29번

$2\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2-\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\right|^2-\left|\overrightarrow{P_2Q_2}\right|^2$ 을 간단히 하기 위해 평면 $y=4$, $y+\sqrt{3}z+8=0$ 을 평행이동시켜 세 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{P_1Q_1}$, $\overrightarrow{P_2Q_2}$ 의 시점 P, P_1, P_2 를 일치시키자. 이때, 두 평면 $y=4$, $y+\sqrt{3}z+8=0$이 이루는 각 θ를 구하면

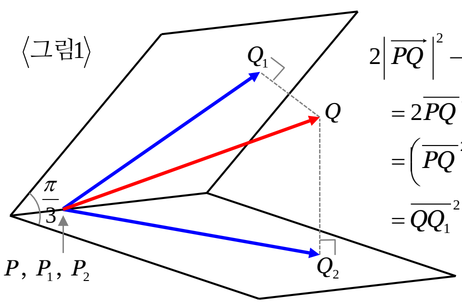
$$\cos\theta=\frac{(0,1,0)\bullet\left(0,1,\sqrt{3}\right)}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}\text{로부터 }\theta=\frac{\pi}{3}\ (\because 0\le\theta\le\pi)$$

이다.

또한 세 점 P, P_1, P_2 를 일치시키면 $\overrightarrow{PQ}$가 두 평면이 예각을 이루는 쪽으로 올 수도 있고, 둔각을 이루는 쪽으로 갈 수도 있으므로 경우를 나눠서 생각해야 한다.

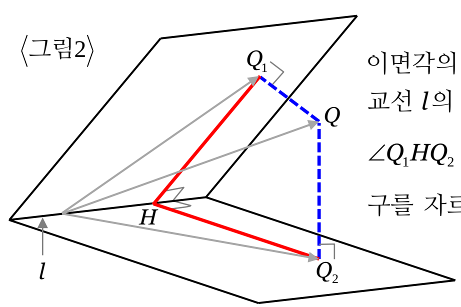
$i)$ $\overrightarrow{PQ}$ 가 두 평면이 예각을 이루는 쪽으로 올 때

〈그림1〉



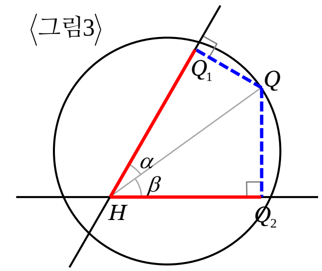
$$2\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2-\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\right|^2-\left|\overrightarrow{P_2Q_2}\right|^2$$
$$=2\overline{PQ}^2-\overline{PQ_1}^2-\overline{PQ_2}^2$$
$$=\left(\overline{PQ}^2-\overline{PQ_1}^2\right)+\left(\overline{PQ}^2-\overline{PQ_2}^2\right)$$
$$=\overline{QQ_1}^2+\overline{QQ_2}^2$$

〈그림2〉

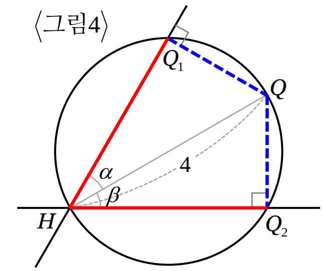


이면각의 활용을 위해 평면 QQ_1Q_2 와 교선 l의 교점을 H라 하면 $\angle Q_1HQ_2=\frac{\pi}{3}$가 되고, 평면 QQ_1Q_2 로 구를 자르면 〈그림3〉이 나타난다.

〈그림3〉



〈그림4〉



$\angle QHQ_1=\alpha$, $\angle QHQ_2=\beta$라 하면

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$$
$$\overline{QQ_1}^2+\overline{QQ_2}^2$$
$$=\left(\overline{QH}\sin\alpha\right)^2+\left(\overline{QH}\sin\beta\right)^2$$
$$=\overline{QH}^2\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta\right)$$

이며, 위 식의 값이 최대이려면 〈그림4〉와 같이 $\overline{QH}$ 가 구의 지름과 일치해야 한다.

따라서

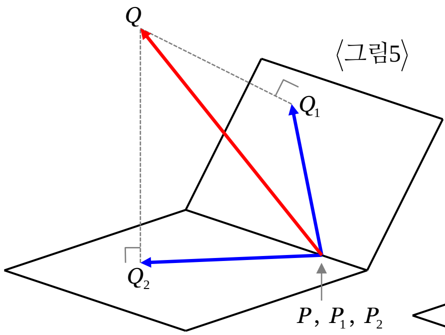
$$\overline{QQ_1}^2+\overline{QQ_2}^2$$
$$=16\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta\right)$$
$$=16\left(\frac{1-\cos2\alpha}{2}+\frac{1-\cos2\beta}{2}\right)$$
$$=16-8(\cos2\alpha+\cos2\beta)$$
$$=16-8\times2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$
$$=16-8\cos(\alpha-\beta)$$

$$\alpha-\beta=\alpha-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=2\alpha-\frac{\pi}{3},\ 0\le\alpha\le\frac{\pi}{3}\text{로부터}$$
$$-\frac{\pi}{3}\le2\alpha-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}$$
$$\frac{1}{2}\le\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\le1$$
$$\frac{1}{2}\le\cos(\alpha-\beta)\le1$$

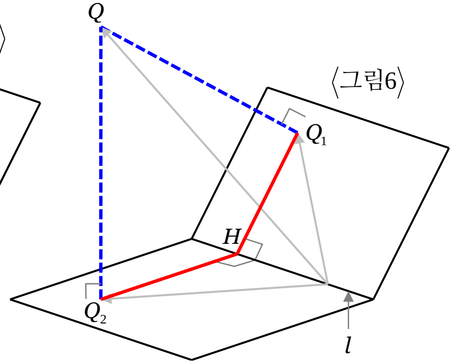
$\therefore\ \overline{QQ_1}^2+\overline{QQ_2}^2$ 의 최댓값은 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$일 때, 12이다.

$ii)$ $\overrightarrow{PQ}$가 두 평면이 둔각을 이루는 쪽으로 올 때

〈그림5〉

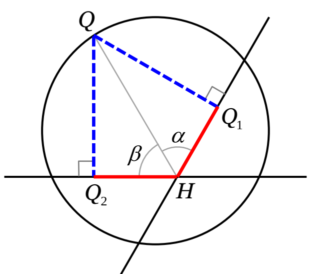


〈그림6〉

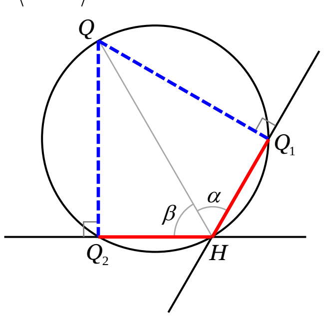


여기서도 이면각 활용을 위해 평면 QQ_1Q_2와 교선 l의 교점을 H라 하면 $\angle Q_1HQ_2=\dfrac{2\pi}{3}$가 되고, 평면 QQ_1Q_2로 구를 자르면 〈그림7〉이 나타난다.

〈그림7〉



〈그림8〉



또한 $\overline{QH}$를 구의 지름과 일치시키면

$$\overline{QQ_1}^2+\overline{QQ_2}^2$$
$$=16-8\times2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$
$$=16+8\cos(\alpha-\beta)$$

$$\alpha-\beta=\alpha-\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=2\alpha-\frac{2\pi}{3},$$

$0\le\alpha\le\dfrac{2\pi}{3}$로부터

$$-\frac{2\pi}{3}\le 2\alpha-\frac{2\pi}{3}\le\frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{1}{2}\le\cos\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)\le1$$

$$-\frac{1}{2}\le\cos(\alpha-\beta)\le1$$

$\therefore\ \overline{QQ_1}^2+\overline{QQ_2}^2$의 최댓값은 $\cos(\alpha-\beta)=1$일 때, 24이다.

$i)$, $ii)$로부터 $\overline{QQ_1}^2+\overline{QQ_2}^2$의 최댓값은 24이다.

☆〈그림4〉를 직관으로 곧바로 떠올리 수 있다면 그대는 직관 지존!

☆ $i)$에서 최댓값은 $|\alpha-\beta|=\dfrac{\pi}{3}$일 때 즉, $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\beta=\dfrac{\pi}{3}$일 때 생긴다.

☆ $ii)$에서 최댓값은 $\alpha-\beta=0$일 때 즉, $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{3}$일 때 생긴다. 이 것은 직관(추측?)으로 간단하게 파악되지만, 논리적으로 설명하자면 왼쪽과 같이 계산이 조금 복잡해진다.