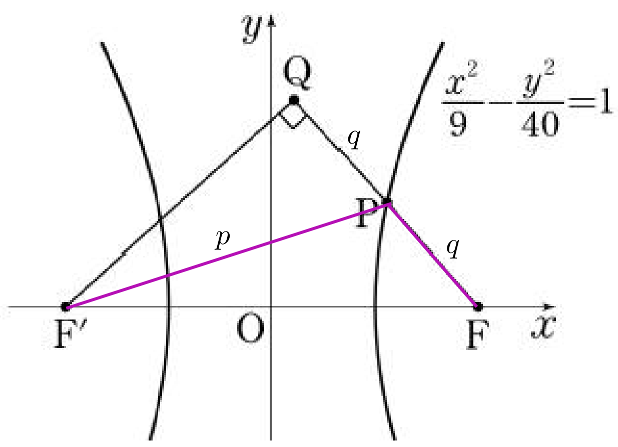
$$x+6-2x\sqrt{x+6}+x^2=-x^2+x+6$$
$$x^2=x\sqrt{x+6}\ \rightarrow\ x=0$$
$$x^2=x+6$$
$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)=0\ \rightarrow\ x=3$$

$\therefore\ 0+3=3$



08. [수식 전개의 목표 설정]

sol)



쌍곡선의 정의에 의하여 $p-q=2\sqrt{9}=6$ ⋯ ①
삼각형 $\mathrm{PQF'}$에 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{\mathrm{F'Q}}^2=p^2-q^2$이고, 다시
삼각형 $\mathrm{FQF'}$에 피타고라스 정리를 적용하면 $14^2-4q^2=p^2-q^2$ ⋯ ②
따라서 ①, ②를 연립하면 $p=14, q=5$가 되어 답은 5입니다.

09. [조건부확률]

sol)

입장권 수 / 종목	0장	1장	2장	계
농구	400	200	300	900
야구	100	300	500	900

$$\therefore\ \frac{3\cdot 3}{2\cdot 5+3\cdot 3}=\frac{9}{19}$$

10. [포물선의 정의]

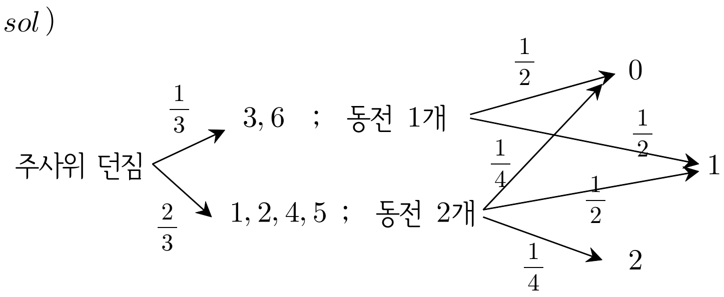
sol)
기본 꼴을 평행이동해서 구할 수도 있지만 본디 포물선의 정의로 돌아가서 수식을 세워보겠습니다. 한 초점 $(-2,q)$에서 준선 $y=-1$에 이르는 거리가 같은 점들 (x,y)의 자취이므로 이를 그대로 수식으로 바꾸어서 나타내면 $\sqrt{(x+2)^2+(y-q)^2}=|y+1|$이고 이를 정리해보면

$$x^2+4x+4+\cancel{y^2}-2qy+q^2=\cancel{y^2}+2y+1$$
$$2(q+1)y=x^2+4x+3+q^2$$

그리고 이는 $y=x^2+ax+b$와 일치하므로 계수를 비교해보면
$2(q+1)=1\ \rightarrow\ q=-\frac{1}{2}$이고 $a=4, b=3+\frac{1}{4}$이 되어
$a+4b=4+13=17$이 답이 됩니다.

11. [상황에 대한 이해]

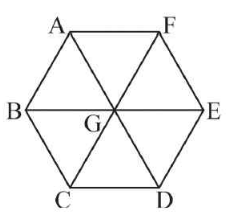
sol)



$$\therefore\ \mathrm{E}(X)=0\cdot(\quad)+1\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{6}$$

[2004년 08월 사관학교 수리(나형) 09번]

9. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 6개로 이루어진 정육각형 모양의 도형이 있다. 동전을 던져 앞면이 나오면 정삼각형의 변을 따라 1만큼씩 움직이고, 뒷면이 나오면 움직이지 않는다. 갑과 을이 각각 동전을 한번씩 던지고 난 후에 갑은 점 A에서, 을은 점 F에서 출발하여 움직였을 때, 두 사람 사이의 거리가 1이 될 확률은 ? (단, 두 점 A, F에서 각 변을 따라 움직일 확률은 모두 $\frac{1}{3}$이다.) [4점]

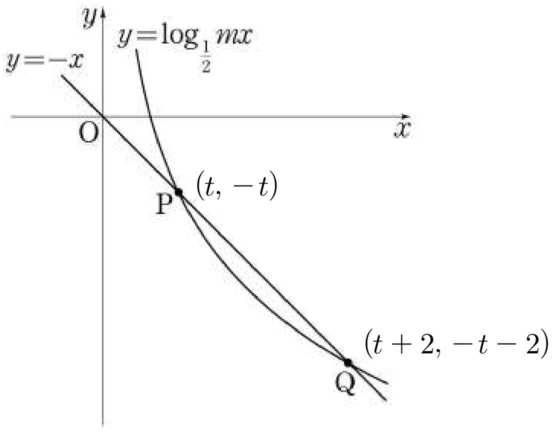


① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{11}{18}$ ⑤ $\frac{13}{18}$

12. [ctrl + c / ctrl + v]

sol)

기울기가 -1인 직선 $y=-x$위의 두 점 P, Q의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로 $\mathrm{P}(t, -t), \mathrm{Q}(t+2, -t-2)$라 둘 수 있습니다.



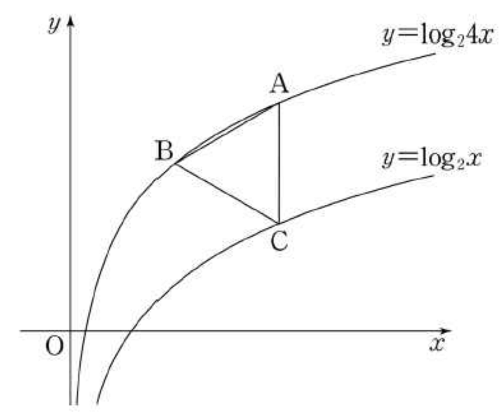
그리고 두 점 P, Q는 로그함수 위의 점이기도 하면서 직선 위의 점이기도 하다는 사실에 착안하여 식을 연립해보면

$$\begin{cases} -t = -\log_2 mt \\ -t-2 = -\log_2 m(t+2) \end{cases} \rightarrow 2 = -\log_2 \frac{t}{t+2} = \log_2 \frac{t+2}{t}$$

따라서 $t=\frac{2}{3}$로 $2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}m \rightarrow m = \frac{3}{2} \times 2^{\frac{2}{3}} = 3 \times 2^{-\frac{1}{3}}$이 답입니다.

[2010년 09월 평가원 수리(가형) 15번]

15. 함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여, 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 (p, q)이다. $p^2 \times 2^q$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$ ④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

13. [문제 풀이를 통해 익히는 실전적인 계산의 기술]

sol)

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-0} (m\sin x + n\cos x)e^{-x} = me^{-\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$에서 $m=1$입니다. 아직까지는 n이 어떤 자연수인지 몰라도 $f''(x)$에서 $x \to +0$일 때의 극한값은 구할 수 있는 꼴이 되리라 예상을 할 수 있겠죠? 그리고 곱에 대한 미분법, 삼각함수와 지수함수 각각의 도함수에 대한 특성들(?!)을 고려하면서 $\{\square\sin x + \triangle\cos x\}e^{-x}$꼴에서 계수인 $\square, \triangle$위주로 수식을 정리해봅시다.

$$f'(x) = (m\cos x - n\sin x - m\sin x - n\cos x)e^{-x}$$
$$= \{(m-n)\cos x - (m+n)\sin x\}e^{-x}$$
$$f''(x) = \{(n-m+m+n)\sin x + (-m-n-m+n)\cos x\}e^{-x}$$
$$= 2(n\sin x - m\cos x)e^{-x}$$

따라서, $\lim\limits_{x \to +0} f''(x) = -2m = -2$가 답이 됩니다.

[2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 30번]

30. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
(나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2) \times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

14. [정교하게 설계된 문항]

sol)

함수 $f(x)$가 극값을 갖기 위한 필요충분조건은 주어진 구간 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 도함수의 부호 변화 지점이 있어야 한다는 것이고,

$f'(x) = \{(m-n)\cos x - (m+n)\sin x\}e^{-x}$이고, 이때의 m, n은 주사위의 눈으로서 총 $6 \times 6 = 36$가지의 경우가 가능합니다. 그리고 도함수 $f'(x)$에서 지수부분인 e^{-x}는 항상 양수이므로 나머지 부분을

$$g(x) = (m-n)\cos x - (m+n)\sin x$$

라 하였을 때 해당 구간에서 적어도 하나의 근을 가지면 됩니다. 그리고 연속함수의 중간값 정리를 적용하면

$$g(0)g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(m-n)(m+n) = n^2 - m^2 < 0$$

이 되어 가능한 주사위의 두 눈 m, n의 개수는 6개의 눈 중에서 서로 다른 두 눈을 골라서 큰 수는 m, 작은 수는 n에 대응시키면 되므로 ${}_6C_2 = 15$가지가 나옵니다. 따라서, 구하고자 하는 확률은 $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$가 됩니다.

※ $n^2 - m^2 \le 0$인 이유는 $f(x)$가 개구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의되었기 때문이고, 딱히 안 쓰일 줄 알았던 정의역 조건이 이렇게 역할을 톡톡히 하는 것을 재확인 하면서, 잘 풀고 있음에 다시 한 번 믿어 의심치 않을 수 있죠.

15. [체스판에 체스말을 올리듯이]

sol)

여기서 10×10 행렬은 어디까지나 수열의 항들을 깔기 위한 판에 불과합니다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2라는 점은 잠깐 머릿속에 담아두고, (가) 조건을 통해 일종의 흔한 군수열임을, (나) 조건은 수열 $\{a_n\}$의 점화식을 간접적으로 제시해줬음을 알 수 있습니다. 조금 더 시각적으로 살펴봅시다.

(가) 조건에 의하여 ~~포카칩님 이거 다 그려야 하나요 ㅠㅠ~~

$$A=\begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & & a_{10} & a_{11} \\ a_3 & a_4 & & & a_{11} & a_{12} \\ a_4 & & & & & \\ & & & & & a_{18} \\ a_{10} & a_{11} & & & a_{18} & a_{19} \\ a_{11} & a_{12} & & a_{18} & a_{19} & a_{20} \end{pmatrix}_{10\times 10}$$

이렇게 그려지므로 모든 성분의 합은

$a_2+2a_3+3a_4+\cdots+9a_{10}+10a_{11}+9a_{12}+\cdots+3a_{18}+2a_{19}+a_{20}$

가 됩니다.

(나) 조건에서 $m=1$을 대입하여 인접한 두 항에 대한 점화식으로 바꿔주면 $a_{n+1}=a_n+a_1-1=a_n+1$로 등차수열임을 알 수 있습니다. 즉,

$\{a_n\}:2,3,4,5,\cdots,(n+1),\cdots$

가 됩니다. 하지만 여기서 이대로 다 더하기엔 너무너무너무너무너무너무 귀찮네요. 분명 포카칩님은 쉬운 계산 방법을 숨겨놓았을 거에요! 대신, **등차수열의 합은 평균에다가 항수를 곱한 것**임을 상기하면서 행렬 A의 모든 성분의 합을 각 행 또는 열들의 합의 꼴로 구하면

$$S=\left\{\frac{a_2+a_{11}}{2}+\frac{a_3+a_{12}}{2}+\cdots+\frac{a_{11}+a_{20}}{2}\right\}\times 10$$

가 됩니다. 그리고, 제1행과 제 10행 혹은 제1열과 제 10열을 보니 a_{11}만 두 번 중복되어 더해야 하네요! 따라서,

$$\begin{aligned}S&=\{(a_2+a_3+\cdots+a_{20})+a_{11}\}\times 5\\&=\left(\frac{3+21}{2}\times 19+12\right)\times 5=1200\end{aligned}$$

가 답이 됩니다.

16. [분수 부등식 해석 & 상황 판단]

sol)

16. 젖은 쓰레기에서 발생하는 침출수는 오염 농도가 90(%) 이상이 되도록 농축하여 별도로 폐기 처분한다. 오염 농도가 x(%)인 침출수 a(톤)을 별도로 폐기 처분하려고 할 때 증발시켜야 하는 물의 양을 b(톤)이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\frac{x}{100(a-b)}\ge 0.9$$

오염농도가 60(%)인 침출수 a_1(톤)을 폐기 처분하려면 최소 1(톤)의 물을 증발시켜야 한다. 오염농도가 50(%)인 침출수 $3a_1$(톤)을 폐기 처분하기 위해 증발시켜야 하는 물의 양 b_1(톤)의 범위는? [4점]

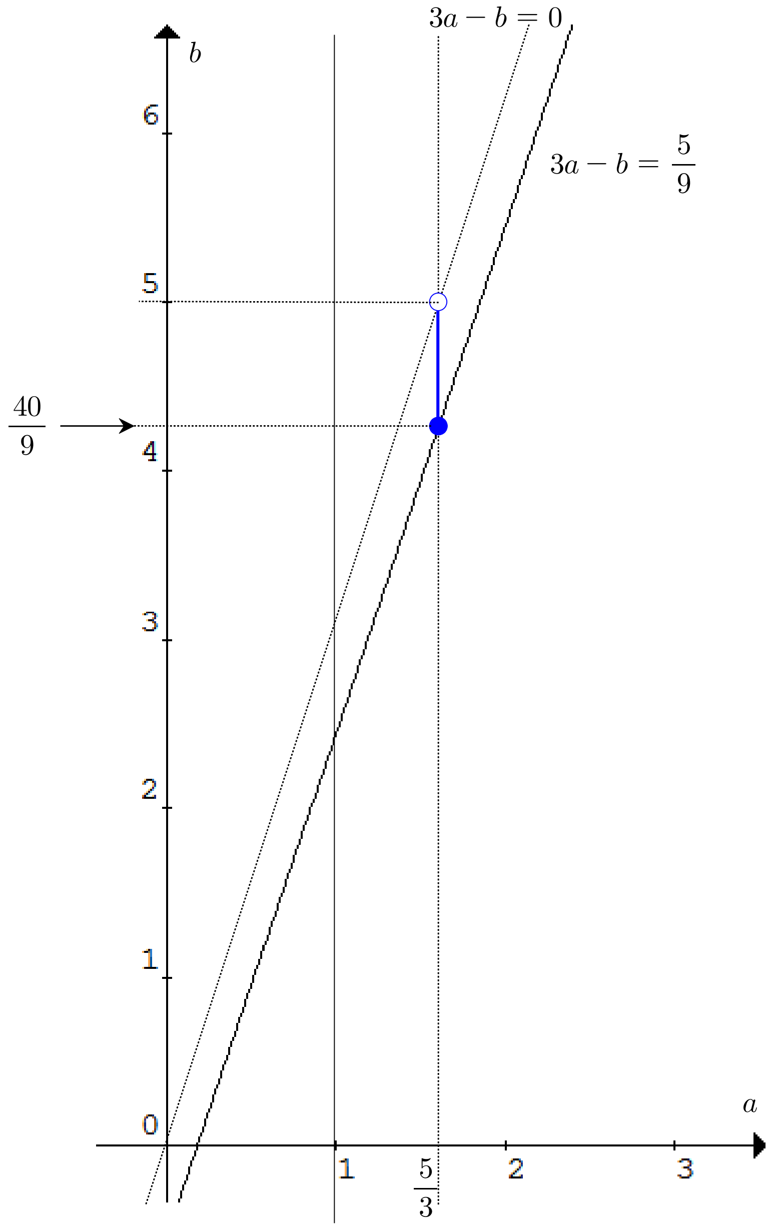
$$\begin{cases}\dfrac{60}{100(a_1-1)}\ge 0.9 \rightarrow 1<a_1\le\dfrac{5}{3}\\[2ex] \dfrac{50}{100(3a_1-b_1)}\ge 0.9 \rightarrow 0<3a_1-b_1\le\dfrac{5}{9}\end{cases}$$

가로, 세로 점근선을 갖는 유리함수의 개형을 떠올리며 추가적으로 범위를 따져야 합니다. 그리고 이제 기존 문제들과 달리 참신함이 반짝이는 지점인데, 우리는 평소처럼 대충 읽고 넘어가는 것과 달리 독해를 통해서 최소 1톤의 물을 증발시켜야 하는 침출수의 양은 $a_1=\frac{5}{3}$으로 확정할 수 있습니다.

직관을 가미해서 생각하자면 문제에서 수분을 증발시켜서 폐기처분한다고 하였고, 폐기처분해야 하는 침출수의 양이 적을수록 증발시킬 양도 줄어들게 됩니다. 만약 $1<a_1<\frac{5}{3}$이라면 1톤보다 더 적은 양의 물을 증발시켜도 될테니 문제의 조건에 어긋나게 됩니다. 고로, $a_1=\frac{5}{3}$가 되는 것입니다.

이때 구하고자 하는 범위는 $0<3a_1-b_1\le\frac{5}{9}\ \rightarrow\ \frac{40}{9}\le b_1<5$ 가 됩니다.

※ **이를 그래프로 관찰해보면 다음과 같습니다.**

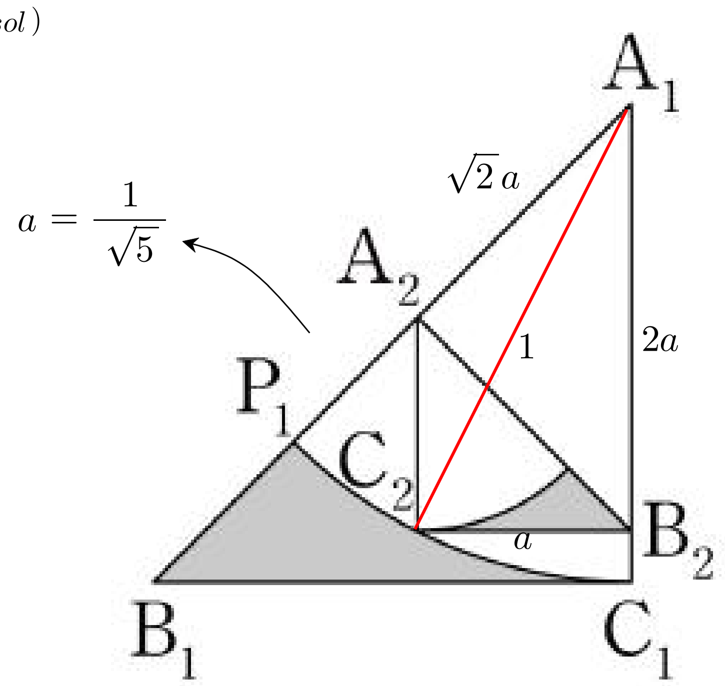


부등식 영역을 가지고 생각하는 것이 아니라 훨씬 더 능동적으로 해석해야 하는 문제였다고 봅니다.

역시 포카칩은 사랑입니다.

17. [신에게는 아직 하나의 보조선이 있나이다]

sol)



지금도 그렇다시피 무한등비급수 문제는 보통 초항과 공비만 구하면 끝나죠!

$S_1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$ 이므로 $\frac{S_1}{1-a^2} = \frac{S_1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$가 답입니다.

18. [주기함수의 적분으로 인한 상쇄]

sol)

문학에 등장하는 의식의 흐름기법으로 설명하겠습니다. 문제를 푸는 학생보다는 조금 더 시야가 넓은 해설자의 입장에서!

$f(x) = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos 9x$니까 이걸 등차수열 계산하듯 $\cos\square x + \cos(10-\square)x$로 묶어서 변형하든지 $1 = \frac{\sin x}{\sin x}$ 따위를 곱하여서 $\sin A_n - \sin A_{n+1}$의 합차꼴로 바꾸어서 정리해야 하나? 하지만 이건 귀찮으니까 보류! 나중에 안 되면 써봐야겠다.

음.. ㄱ,ㄴ,ㄷ 보기를 보니까 푸리에 급수가 생각나네. 출제자가 대학 미적분학에서 아이디어를 가져왔나보네? 그렇다면 그에 맞춰서 생각해줘야겠군!

$\cos kx$의 주기가 $\frac{2\pi}{k}$이고 각 $\cos kx$들을 0에서 2π까지 적분하라고 있는데, 이건 한 주기 $\frac{2\pi}{k}$가 k개씩 있는 셈이네. 그리고 $\cos kx$는 한 주기 내에서 $[-1, 1]$을 진동하면서 대칭을 이루고 있으니 $\int_0^{\frac{2\pi}{k}} \cos kx dx = 0$이고, ㄱ은 그래서 참이네. 역시 보기에도 ㄱ이 네 개씩이나 있어.

문제는 ㄴ이야. 이거 완전 푸리에 급수인데 교과과정 외 아니냐고 디스 먹겠는데? http://blog.naver.com/oscarsim_95/60159631620

m, n에 자연수를 하나씩 대입한 결과를 살펴봐야겠네.

$f(x)\cos x = \cos x\cos x + \cos 2x\cos x + \cdots + \cos 9x\cos x$

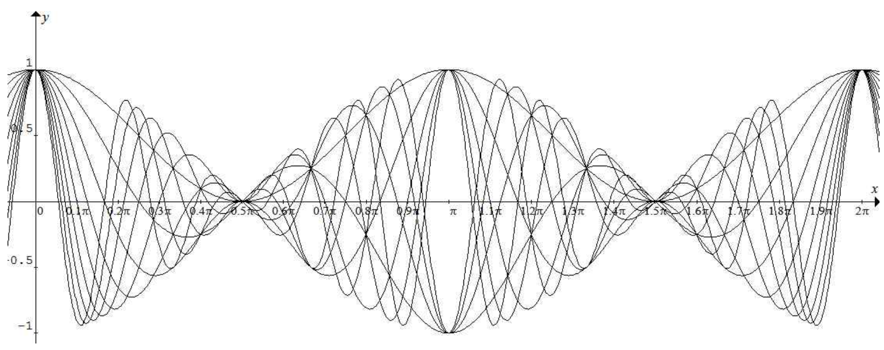
$= \frac{1}{2}\{(\cos 2x + \boxed{\cos 0x}) + (\cos 3x + \cos x) + \cdots + (\cos 10x + \cos 8x)\}$

그런데 $[0, 2\pi]$에서 적분해버리면 코사인 항들은 전부 온전한 주기의 정수배니까 적분값이 0으로 상쇄될테고 실질적으로 $\frac{1}{2}$을 적분한 셈이니, 그 값은 π구나. 이번엔 $f(x)\cos 2x$만 더 계산해보고 같은 패턴으로 코사인 항들의 적분 값이 0이 되는지 체크해주자.

$f(x)\cos 2x = \cos x\cos 2x + \cos 2x\cos 2x + \cdots + \cos 9x\cos 2x$

$= \frac{1}{2}\{(\cos 3x + \cos(-x)) + (\cos 4x + \boxed{\cos 0x}) + \cdots + (\cos 11x + \cos 7x)\}$

예상대로 $\frac{1}{2}$과 코사인 항들의 합으로 이루어져있네. 적분하면 어차피 0으로 상쇄되네. 그래서 ㄴ도 참! 그런데 왜 하필 10보다 작은 서로 다른 두 자연수 m, n이라 했지?



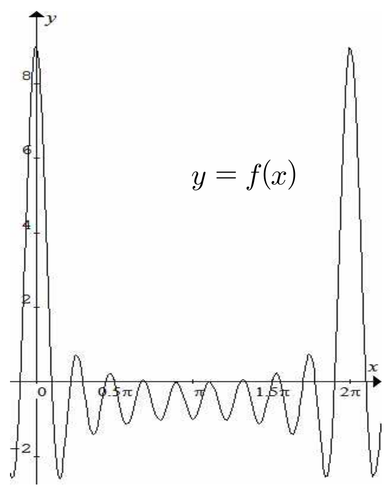
이제 ㄷ으로 넘어가보자. 이건 무슨 직교 성분 같네. 아! 이건 ㄴ이 힌트였어. 평가원 ㄱ,ㄴ,ㄷ은 쉬운 ㄱ과 약간 생각해야 하는 ㄴ을 통해서 ㄷ을 풀게끔 하지. 처음부터 ㄷ을 물어보면 너무 어려우니까 말이야. 편의상 $a_k = \cos kx$라 하면, $\{f(x)\}^2$도 하나의 완전제곱식 형태고 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_8 + a_9)^2$의 전개식은 항별 제곱들의 총합인 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2 + a_9^2$에다가 가능한 ${}_9C_2$개의 교차항들의 총합인 $a_1a_2 + \cdots + a_1a_8 + a_1a_9 + \cdots + a_8a_9$의 두 배를 더해준 꼴이였지. 그럼 아까 ㄴ에서 서로 다른 10보다 작은 두 자연수의 수수께끼도 해결 된거네.

서로 다른 항들간에는 $\frac{1}{2}\cos 0x = \frac{1}{2}$이 나타나는 일 없으니까 전부 $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$의 꼴로 $[0, 2\pi]$에서 적분하면 모조리 0이 되는걸 이용할 수 있겠구나!

그러면 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2 + a_9^2$에 해당하는 $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cdots + \cos^2 9x$ 부분은 $\cos^2 kx = \frac{1+\cos 2kx}{2}$로 고쳤을 때 $\cos 2kx$는 0에서 2π까지 적분했을 때 0이 되고, 적분하면 $\frac{1}{2} \times 9 \times 2\pi = 9\pi$가 나오네.

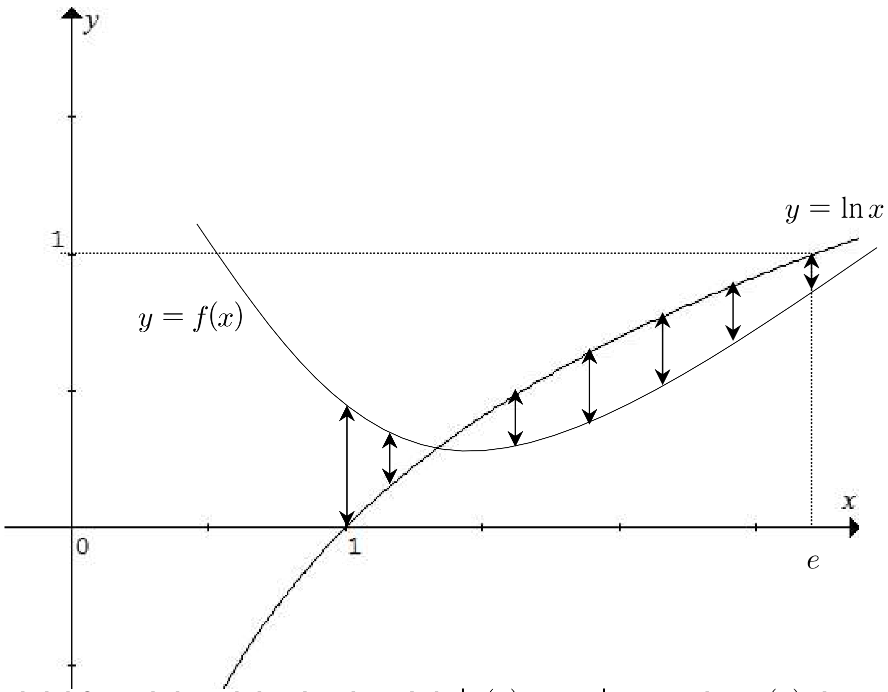
$$\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2 dx = \int_0^{2\pi}\left\{\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) + 2\left(a_1a_2 \cdots + a_{n-1}a_n\right)\right\}dx$$

$= 9\pi + 0 = 9\pi$이고, 따라서 해당 조건을 만족하는 회전체적의 부피는 $\pi\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2 dx = 9\pi^2$으로 ㄷ도 참이었네. 만약 9π냐고 물어봤으면 더 잔인했을텐데..

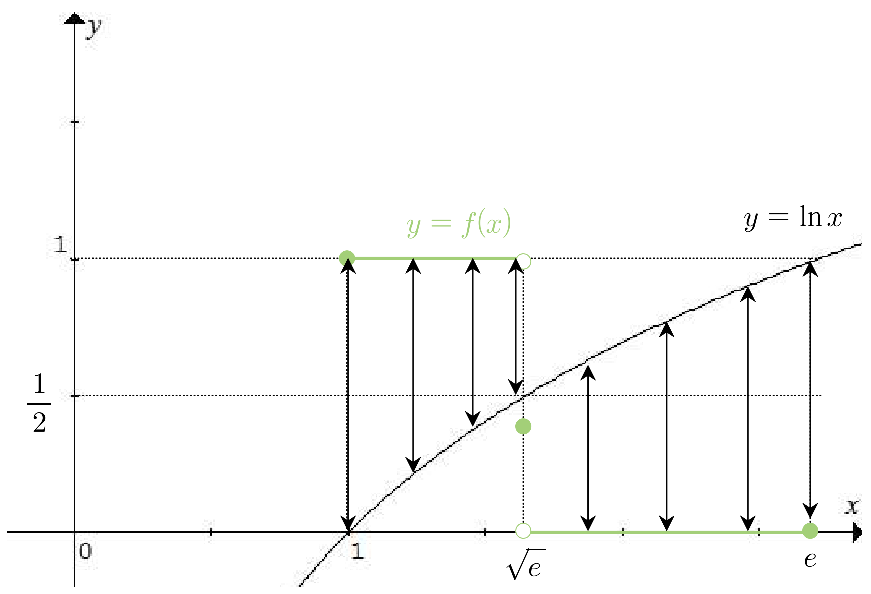


19. [직관이 필요한 순간]

sol)



최댓값을 구하려는 피적분함수의 분자식 $|f(x)-\ln x|$ 는 두 함수 $f(x)$와 $\ln x$의 차이를 의미합니다. 분모인 $\frac{1}{x}$ 부분은 감소하고 있으므로 가능한 한 적분 구간 $[1, e]$에서 $|f(x)-\ln x|$의 값이 크도록 $f(x)$를 잡아주는 것이 중요합니다. 비록 $f(x)$가 불연속이 되더라도 $0 \le f(x) \le 1$가 되기만 하면 됩니다. 주어진 조건만으로 $f(x)$가 적분 가능함을 충분히 의미하고 있는 것은 아니지만, 최댓값을 구하려면 일단 적분이 가능해야 하니 그 부분에서는 생략하겠습니다. 그러면 다음과 같은 그래프를 생각해줄 수 있습니다.



$f(x)$가 연속이라는 말은 없으나 구간 $[1, e]$에서 정의된다 하였으니 불연속점 $x=\sqrt{e}$에서 함숫값은 0이상 1이하의 아무 값이나 취해줘도 됩니다. 하지만 어차피 적분하면 한 점은 영향을 끼치지 않죠! 이걸 증명하는 게 고등미적분학=해석학인데 고교 과정에선 아마 직관적으로 그러하리라 여기고 넘어가야 합니다. 그리고 구간 내 무리수점에서만 위 개형을 따라도 만족합니다.

따라서, $h(t)=\ln t \to h(e^2)=2$, $a=\sqrt{e} \to \ln a = \frac{1}{2}$이고, 끝으로 정적분을 계산해보면 $b=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1-\ln x}{x}dx+\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{3}{4}$로 답은 $\frac{\frac{3}{4}\times 2}{1/2}=3$이 됩니다.

[2007년 09월 평가원 수리(가형) 27번]

27. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고

$$f(0)=0,\quad f(1)=\sqrt{3}$$

을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여

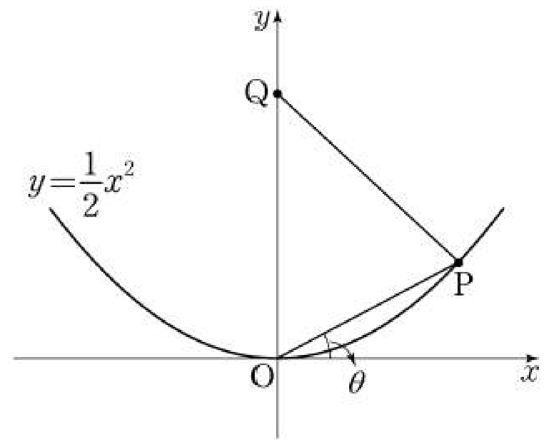
$$\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

의 최소값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $1+\sqrt{2}$
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $1+\sqrt{3}$

20. [우리에게 로피탈은 사치다]

sol.1)



$P\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$라 두면 $\tan\theta=\frac{t}{2}$이고 점 P에서의 미분계수가 t이므로 점 Q의 좌표는 직선 $y-\frac{1}{2}t^2=-\frac{1}{t}(x-t)$의 y절편으로 $Q\left(0, \frac{1}{2}t^2+1\right)$입니다.

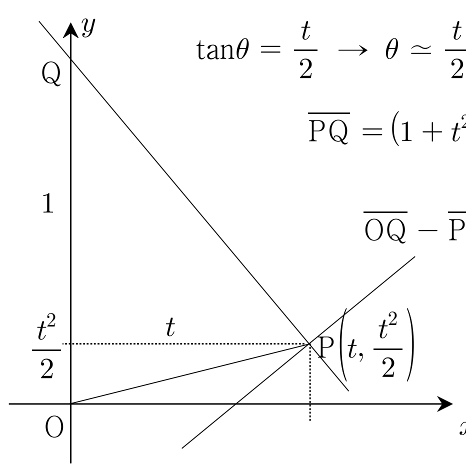
그러면 $\overline{OQ}=\frac{1}{2}t^2+1$이고 $\overline{PQ}=\sqrt{t^2+1}$이므로

$$\frac{\overline{OQ}-\overline{PQ}}{\theta^4}=\frac{\frac{1}{2}t^2+1-\sqrt{t^2+1}}{\tan^4\theta}=\frac{\left(\frac{1}{4}t^4+t^2+1\right)-(t^2+1)}{(t/2)^4\left(\frac{1}{2}t^2+1+\sqrt{t^2+1}\right)}$$

$$=\frac{4}{\frac{1}{2}t^2+1+\sqrt{t^2+1}}$$

로 정리되므로 $\theta\to+0$일 때 $t\to+0$이므로 구하고자 하는 값은 $\frac{4}{1+1}=2$가 됩니다.

sol.2) 난짱극 - 이항전개에 의한 근사



$$\tan\theta=\frac{t}{2}\ \to\ \theta\simeq\frac{t}{2}$$

$$\overline{PQ}=(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\simeq 1+\frac{1}{2}t^2+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^4$$

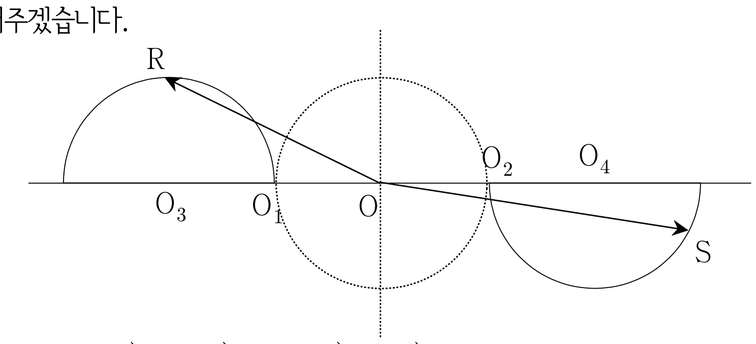
$$\overline{OQ}-\overline{PQ}\simeq\left(1+\frac{t^2}{2}\right)-\left(1+\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{8}\right)$$

$$\therefore\ \frac{16}{t^4}\times\frac{t^4}{8}=2$$

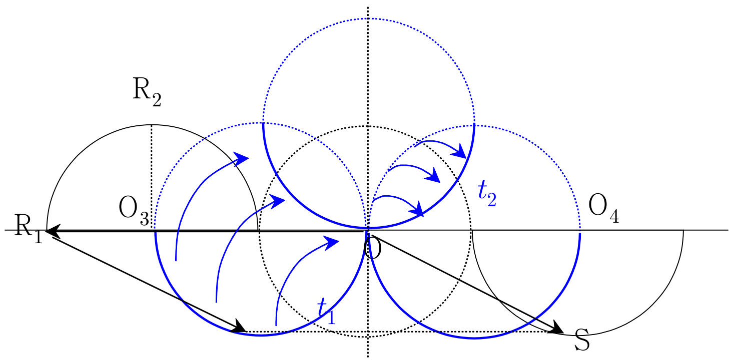
21. [원 그리면 ..]

$sol.1)$

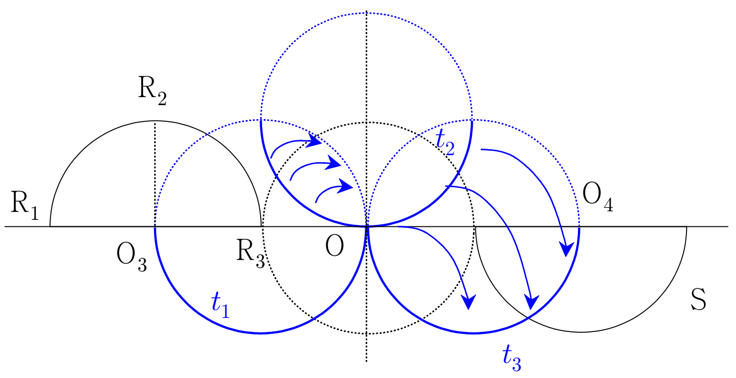
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_1Q}}, \overrightarrow{\mathrm{O_2P}}$의 시점이 일치하지 않으니까 다음과 같이 평행이동 해주겠습니다.



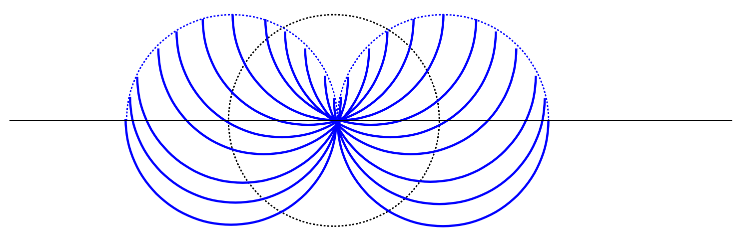
그러면 $\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1Q}}+\overrightarrow{\mathrm{O_2P}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right| = 1$이 되고, 두 반원 위의 동점 $\mathrm{R, S}$의 중점을 M이라 하였을 때 $\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right| = \dfrac{1}{2}$가 됩니다. 하지만 아직 원이라고는 단정하지 못합니다. 아마도 원의 일부쯤 되겠네요! 다음으로 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}$를 있는 그대로 해석해봅시다. ★★★★★ 줄 만큼 복잡합니다



R이 만약 특정 위치 $\mathrm{R_1}$에 있을 때 $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$의 시점을 $\mathrm{R_1}$에 일치시키면 가능한 자취는 t_1이 됩니다. $\mathrm{R_1}$을 $\mathrm{R_2}$까지 움직여 보면 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}$가 나타내는 자취는 휩쓸고 간 t_1, t_2의 일부로 둘러싸인 영역이 생깁니다.

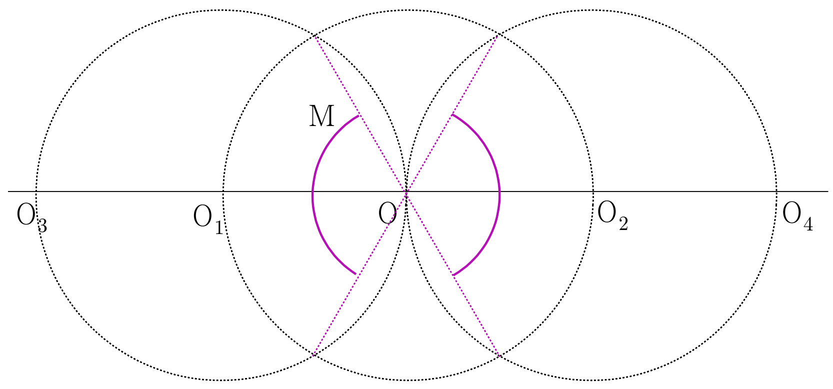


$t_2 \rightarrow t_3$의 휩쓸고 간 자취를 생각하기가 역시 까다로운데 가상의 지름을 이용하여 따지는 것도 좋은 방법입니다. 그러면 다음과 같은 이미지가 보입니다.

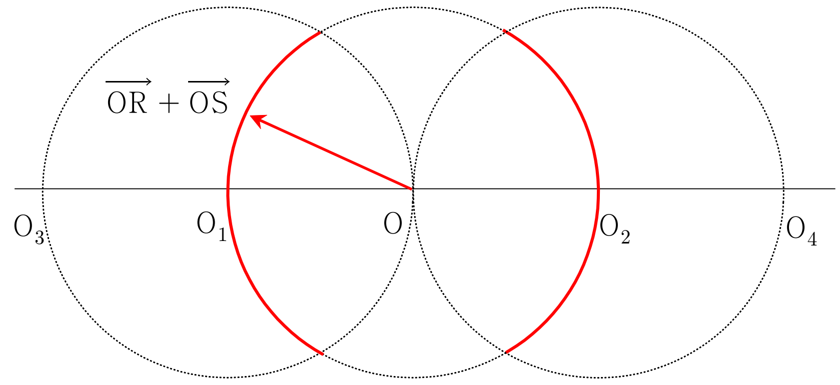


즉, 원이 두 개인 영역입니다. 2014년 06월 평가원 기출 중에도 이러한 자취가 직사각형 영역으로 나오는 문항이 있었는데 엄밀한 수식으로 해결하지는 못하지만 대략적으로 자취를 상상할 수 있었었죠. 이렇게 원 버전으로 승화시킨 포카칩님께 또 한 번 감탄을 합니다!

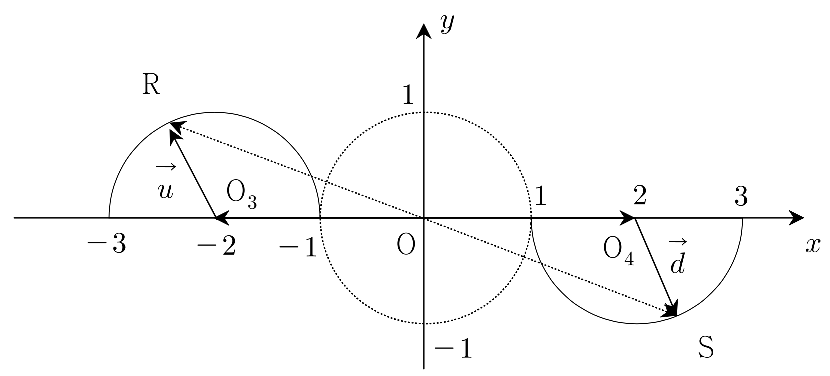
이때 점 M의 자취를 생각해봅시다. 접선의 비밀은 나중에 밝혀집니다.



그러면 $\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right| = 2\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right| = 1$이므로 만족하는 범위는 다음과 같습니다.



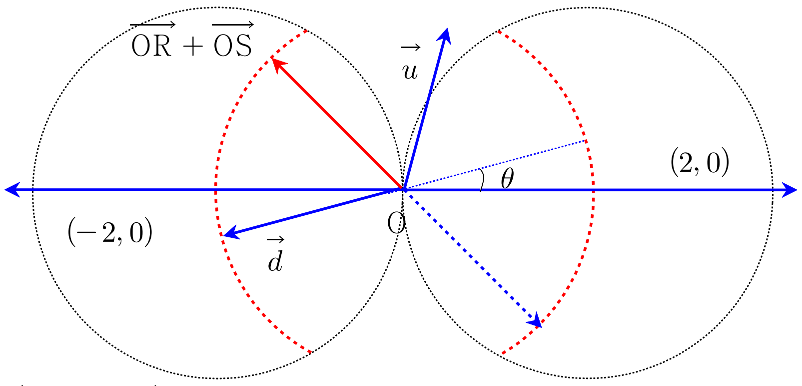
이제 마무리만 남았습니다. $\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1Q}}+\overrightarrow{\mathrm{O_2P}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right| = 1$에서 $\overrightarrow{\mathrm{O_1Q}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}}, \overrightarrow{\mathrm{O_2P}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$이므로 $\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1Q}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O_2P}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|$이고, $\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1Q}}+\overrightarrow{\mathrm{O_2P}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2 = 1$이 성립합니다. 그런데, $1 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ 만으로는 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}, \overrightarrow{\mathrm{OS}}$ 모두가 크기와 방향이 변하기 때문에 해석하기가 난만합니다.
어디까지나 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}$의 자취가 위와 같다는 얘기이므로 다시 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}, \overrightarrow{\mathrm{OS}}$ 각각을 파악해보자면 더 빠른 풀이는 $sol.2)$에서 보여 드리겠습니다.



$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (-2, 0)+\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{OS}} = (2, 0)+\vec{d}$라 고정인 부분과 움직이는 부분으로 분해하였을 때 $\vec{u}, \vec{d}$는 각각 상반원과 하반원을 나타내는 벡터를 의미하고, $1 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2 = \left|\vec{u}+\vec{d}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2+\left|\vec{d}\right|^2+2\vec{u}\cdot\vec{d}$에서 $\vec{u}\cdot\vec{d} = -\dfrac{1}{2}$이므로 두 벡터가 이루는 각이 $\dfrac{2\pi}{3}$임을 알 수 있습니다.
그러면 이를 이용해 좌표를 도입하여 내적을 풀어보면

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1Q}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O_2P}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right| = \left|\left((-2,0)+\vec{u}\right)\cdot\left((2,0)+\vec{d}\right)\right|$$
$$= \left|-\frac{9}{2}+\vec{u}\cdot(2,0)+\vec{d}\cdot(-2,0)\right|$$

에서 $\vec{u}, \vec{d}$ 모두 크기가 1이므로 $\left|\vec{u}\cdot(2,0)+\vec{d}\cdot(-2,0)\right| \le 4$가 되므로 $\vec{u}\cdot(2,0)+\vec{d}\cdot(-2,0)$가 최대가 될 때가 답이 됩니다. 그러니 한 번 더 기하학적 의미를 생각해봅시다.



$\vec{u}\cdot(2,0)+\vec{d}\cdot(-2,0)$가 최대가 되기 위해 위와 같이 상황을 어느 정도 잡아줄 수 있고, 이를 계산해보면 $0\le\theta\le\frac{\pi}{6}$에 대하여

$\vec{u}\cdot(2,0)+\vec{d}\cdot(-2,0)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+2\cos\theta$

$=2\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)+2\cos\theta=3\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$

$=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\le 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3$이 되어 $\because\theta=0$일 때 발생

$\left|\overrightarrow{O_1Q}\cdot\overrightarrow{O_2P}\right|=\left|\overrightarrow{OS}\cdot\overrightarrow{OR}\right|=\left|-\frac{9}{2}+\vec{u}\cdot(2,0)+\vec{d}\cdot(-2,0)\right|$

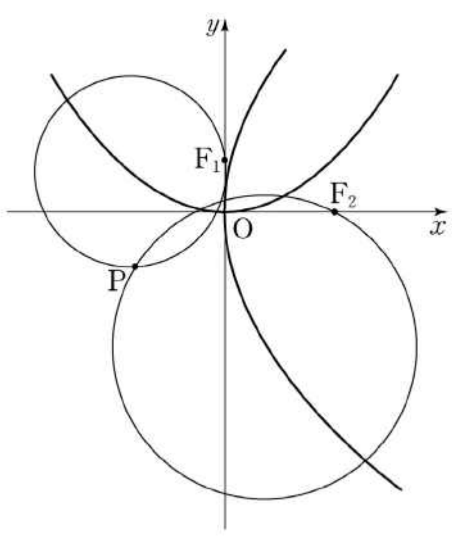
$\ge\left|-\frac{9}{2}+3\right|=\frac{3}{2}$이 정답입니다.

[2014년 06월 평가원 수학 영역(B형) 28번]

28. 좌표평면에서 포물선 $C_1: x^2=4y$의 초점을 F_1, 포물선 $C_2: y^2=8x$의 초점을 F_2라 하자. 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

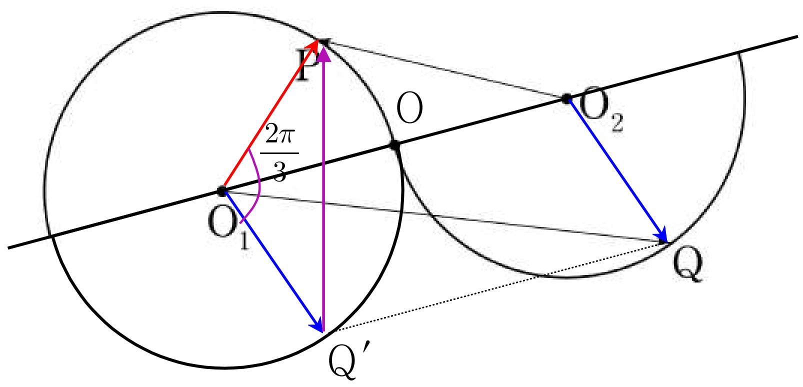
> (가) 중심이 C_1 위에 있고 점 F_1을 지나는 원과 중심이 C_2 위에 있고 점 F_2를 지나는 원의 교점이다.
> (나) 제3사분면에 있는 점이다.

원점 O에 대하여 $\overline{OP}^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



※ $sol.1)$은 이 기출문제의 연장선 즈음으로 자취 영역 파악하기 연습이라 받아들이시는 게 좋을 듯 합니다!

$sol.2)$



$\overrightarrow{O_1Q}=\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2Q}$이고, $\overrightarrow{O_2P}=\overrightarrow{O_2O_1}+\overrightarrow{O_1P}$이므로

$\left|\overrightarrow{O_1Q}+\overrightarrow{O_2P}\right|=\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}\right|=1$에서 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}=-\frac{1}{2}$이고

$\overrightarrow{O_1Q}\cdot\overrightarrow{O_2P}=\left(\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2Q}\right)\cdot\left(\overrightarrow{O_2O_1}+\overrightarrow{O_1P}\right)$

$=-\left|\overrightarrow{O_1O_2}\right|^2+\overrightarrow{O_2Q}\cdot\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1O_2}\cdot\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}\cdot\overrightarrow{O_2O_1}$

$=-4-\frac{1}{2}+\overrightarrow{O_1O_2}\cdot\overrightarrow{O_1P}-\overrightarrow{O_2Q}\cdot\overrightarrow{O_1O_2}$

$=-\frac{9}{2}+\overrightarrow{O_1O_2}\cdot\left(\overrightarrow{O_1P}-\overrightarrow{O_2Q}\right)$

$=-\frac{9}{2}+\overrightarrow{O_1O_2}\cdot\left(\overrightarrow{O_1P}-\overrightarrow{O_1Q'}\right)$ $\because\overrightarrow{O_2Q}//\overrightarrow{O_1Q'}$

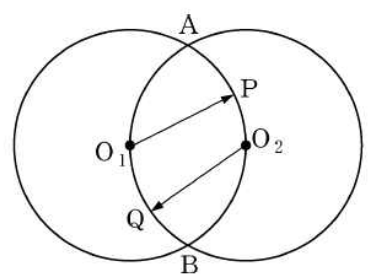
$=-\frac{9}{2}+\overrightarrow{O_1O_2}\cdot\overrightarrow{Q'P}$

이때 $\left|\overrightarrow{O_1O_2}\right|=2$, $\left|\overrightarrow{Q'P}\right|=\sqrt{3}$이므로 $\left|\overrightarrow{O_1Q}\cdot\overrightarrow{O_2P}\right|$의 최솟값은 $\overrightarrow{O_1O_2}\cdot\overrightarrow{Q'P}$가 최대일 때 발생하며 두 벡터의 크기가 일정하므로 점 P가 O에 올 때 사잇각이 $\frac{\pi}{6}$으로 최소가 되므로 내적은 최대가 되고

$\left|\overrightarrow{O_1Q}\cdot\overrightarrow{O_2P}\right|\ge\left|-\frac{9}{2}+2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{3}{2}$이 답이 됩니다.

[2008년 09월 평가원 수리(가형) 07번]

7. 평면 위의 두 점 O_1, O_2 사이의 거리가 1일 때, O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 두 원의 교점을 A, B라 하자. 호 AO_2B 위의 점 P와 호 AO_1B 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$의 내적 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]



① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 1

22. [잠시만 쉬었다가]

sol)

$2^{\log x} = 3^{\log 4}$의 양변을 상용로그 취하면

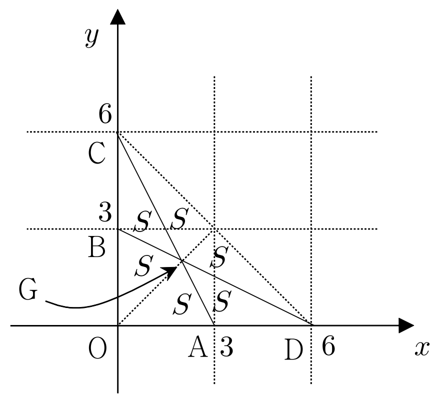
$(\log 2)(\log x) = (\log 4)(\log 3) = 2(\log 2)(\log 3)$이고

$\log x = 2\log 3 \ \rightarrow\ x = 3^2 = 9$

23. [아자아자!]

sol)

익숙한 문제네요! 일단 그려보겠습니다.



볼록사각형 OAGB의 넓이를 구해야 하는데, 선분 CD를 이으니 직각삼각형 OCD와 그 무게중심 G가 보이네요. 이 직각삼각형을 중선에 의해 넓이 S인 부분으로 여섯 조각을 내면 구하고자 하는 값은 $\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\right)\cdot\frac{2S}{6S} = 6$입니다.

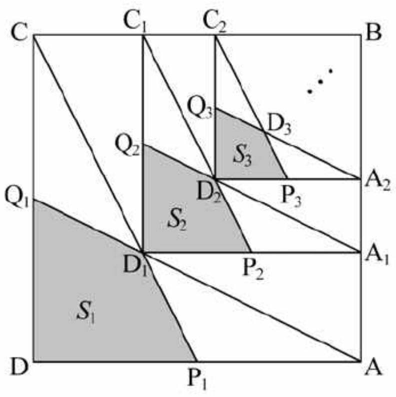
[2008년 10월 교육청 수리(가형) 15번]

15. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 두 선분 AD, DC의 중점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하고, 두 선분 $\mathrm{AQ_1}$, $\mathrm{CP_1}$의 교점을 $\mathrm{D_1}$이라 하자. 이때, 사각형 $\mathrm{DP_1D_1Q_1}$의 넓이를 S_1이라 하자.

선분 $\mathrm{BD_1}$을 대각선으로 하는 정사각형을 $\mathrm{BC_1D_1A_1}$이라 하자. 두 선분 $\mathrm{A_1D_1}$, $\mathrm{D_1C_1}$의 중점을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$라 하고, 두 선분 $\mathrm{A_1Q_2}$, $\mathrm{C_1P_2}$의 교점을 $\mathrm{D_2}$라 하자. 이때, 사각형 $\mathrm{D_1P_2D_2Q_2}$의 넓이를 S_2라 하자.

선분 $\mathrm{BD_2}$를 대각선으로 하는 정사각형을 $\mathrm{BC_2D_2A_2}$라 하자. 두 선분 $\mathrm{A_2D_2}$, $\mathrm{D_2C_2}$의 중점을 각각 $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{Q_3}$이라 하고, 두 선분 $\mathrm{A_2Q_3}$, $\mathrm{C_2P_3}$의 교점을 $\mathrm{D_3}$이라 하자. 이때, 사각형 $\mathrm{D_2P_3D_3Q_3}$의 넓이를 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{24}{5}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{27}{5}$ ④ $\frac{20}{3}$ ⑤ $\frac{36}{5}$

24. [행렬 ㄱ, ㄴ, ㄷ은 어디에?]

sol)

$A^3 = -A \ \rightarrow\ A(A^2+E) = O$

$B^2 = A+E \ \rightarrow\ AB = (B^2-E)B = B(B^2-E) = BA$

이고 행렬 A의 모든 성분의 합을 알려주었으므로 가급적 $(AB)^4$을 모두 A와 단위행렬 E에 대한 식으로 나타내면 됩니다.

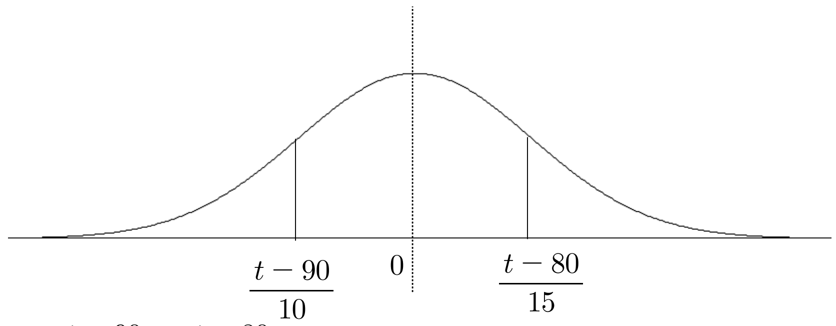
$(AB)^4 = A^4B^4 = A^3A(B^2)^2 = -A^2(A+E)^2 = -A^4-2A^3-A^2$

$= A^2+2A-A^2 = 2A$이므로 답은 16입니다.

25. [무엇이 확률변수가 될 수 있는가]

sol)

광역버스 A, B의 과속 방지 장치에서 하루 동안 경고음이 울린 시간을 각각 확률변수 X_A, X_B로 잡을 수 있습니다. 그리고 두 확률변수가 모두 정규분포를 따른다고 하였으므로 $P(X_{\mathrm{A}} \geq t) = P(X_{\mathrm{B}} \leq t)$를 표준화하면 $P\left(z \leq \frac{t-90}{10}\right) = P\left(z \geq \frac{t-80}{15}\right)$가 되고, 표준정규분포함수에서 서로 대칭인 구간을 적분해야 넓이가 같게 나옵니다.



따라서 $\frac{t-90}{10}+\frac{t-80}{15} = 0 \ \rightarrow\ t = 86$이 정답이 됩니다.

26. [등차수열의 합의 비밀]

sol)

(가)에서 $\{a_{n+1}-a_n\}$이 등차수열이라고 하였으니 $a_{n+1}-a_n = dn+\square$ 정도로 나타낼 수 있습니다. 등차수열이 n에 대한 일차 이하의 식으로 나타낼 수 있으므로 형식적으로 나타내 준 것이니 $d, \square$에 너무 의식하지 않아도 됩니다. 이때 a_n은 축차대입법으로서 양변에 $n \Rightarrow 1, 2, \cdots, n-1$을 대입하여 변변 더해서 $a_n - a_1 = pn^2+qn+r\ (n \geq 2)$의 형태로 정리할 수 있습니다. 등차수열의 첫째 항부터 제 n번째 항까지의 합은 보통 상수항이 0인 n에 대한 이차식이지만 아까 축차대입법 때 n이 아닌 $n-1$까지 대입하여 더한 $\sum_{k=1}^{n-1}(dk+\square) = \frac{d(n-1)n}{2}+(n-1)\square$로 인해서 일반적인 등차수열의 합처럼 $r=0$이라 보장할 수 없기 때문입니다.

따라서, $a_n = pn^2+qn+a_1+r$이라 두어야 하고, (나)를 이용하면

$$n\left(\sqrt{a_n}-n\right) = \frac{n\left(a_n-n^2\right)}{\sqrt{a_n}+n} = \frac{(p-1)n^2+qn+a_1+r}{\sqrt{\frac{a_n}{n^2}}+1}$$

에서 $p=1$이고 $q=0, a_1+r=16$이 되어 $a_n = n^2+16\ (n \geq 2)$임을 알 수 있습니다. 다시, (가)에 의해 $a_1 = 17$로 $a_n = n^2+16\ (n \geq 1)$이

되고 $a_2 = 20$ 이므로 $2a_1 - a_2 = 34 - 20 = 14$ 가 나옵니다.

※ 실제로 $\{a_n\}$ 을 관찰해보면 다음과 같습니다.

$\{a_n\}$: $17, 20, 25, 32, 41, \cdots$

$\{a_{n+1} - a_n\}$: $3,\ 5,\ 7,\ 9, \cdots$

상수항이 0이 아닌 n에 대한 이차식 $a_n = n^2 + 16$ 도 제 2항부터 등차수열의 합이 됩니다. 여기서 그러한 수열은 $\{b_n\}$: $17, 3, 5, 7, 9, \cdots$ 로 $a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ 이 성립합니다. 여기서 $a_{n+1} - a_n$ 과 b_n 을 혼동한다면 문제 풀이에서 시간을 많이 뺐길 수도 있습니다.

[2008년 06월 평가원 수리(가형) 16번]

16. 공차가 d_1, d_2인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자.

$$S_n T_n = n^2(n^2-1)$$

일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_n = n$이면 $b_n = 4n-4$이다.

ㄴ. $d_1 d_2 = 4$

ㄷ. $a_1 \neq 0$이면 $a_n = n$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2010년 08월 경찰대 수리 18번]

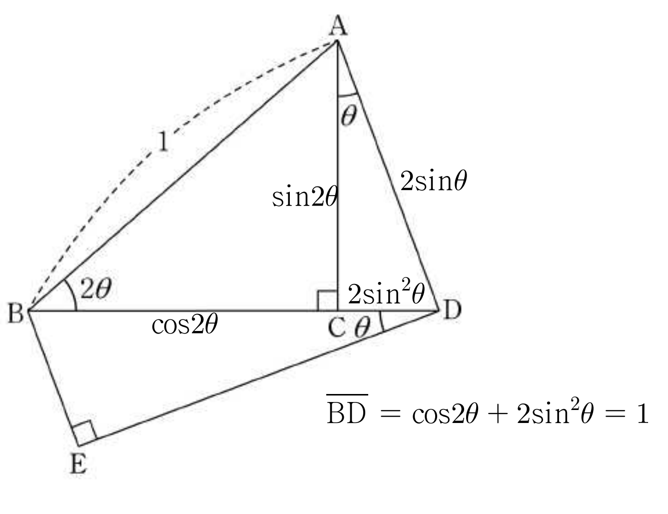
18. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 공차가 음수인 등차수열 $\{b_n\}$의 첫째 항부터 n째 항까지의 합을 각각 S_n과 T_n이라 하자. 다음이 성립할 때, a_{20}과 b_{20}의 곱 $a_{20}b_{20}$의 값은?

$$\begin{cases} a_1 = b_1 + 1 \\ S_n^2 - T_n^2 = n^2(n+1) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

① -108 ② -105 ③ -102 ④ -99 ⑤ -96

27. [시키는 대로]

sol)



$\overline{\mathrm{BD}} = \cos 2\theta + 2\sin^2\theta = 1$

삼각형 ABD 가 이등변삼각형이었네요! $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 에서

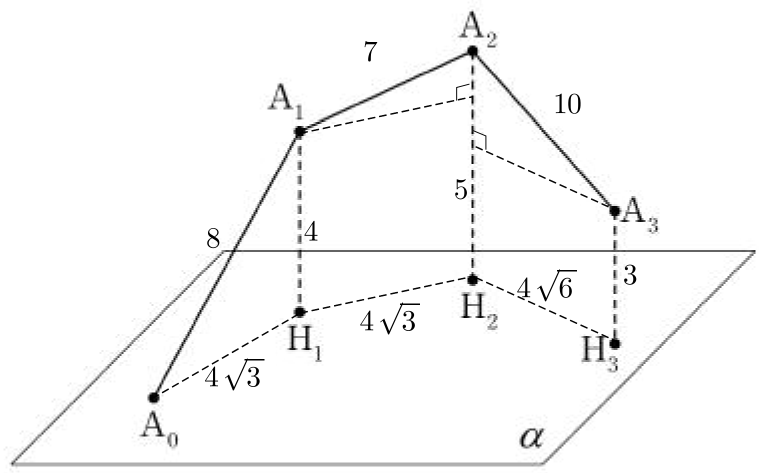
$3\overline{\mathrm{AD}} + 8\overline{\mathrm{DE}} = 6\sin\theta + 8\cos\theta = 10\sin(\theta + \alpha)$ $\left(\tan\alpha = \frac{4}{3}\right)$이고

$\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$이면 최대인데 $\alpha > \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$가 되어

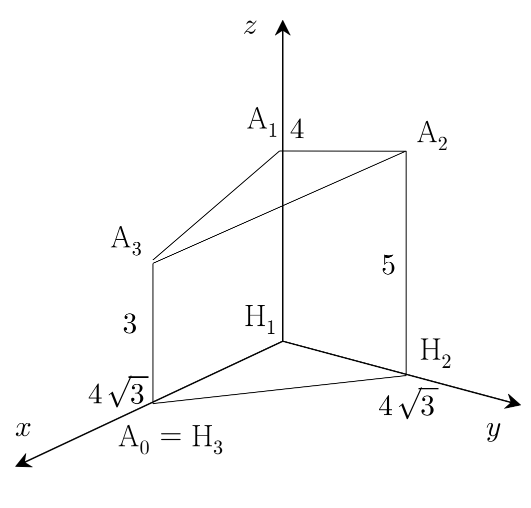
$3\overline{\mathrm{AD}} + 8\overline{\mathrm{DE}} \le 10$이 최댓값이 됩니다.

28. [아무 말 없더라도 구할 수 있는 수치는 당연히 구해놓는 습관]

sol.1)



편의상 바닥 평면인 α평면을 xy평면이라 두고 $\overrightarrow{\mathrm{H_1A_1}}$ 방향을 z축 양의 방향으로 잡겠습니다. 이때 $\overline{\mathrm{A_0A_3}}$가 최소가 되려면 $\mathrm{A_3}$의 수선의 발이 $\mathrm{A_0}$가 되어야 하는데, 그러려면 세 변 $\mathrm{A_0H_1}, \mathrm{H_1H_2}, \mathrm{H_2H_3}$가 삼각형을 이루어야 합니다. 때마침 길이들을 보니 $1 : 1 : \sqrt{2}$ 의 길이비로 직각이등변삼각형이 되네요. 그 상황을 다시 그려보면 다음과 같습니다.

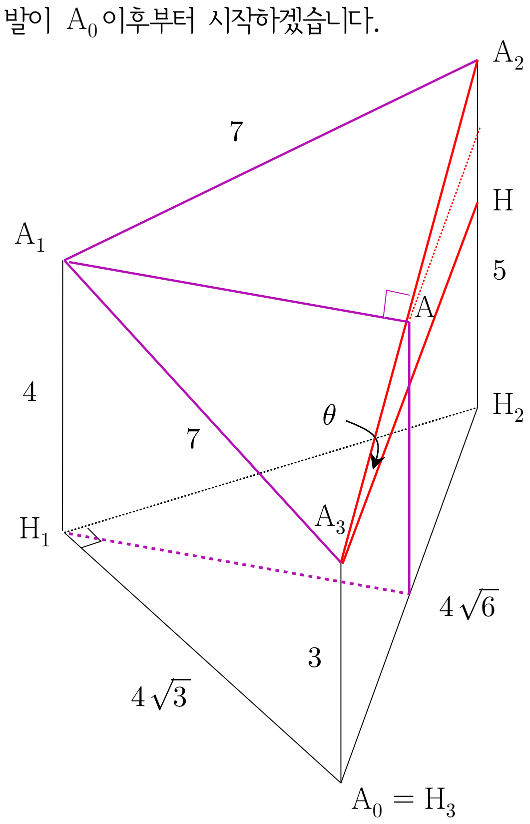


편의상 좌표축을 집어넣으면 평면 $\mathrm{A_1A_2A_3}$의 x, y, z 절편이 각각 $16\sqrt{3}, -16\sqrt{3}, 4$ 로 평면의 방정식은 $\frac{x}{16\sqrt{3}} + \frac{y}{-16\sqrt{3}} + \frac{z}{4} = 1$, 즉 $x - y + 4\sqrt{3}z = 16\sqrt{3}$ 으로 법선벡터는 $(1, -1, 4\sqrt{3})$입니다. 따라서 $\cos\theta = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{1+1+48}} = \frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$ 가 되어 $25\cos^2\theta = \frac{48}{2} = 24$이 나옵니다.

sol.2)

이전 방법이 공간에서 절편을 모두 알 때 평면의 방정식을 이용하여 좌표 풀이로 이어 나간 것이라면 이번에는 좌표를 쓰지 않고 한 번 풀어보도록 하겠습니다. 두 가지 풀이 다 구사할 수 있으면 좋습니다.

A_3의 수선의 발이 A_0이후부터 시작하겠습니다.



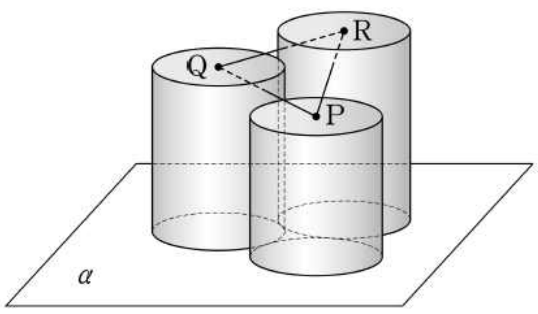
삼각형 $A_1A_2A_3$가 이등변이므로 꼭짓점 A_1에서 모서리 A_2A_3에 내린 수선의 발을 A, 꼭짓점 A_3에서 모서리 A_2H_2에 내린 수선의 발을 H라 하였을 때, 평면 α와 평면 $A_1A_2A_3$의 교선이 A_1A와 평행하므로

$\tan\theta = \dfrac{\overline{HA_2}}{\overline{A_3H}} = \dfrac{2}{4\sqrt{6}}$ 이고 $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} = \dfrac{25}{24}$ 로부터

역시 $25\cos^2\theta = 24$가 나옵니다.

[2008년 11월 대수능 수리(가형) 24번]

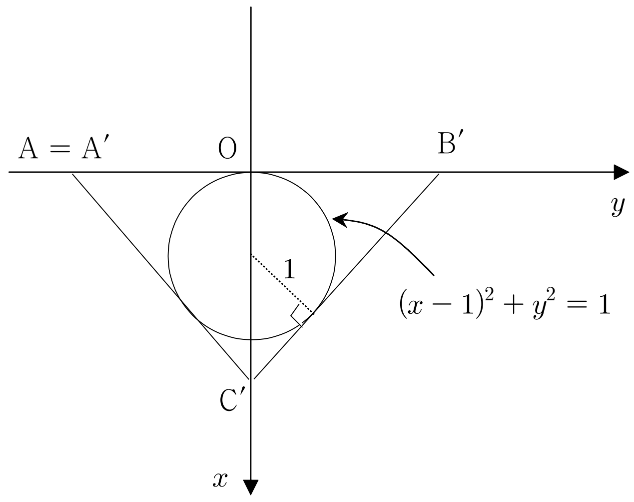
24. 그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α가 이루는 각의 크기는 $60°$이다. 세 원기둥의 높이를 각각 8, a, b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $8<a<b$) [4점]



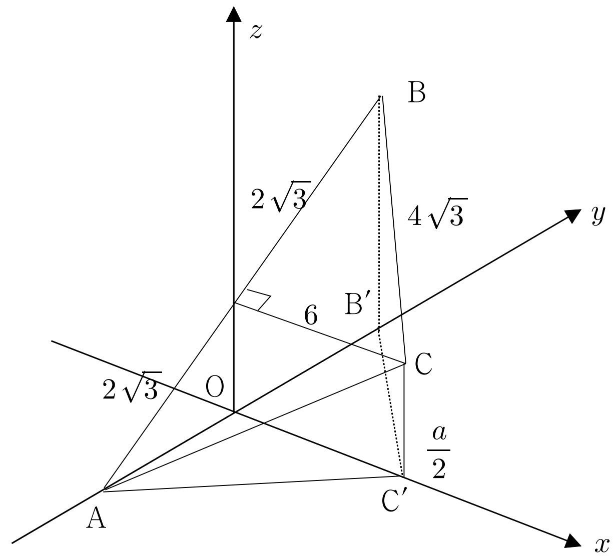
29. [기출 문제의 느낌이 물씬 나는]

sol)

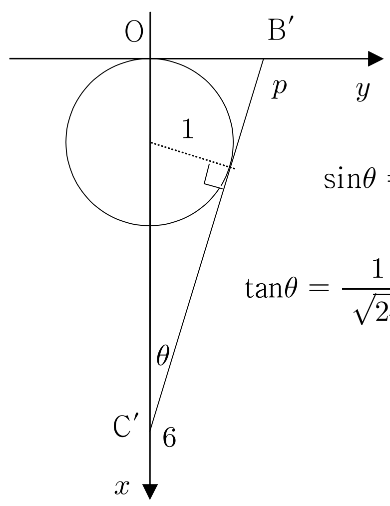
위에서 내려다 본 정사영 상황을 보겠습니다. 그러면 점 B′는 y축 상에, 점 C′는 x축 상에 존재합니다.



그러면 (나)에서 제시한 원의 방정식 $(x-1)^2+y^2=1, z=0$이 x축 대칭이므로 두 점 A', B' 역시 x축 대칭인데 편의상 위 그림과 같이 위치를 잡았습니다. 그렇다면 이제 원래 A, B, C의 좌표를 생각해보면 $A(0,-p,0), B(0,p,a), C(q,0,r)$라 둘 수 있고, $\overline{CA}=\overline{CB}$이므로 $r=\dfrac{a}{2}$가 되어야 합니다. 즉, $A(0,-p,0), B(0,p,a), C\left(q,0,\dfrac{a}{2}\right)$가 됩니다.



이렇게 공간 상에서 그대로 생각해보면 $q=6$임을 알 수 있고, 정사영된 상태에서 원의 접선을 이용하여 p값도 마저 구할 수 있습니다.



$\sin\theta = \dfrac{1}{5} \rightarrow \tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{24}}$

$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{24}} = \dfrac{p}{6} \rightarrow p = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\overline{AB}^2 = 48 = 4p^2 + a^2 = 6 + a^2 \rightarrow a^2 = 42$

30. [킬러에 대처하는 우리들의 자세]

sol)
딱 봐도 어려워 보이는 문제입니다. 이럴 때는 문제를 첫 줄부터 차분하게 읽어가며 머리로 마음으로 받아들여야 합니다.

30. 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g(x+4)=g(x)+4$를 만족시키고,

$g(x+4)=g(x)+4$를 조금만 다듬으면 $\dfrac{g(x+4)-g(x)}{(x+4)-x}=1$이 됩니다.
즉, 구간 길이가 4면 평균변화율이 1이 되어야 합니다.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (-1 \le x < 0) \\ \dfrac{1}{4}(x^4-6x^3+9x^2+4x) & (0 \le x < 3) \end{cases}$$

이다. 집합 $\{g'(t) \mid g(t)=tg'(t),\ 0 \le t < 40\}$의 원소의 개수를 구하시오. [4점]

무언가 윤곽이 드러나려고 하는 것 같은데 끝에 $g(t)=tg'(t)$가 걸리네요.
그러고 보니 함수 $g(x)$ 위의 점 $(t, g(t))$에서 그은 접선의 방정식 $y-g(t)=g'(t)(x-t)$에서 y절편이 $y=g(t)-tg'(t)$인데 결국 마지막 조건은 함수 $g(x)$ 위의 점 $(t, g(t))$에서 그은 접선이 원점을 지나도록 혹은 원점을 지나는 직선이 $g(x)$에 접하도록 하는 t의 개수를 뜻하네요. 변곡접선?
이제 $0 \le x < 3$에서 $g(x)$를 분석해봅시다. 함수가 다르게 정의되는 경계에서 어떻게 되는지가 중요하겠고, 그에 따라 사차함수 $f(x)$도 잡아줄 수 있습니다. 이번 6월 평가원 30번 문항의 기운이 느껴지네요.

$g(0)=0,\ g(3)=\dfrac{1}{4}(3^4-2\cdot3^4+3^4+12)=3$이고

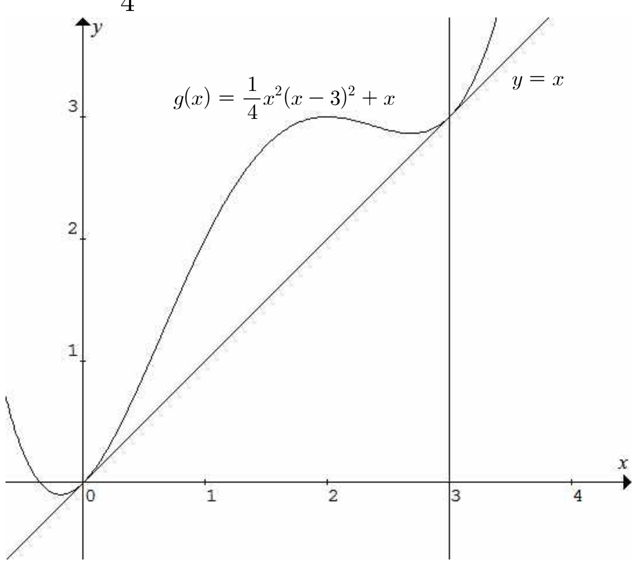
$g'(x)=\dfrac{1}{4}(4x^3-18x^2+18x+4)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{9}{2}x+1$에서

$g'(0)=1,\ g'(3)=3^3-\dfrac{3}{2}\cdot3^3+\dfrac{1}{2}\cdot3^3+1=1$이므로 $g(x)$는 $y=x$와 $x=0,3$에서 접하는 개형입니다. 하지만 $g(x)$가 사차함수이므로 $g(x)=x$는 $x=0,3$을 각각 이중근으로 가져야 하며

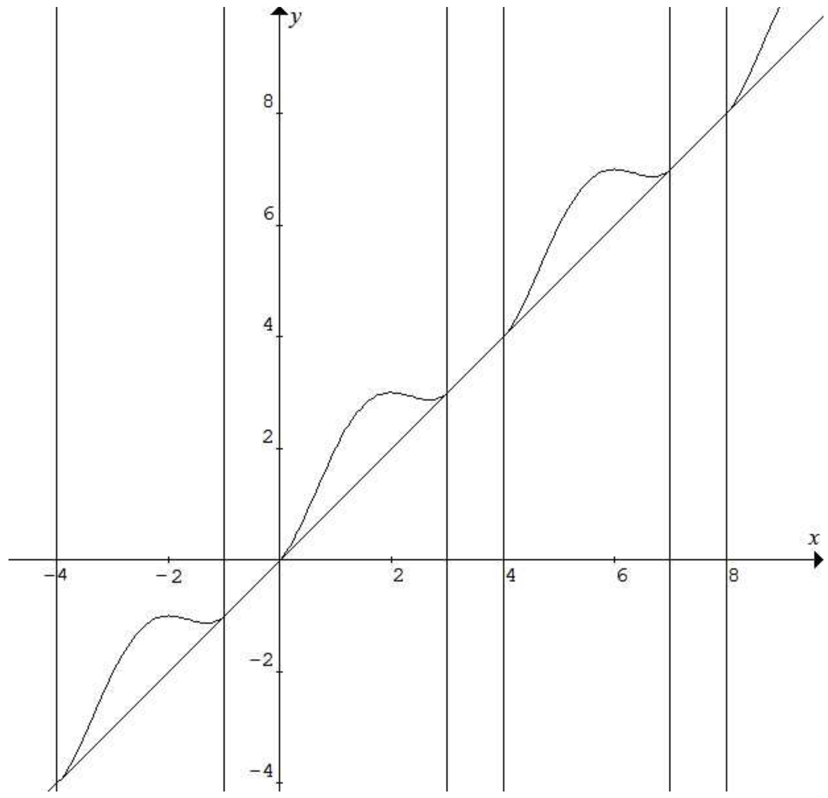
$g(x)-x=\dfrac{1}{4}x^2(x-3)^2$이 됩니다. 혹은 $g''(x)=3x^2-9x+\dfrac{9}{2}$에서

$g''(0)=g''(3)=\dfrac{9}{2}>0$이므로 구간 경계에서 $g(x)$는 아래로 볼록한 개형이며, 최고차항이 양수라는 사실이 $g(x)=x$가 $x=0,3$을 각각 이중근으로 갖는다는 사실을 뒷받침 해줍니다.

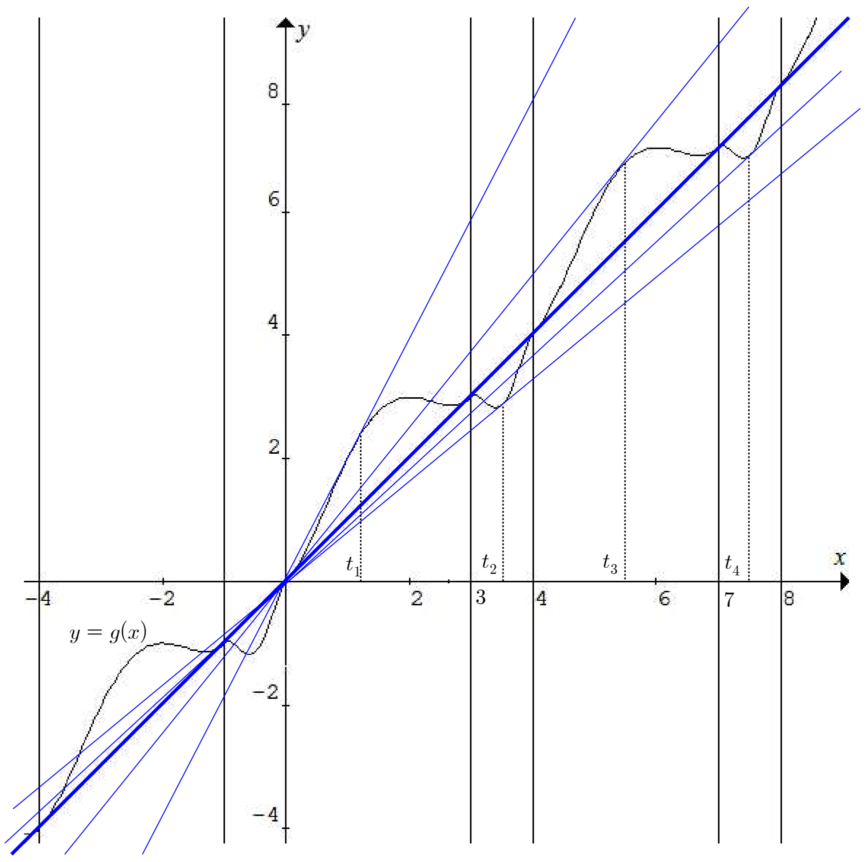
그래서 $g(x)-x=\dfrac{1}{4}x^2(x-3)^2$의 개형은 다음과 같습니다.



그런데 $g(x+4)=g(x)+4$를 이용해 실수 전체의 집합에서 정의되게 하려면 $-1 \le x < 0$에서 정의된 $f(x)$가 공백을 메워주어야 합니다.



그런데 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다고 하였으므로 $f(x)$는 $x=-1,0$에서 $y=x$에 접하되 최고차항의 계수가 음수여야 합니다.
따라서 위로 볼록하면서 접하는 개형으로 다음과 같이 그릴 수 있습니다.



$f(x)$를 표현자면 $-1 \le x < 0$에서 $f(x)-x=kx^2(x+1)^2\ (k<0)$가 됩니다. 끝으로 $g(t)=tg'(t)$를 헤아리기 위해 함수 $g(x)$ 위의 점 $(t, g(t))$에서 그은 접선이 원점을 지나도록 그어보았더니 $0 \le t < 40$에서 $g(t)=tg'(t)$인 접선의 기울기 종류 $g'(t)$는 $g'(t)=1$이 수많은 변곡점들 $(3n, 3n), (4n, 4n)$에서 공통적으로 정의됩니다. 따라서 하나로 카운팅.
그리고 $0 \le t < 40$을 길이 4씩 자른 열 개의 구간에서 $g'(t)=1$ 이외에 원점을 지나는 접선의 기울기 종류로 두 개씩 존재하므로,
$1+2\times10=21$이 정답이 됩니다. 어차피 개수만 헤아리면 되니까 $g(x)$가 각 구간에서 위로 볼록한지 아래로 볼록한지에 따라 접선을 그어주며 헤아려도 충분합니다!

마지막으로 30번을 풀면서 스쳐갔던 문제들을 소개하고 끝내겠습니다.

[2009년 08월 사관학교 수리(가형) 27번]

27. 5차다항식 $P(x)$에 대하여, $P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누면 나머지가 8이고, $P(x)$를 $(x+1)^3$으로 나누면 나머지가 -8일 때, $P(2)$의 값을 구하시오. [3점]

n중근의 의미를 깨우치기에 괜찮은 문제입니다.

$P(x)-8=(x-1)^3Q_1(x)$라 하고 미분하면 좌변은 $P'(x)$지만 여전히 우변은 $(x-1)^2$을 인수로 갖고, $P(x)+8=(x+1)^3Q_2(x)$라 하고 미분하면 좌변은 $P'(x)$지만 여전히 우변은 $(x+1)^2$을 인수로 갖기 때문에 $P'(x)=k(x-1)^2(x+1)^2=k(x^2-1)^2$이라 둘 수 있습니다.

[2011년 06월 평가원 수리(가형) 21번]

21. 양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$f(x)=\frac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)$$

에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. **점 $(2, 2)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.**
ㄴ. **방정식 $f(x)=x$의 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다.**
ㄷ. **함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=2$에서 미분가능하다.**

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

이것도 $f(x)$를 분석하기 위해 도함수, 이계도함수를 구해보면

$f'(x)=\frac{1}{27}(4x^3-18x^2+24x+19)$

$f''(x)=\frac{1}{27}(12x^2-36x+24)=\frac{4}{9}(x-1)(x-2)$인데, 역함수와의 교점 관계를 유도하기 위해 ㄱ, ㄴ, ㄷ에서 힌트를 주고 있네요.

그리고 $f(x)=x$는 $x=0$에서 단일근, $x=2$에서 삼중근을 갖습니다.

[2015학년도 06월 포카칩 모의평가 수학 영역(B형) 21번]

21. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

라 하자. $f(x)$가 극댓값 0을 가질 때, $g(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖도록 하는 서로 다른 모든 실수 a의 개수는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

아까 $g(t)=tg'(t)$의 의미를 파악 하는데 그냥 보고 찾았으니 논리적 비약이 있었던 것처럼 이 문제에서도 마찬가지라고 생각합니다. 대신 익숙하지만 낯선 상황에서 포장하여 제시해서 기존의 의미를 가리는 것이죠.

[2014년 06월 평가원 수학 영역(B형) 30번]

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $1\le f'(x)\le 3$이다.
(나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4n, 8n)$, 점 $(4n+1, 8n+2)$, 점 $(4n+2, 8n+5)$, 점 $(4n+3, 8n+7)$을 모두 지난다.
(다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌 구간 $[2k, 2k+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_3^6 f(x)dx=a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오. [4점]

구간 잘라서 붙이되 미분 가능하도록 하려면 함숫값 뿐만 아니라 미분계수까지 같아야 한다는 점을 이용해야 합니다. 최근 평가원 시험에 나왔으니 최신 유형이라고 해도 지나치지 않겠죠?