2022학년도 대학수학능력시험 대비

꽃전 모의평가

해 설

CHOCOLATTE MATH LAB

초코라떼 수학연구소

빠른 정답

1	③	**9**	②	**16**	2	**23**	②
2	⑤	**10**	②	**17**	265	**24**	③
3	②	**11**	①	**18**	4	**25**	④
4	④	**12**	③	**19**	85	**26**	④
5	①	**13**	⑤	**20**	108	**27**	②
6	③	**14**	⑤	**21**	16	**28**	⑤
7	④	**15**	②	**22**	48	**29**	7
8	④					**30**	63

1번

$5^{\sqrt{2}+1}\times\frac{1}{\sqrt{5^{2\sqrt{2}}}}=5^{\sqrt{2}+1}\times\left(5^{2\sqrt{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}=5^{\sqrt{2}+1}\times 5^{-\sqrt{2}}$

$=5^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}=5$

답 : ③

2번

x^2이 우함수이므로, $\int_{-2}^{2}x^2dx=2\int_{0}^{2}x^2dx$

$2\int_{0}^{2}x^2dx-a\int_{0}^{2}x^2dx=0$, $a=2$

답 : ⑤

3번

$a_n=a_1+d\times(n-1)$이라할 때, $a_4-a_3=d$

즉 공차 $d=2$, $a_6=a_1+5d=a_1+10=13$

$a_1=3$, $a_{10}=3+2\times9=21$

답 : ②

4번

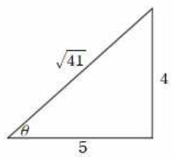
$\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{x\to-1}f(x)=0$, $\lim_{x\to0-}f(x)=-1$

$\lim_{x\to1+}f(f(x))-\lim_{x\to0-}f(x)=0-(-1)=1$

답 : ④

5번

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$일 때, $\tan\theta<0$이고, $\cos\theta=\frac{5}{\sqrt{41}}$이므로,



$\tan\theta=-\frac{4}{5}$, $\cot\theta=-\frac{5}{4}$

답 : ①

6번

$f(x)$의 역함수가 존재하려면, $f(x)$가 일대일 대응이어야 하고, 따라서 최고차가 양수인 $f(x)$는 단조증가함수이다.

$f'(x)=x^2+4x+m\geq0$, $D=4^2-4\times1\times m\leq0$

$16-4m\leq0, 16\leq4m$, $m\geq4$

답 : ③

7번

어떤 구간에서 함수가 미분가능하다는 것은 그 구간에서 함수가 연속이고 미분계수가 정의되어야 한다는 것이다. 이는 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 한다.

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$

$\lim_{x\to a-}f(x)=a^3-3a^2$, $\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)=9a+t$

$a^3-3a^2=9a+t$,

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-6x & (x<a)\\ 9 & (x\geq a)\end{cases}$$

$\lim_{x\to a-}f'(x)=\lim_{x\to a+}f'(x)=f'(a)$

$3a^2-6a=9$, $3(a^2-2a-3)=3(a-3)(a+1)=0$

$i)\ a=3$일 때

$a^3-3a^2=9a+t$, $3^3-3\times3^2=9\times3+t$, $27-27=27+t$

$t=-27$, $a+t=-24$

$ii)\ a=-1$일 때

$a^3-3a^2=9a+t$, $(-1)^3-3\times(-1)^2=9\times(-1)+t$

$-1-3=-9+t$, $t=5$, $a+t=4$

$\therefore a+t$의 최댓값은 4

답 : ④

8번

$\sum_{k=1}^{n}(\log_2(k+1)-\log_2k)=\sum_{k=1}^{n}\left(\log_2\left(\frac{k+1}{k}\right)\right)$

$=\log_2\frac{2}{1}+\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+....+\log_2\frac{n}{n-1}+\log_2\frac{n+1}{n}$

$=\log_2\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times....\times\frac{n}{n-1}\times\frac{n+1}{n}\right)=\log_2(n+1)$

3이하의 자연수는 1,2,3이므로,

$\log_2(n+1)=1$일 때, $\log_2(n+1)=1, \log_2(n+1)=\log_22$

$(n+1)=2$, $n=1$

$\log_2(n+1)=2$일 때, $\log_2(n+1)=2$, $\log_2(n+1)=\log_24$

$(n+1)=4$, $n=3$

$\log_2(n+1)=3$일 때, $\log_2(n+1)=3$, $\log_2(n+1)=\log_28$

$(n+1)=8$, $n=7$

조건을 만족하는 모든 자연수 n의 값의 합은 $1+3+7=11$

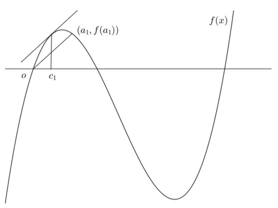
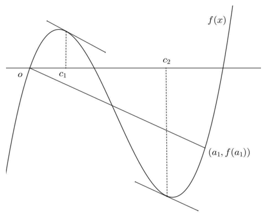
답 : ④

9번

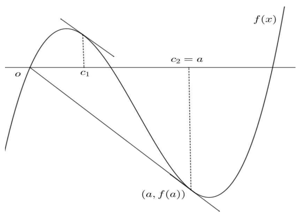
문제를 분석하면 $af'(c)=f(a)$이므로, $f'(c)=\dfrac{f(a)}{a}$이다.

$f'(c)$는 $x=c$에서의 접선의 기울기이고, $f(0)=0$이므로, $\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}$이다. 즉, 점$(0,0)$과 점$(a,f(a))$를 지나는 직선의 기울기와 같은 기울기를 가지는 점이 구간 $(0,a]$에서 두 개가 존재하도록 하는 최소의 a값을 찾는 문제이다.

평균값정리에 의해, $0<c\le a$에서 c값은 무조건 1개 이상 존재한다. 이때, 점 $(a,f(a))$의 위치에 따라 c값의 수는 달라진다.

따라서 어느 순간을 기점으로 $0<c\le a$인 조건을 만족하는 c의 개수는 1개에서 2개가 된다. a값의 크기를 서서히 키워가며 연속적으로 직선 $y=\dfrac{f(a)}{a}x$를 그리다 보면, 그림과 같이 직선이 곡선과 접선일 때가 조건을 만족하는 a가 최소가 되는 시점이다.



따라서, a가 최소일 때 $f'(a)=\dfrac{f(a)}{a}$

$2a(a-2)=0$이므로 최솟값 $a=2$이다.

답: ②

10번

선분 BC에 대해 코사인 법칙을 사용하면,

$\overline{\mathrm{BC}}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\dfrac{3}{8}$

$\overline{\mathrm{BC}}=4$

선분 BC에 대하여 각 A와 각 D는 원주각 이므로 $\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{D}$,

선분 BD는 원의 지름이고 점 C는 원 위의 점이므로 $\angle\mathrm{C}=90^\circ$

따라서, $\tan(\angle\mathrm{D})=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{CD}}}$ $\quad\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{12\sqrt{55}}{55}$

답: ②

11번

극한값이 수렴하고, 분모가 0으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴한다. $\therefore f(8)=0$이고, $\displaystyle\lim_{x\to8}\frac{f(x)}{x-8}=1$이므로, $f'(8)=1$이다.

$\left|\displaystyle\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}\right|=1$이므로 절댓값을 풀면, $\displaystyle\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}=\pm1$

$i)\displaystyle\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}=1$일 때,

$f(6)=-m, f'(6)=1$

$f'(8)=1$이므로, $f'(x)=ax+b$라 하였을 때,

$\begin{cases}6a+b=1\\8a+b=1\end{cases}\quad a=0, b=1$

이때, $a=0$이면 함수 $f(x)$가 이차함수가 아니므로,

$\displaystyle\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}=-1$임을 알 수 있다.

$ii)\displaystyle\lim_{x\to6}\frac{f(x)+m}{x-6}=-1$

$f(6)=-m, f'(6)=-1$

$\begin{cases}6a+b=-1\\8a+b=1\end{cases}\quad a=1, b=-7$

$\therefore f'(x)=x-7$, $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-7x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(8)=0$이므로, $C=24$, $\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-7x+24$

$f(6)=-m$이므로, $m=0$, $f(10)=4$이므로,

$f(10)+m=4$

답 : ①

12번

(가)를 $f(x)-x$형태로 변형하면,

$\displaystyle\int_0^{2n}f(x)dx=2n^2$

$\displaystyle\int_0^{2n}(f(x)-x)dx=2n^2-\int_0^{2n}xdx$

$\displaystyle\therefore\int_0^{2n}(f(x)-x)dx=0$

$\displaystyle\int_1^{2021}(f(x)-x)\,dx=\int_0^{2020}(f(x)-x)dx+\int_{2020}^{2021}(f(x)-x)dx$

$\displaystyle-\int_0^1(f(x)-x)dx$

변형한 조건 (가)에 $n=1010$을 대입하면,

$\displaystyle\int_0^{2020}(f(x)-x)dx=0$

조건 (나)에 $n=1011$을 대입하면,

$\displaystyle\int_{2020}^{2021}(f(x)-x)dx=1011$

조건 (나)에 $n=1$을 대입하면,

$\displaystyle\int_0^1(f(x)-x)dx=1$

따라서 $\displaystyle\int_1^{2021}(f(x)-x)dx=0+1011-1$

$=1010$

답 : ③

13번

ㄱ

$f(x)=k\sin\theta x^2+\cos\theta x+\cos^2\theta$

$g(\theta)$는 이차방정식의 서로 다른 근의 개수이므로,

판별식 $D=(\cos\theta)^2-4\times ksin\theta\times\cos^2\theta=\cos^2\theta(1-4ksin\theta)$의 부호에 따라 $g(\theta)$의 값이 달라진다.

$0<D$일 때 $g(\theta)=2$, $D=0$일 때 $g(\theta)=1$, $D<0$일 때 $g(\theta)=0$ 이다.

$D=0$일 때, $g(\theta)=1$이므로, $\cos^2\theta(1-4ksin\theta)=0$

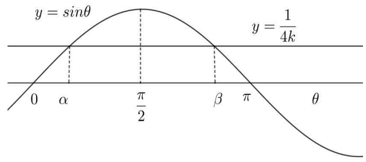
$i)\cos^2\theta=0$일 때,

$\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\frac{3\pi}{2}$

$ii)1-4ksin\theta=0$일 때,

$1=4ksin\theta$, $\frac{1}{4k}=\sin\theta$

$k>\frac{1}{4}$이므로, $0<\frac{1}{4k}<1$ $\therefore 0<\sin\theta<1$



이때, 두 근의 합이 항상 일정하므로, $\alpha+\beta=\pi$

$\therefore g(\theta)=1$이 되도록 하는 모든 θ값의 합은 $\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}+\pi=3\pi$이므로, ㄱ은 참이다.

ㄴ

$D=\cos^2\theta(1-4ksin\theta)\geq 0$일 때, $g(\theta)\geq 1$이고, 항상 $\cos^2\theta\geq 0$이므로, $(1-4ksin\theta)\geq 0$이어야 한다.

$1\geq 4ksin\theta$

$i)k>0$

$\frac{1}{4k}\geq\sin\theta$, $-1\leq\sin\theta\leq 1$이므로. $\frac{1}{4k}\geq 1$, $\therefore 0<k\leq\frac{1}{4}$

$ii)k<0$

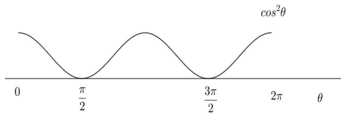
$\frac{1}{4k}\leq\sin\theta$, $-1\leq\sin\theta\leq 1$이므로, $\frac{1}{4k}\leq -1$, $\therefore -\frac{1}{4}\leq k<0$

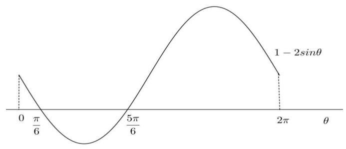
즉 k의 범위는 $-\frac{1}{4}\leq k\leq\frac{1}{4}$(단, $k\neq 0$)이므로, ㄴ은 참이다.

ㄷ

$k=\frac{1}{2}$일 때, 판별식 $D=\cos^2\theta(1-2\sin\theta)$이다.

$\cos^2\theta$는 $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$에서 0이고, $\frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$를 제외한 나머지 범위에서는 항상 0보다 크다. 또한 $1-2\sin\theta$는 $0\leq\theta<\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}<\theta\leq 2\pi$



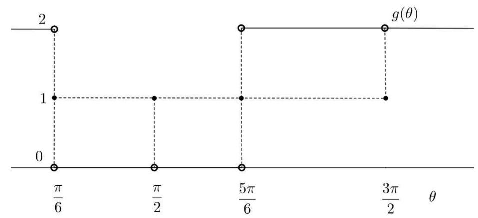


에서 양수이며, $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5\pi}{6}$에서는 음수, $\theta=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$일 때는 0이다.

따라서, 판별식 D의 부호 변화는 다음과 같다.

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	2π
D	+	+	0	−	0	−	0	+	0	+	+

이를 이용하여, $g(\theta)$의 그래프를 그리면,

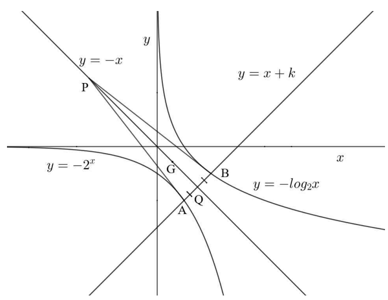


이 때, $a=\frac{\pi}{2}$, $a=\frac{3\pi}{2}$에서 $|\lim_{\theta\to a}g(\theta)-g(a)|=1$을 만족하므로, 만족시키는 모든 실수 a의 곱은 $\frac{3}{4}\pi^2$이다. 따라서 ㄷ은 참이다.

답 : ⑤

14번

$y=-2^x$와 $y=-\log_2 x$는 $y=-x$에 대하여 대칭이며, 점 P는 직선 $y=-x$위에 있다. 또한 점A와 점B는 각각 $y=-2^x$와 $y=-\log_2 x$ 위의 점이면서, 기울기가 1인 직선 위의 점이므로, 점A와 점B는 $y=-x$에 대하여 대칭이다. 그러므로 두 직선의 교점인 Q는 선분 AB를 이등분하는 점이다. 무게중심은 삼각형의 이등분선의 교점이므로 당연히 무게중심 G는 $y=-x$위에 있다.



$b=-a$, $a+b=0$이므로, $\begin{cases}a-b=1\\a+b=0\end{cases}$ $\therefore a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$

따라서, 무게중심G의 좌표는 $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$이다.

점A가 $y=-2^x$위의 점이므로, 점A의 x좌표를 t라하였을 때, 점A의 y좌표는 -2^t이며, 점B는 점A와 $y=-x$에 대하여 대칭이므로, 점B의 좌표는 $x=2^t, y=-t$이다. 이때, 무게중심의 좌표는 삼각형 세 꼭짓점의 좌표의 평균이므로, $\frac{1}{2}=\frac{t+2^t-2\sqrt{2}}{3}$,

$t+2^t=\frac{3}{2}+2\sqrt{2}$, $t=\frac{3}{2}$

이때, 삼각형 넓이는 $S=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2}\overline{\mathrm{PG}})\times(\overline{\mathrm{AB}})$이다.

점A와 점B는 모두 기울기가 1인 직선 위에 있는점이므로, 선분AB의 길이는 $\sqrt{2}\left(2^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\right)=\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)=4-\frac{3}{2}\sqrt{2}$이고, 점 P와 점 G 역시 $y=-x$위에 있으므로, 선분PG의 길이는

$\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-(-2\sqrt{2})\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{2}\right)$이다.

따라서 삼각형 넓이 $S=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{2}\right)\times\left(4-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$

$=-3\sqrt{2}+\frac{87}{8}$, $p=8, q=87, r=-3$이므로, $p+q+r=92$이다.

답 : ⑤

15번

$a_2=-2$

$n=1$일 때,

$$a_3=\begin{cases}-4-a_1-\frac{1}{2}a_4 & (1\le a_3)\\ -4+3=-1 & (a_3<1)\end{cases}$$

$\therefore a_3=-4-a_1-\frac{1}{2}a_4$

$n=2$일 때,

$$a_4=\begin{cases}2a_3-a_2-\frac{1}{2}a_4 & (1\le a_4)\\ 2a_3+3 & (a_4<1)\end{cases}$$

$Case_{1-1}$) $1\le a_3, 1\le a_4$

$a_4=2a_3-a_2-\frac{1}{2}a_4$ $a_2=-2$이므로

$a_4=\frac{4}{3}(a_3+1)$ $1\le a_3$이므로 $\frac{8}{3}\le a_4$

이는$1\le a_3, 1\le a_4$라는 조건에 만족한다.

$Case_{1-2}$) $1\le a_3, a_4<1$

$a_4=2a_3+3$

이 때, $1\le a_3$이므로 $5\le a_4$이다. 따라서 조건에 모순이다.

$Case_{2-1}$) $a_3<1, 1\le a_4$

$a_3=-1$, $a_2=-2$이므로

$a_4=2a_3-a_2-\frac{1}{2}a_4$

$a_4=-\frac{1}{2}a_4$

$a_4=0$

즉, $a_3<1, 1\le a_4$일때는 성립하지 않는다.

$Case_{2-2}$) $a_3<1, a_4<1$

$a_3=-1$이므로

$a_4=2a_3+3$

$a_4=1$

이때, $a_4<1$이므로 역시 성립하지 않는다.

즉, $Case_2$)는 성립하지 않는다.

$\therefore Case_{1-1}$)일 때 성립한다.

$n=3$ 일 때,

$$a_5=\begin{cases}2a_4-a_3-\frac{1}{2}a_4 & (1\le a_5)\\ 2a_4+3 & (a_5<1)\end{cases}$$

$Case_{1-1-1}$) $1\le a_3$, $\frac{8}{3}\le a_4$, $1\le a_5$

$a_5=2a_4-a_3-\frac{1}{2}a_4$ 이 때, $a_4=\frac{4}{3}(a_3+1)$이므로 $a_3=\frac{3}{4}a_4-1$

$a_5=\frac{3}{4}a_4+1$ $\frac{8}{3}\le a_4$이므로 $3\le a_5$ $a_5=3$또는 4

$n=4$일 때,

$$a_6=\begin{cases}2a_5-a_4-\frac{1}{2}a_4 & (1\le a_6)\\ 2a_5+3 & (a_6<1)\end{cases}$$

a_5가 $3, 4$일 때 각각 $1<a_6$이다.

따라서, $a_5=3$일 때,

$a_6=2a_5-a_4-\frac{1}{2}a_4$, $a_4=\frac{8}{3}$이므로 $a_6=2$, $a_5=3$, $a_4=\frac{8}{3}$,

$a_3=1$, $a_2=-2$, $a_1=-\frac{19}{3}$

$\Rightarrow$ a_1이 정수가 아니므로 모순이다.

$a_5=4$일 때,

$a_6=2$, $a_5=4$, $a_4=4$, $a_3=2$, $a_2=-2$, $a_1=-8$

$\Rightarrow a_1+a_6=-6$이다.

$Case_{1-1-2}$) $1\le a_3, 1\le a_4, a_5<1$

애초에 문제에서 a_5는 4이하의 자연수라고 했으므로 모순이다.

$\therefore a_1+a_6=-6$

답 : ②

16번

$\log_6 4+\dfrac{2}{1+\log_3 2}$

$=\log_6 4+\dfrac{2}{\log_3 3+\log_3 2}=\log_6 4+\dfrac{2}{\log_3 6}$

$=\log_6 4+2\log_6 3\ =\log_6 4+\log_6 9\ =\log_6 36=2$

답 : 2

17번

$\displaystyle\sum_{k=1}^{11}(k+1)^2-\sum_{k=2}^{10}k^2$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{11}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{9}(k+1)^2$

$\displaystyle=\sum_{k=10}^{11}(k+1)^2$

$\displaystyle=\sum_{k=11}^{12}k^2$

$=121+144=265$

답 : 265

18번

$\displaystyle\int_0^4|v(t)|dt=\int_0^1 v(t)dt-\int_1^3 v(t)dt+\int_3^4 v(t)dt$

$\displaystyle\int_0^1 v(t)dt=\int_0^1 t^2-4t+3dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1=\frac{4}{3}$

$\displaystyle\int_1^3 v(t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_1^3=-\frac{4}{3}$

$\displaystyle\int_3^4 v(t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_3^4=\frac{4}{3}$

이동거리 $P=\dfrac{4}{3}-\left(-\dfrac{4}{3}\right)+\dfrac{4}{3}=4$

답 : 4

19번

$\displaystyle\int_1^x(x-t)f(t)\,dt=x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt$

$x=1$대입)

$\displaystyle 1\times\int_1^1 f(t)dt-\int_1^1 tf(t)dt=a+\frac{1}{2}f(0)-1+\frac{7}{12}=0$

$a+\dfrac{1}{2}f(0)=\dfrac{5}{12}$

$\displaystyle\left(x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt\right)'=xf(x)+\int_1^x f(t)dt-xf(x)=\int_1^x f(t)dt$

$=3ax^2+f(0)x-1$

$x=1$대입)

$\displaystyle\int_1^1 f(t)dt=0=3a+f(0)-1$

$\begin{cases}a+\dfrac{1}{2}f(0)=\dfrac{5}{12}\\ 3a+f(0)=1\end{cases}\quad\therefore a=\dfrac{1}{6},f(0)=\dfrac{1}{2}$

$\displaystyle\left(\int_1^x f(x)dx\right)'=f(x)=6ax+f(0)=x+\frac{1}{2}$

$\{f(-5)\}'=\left(-\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{81}{4},\ \therefore p+q=81+4=85$

답 : 85

20번

공비가 양수일 때, 모든 항은 음수이므로, $a_n+|a_n|$의 값은 항상 0이다. 따라서 공비는 음수이다. n이 홀수면, a_n이 음수이므로, $a_n+|a_n|=0$이며, n이 짝수일 때, $a_n+|a_n|=2a_n$이다. 즉, 조건의 식을 변형하면,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(a_n+|a_n|)=2a_2+2a_4=\frac{20}{9}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{6}(a_n+|a_n|)=2a_2+2a_4+2a_6=\frac{182}{9}$

두 식을 연립하면, $2a_6=\dfrac{162}{9},a_6=\dfrac{81}{9}$이다. 초항을 a_1, 공비를 d라하면, $a_6=a_1\times d^5=\dfrac{81}{9}=\dfrac{3^4}{3^2}=\dfrac{3^5}{3^3}=\dfrac{1}{3^3}\times 3^5$

이때, 초항과 공비 둘 다 음수이므로, $a_1=\left(-\dfrac{1}{3^3}\right)$, $d=(-3)$이다.

$a_6=9$이므로, $a_7=-27,a_8=81$이다.

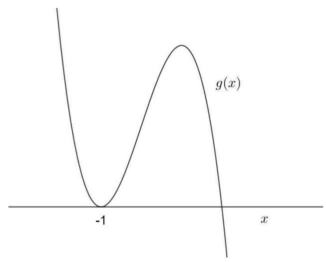
$\therefore a_8-a_7=81-(-27)=108$

답 : 108

21번

함수 $g(x)$는 -1부터 x까지 함수 $f(x)$를 $-f(k)$만큼 평행이동한 함수의 적분값이다. 따라서 $g(x)$는 최고차항이 음수인 삼차함수이다.
$g(-1)=0$, $g'(x)=f(x)-f(k)$이다. 방정식 $g(x)=0$의 근이 2개라는 것은 극값을 2개 갖고, 한 점에서는 중근을 갖고 한점에서는 1개의 실근을 가져야한다.

$Case_1$) $x=-1$에서 $g(x)$가 중근을 갖는 경우



$g'(-1)=0$이므로

$\Rightarrow f(-1)-f(k)=0$

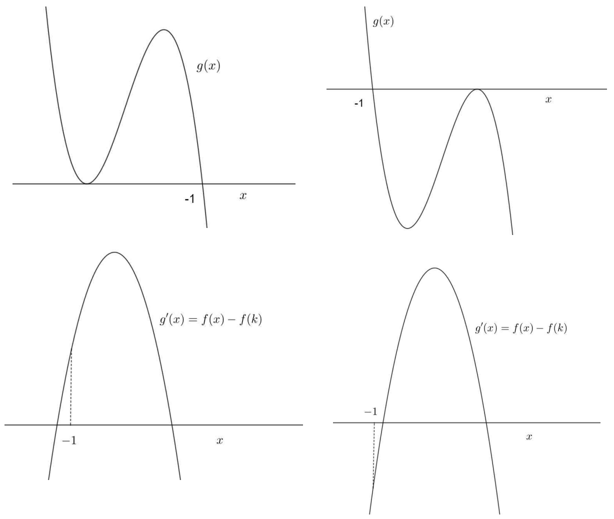
$\Rightarrow f(-1)=f(k)$

$\Rightarrow f(k)=0$

따라서 $Case_1$을 만족시키는 k의 값은 $-1,3$이다.

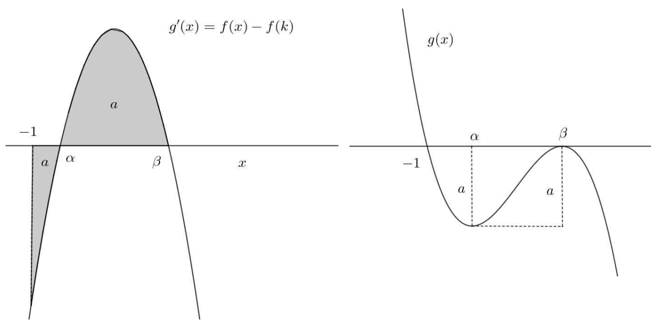
$Case_2$) $x\neq-1$에서 중근을 갖는 경우

$Case_{2-1}$ $Case_{2-2}$



$f(k)$가 음수인 경우 $f(k)$가 양수인 경우

$-1<x$인 구간에서 $g(x)$가 단조감소하는 경우 즉 $g'(x)$의 함숫값이 항상 음수인 경우는 존재하지 않는다.
따라서 $Case_{2-1}$는 불가능하다. $Case_{2-2}$가 가능한 $g(x)$의 경우이며 $-1<x$에서 함수$g'(x)$의 부호변화는 $-\to+\to-$이므로 $f(k)$는 양수이다.
그림과 같이 도함수의 적분값은 원함수의 함숫값의 변화량이다.



삼차함수의 비율관계에 의해, $\alpha-(-1)=\dfrac{\beta-(-1)}{3}$

$\Rightarrow 3\alpha-\beta=-2$

그리고 $f(x)-f(k)$는 y축으로만 평행이동하였으므로 여전히 축을 $x=-1$로 가진다. 따라서, $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$

$\Rightarrow \alpha+\beta=2$

위 두 개의 식을 연립하면, $\alpha=0,\ \beta=2$이다.
따라서, $f(x)-f(k)=-3x(x-2)$
$\Rightarrow f(k)=9$이다.
따라서 $k=0,\ 2$

$Case_1$과 $Case_2$ 모두 만족시키는 k값은 $-1,\ 0,\ 2,\ 3$ $\alpha=4$
$\therefore \alpha^2=16$이다.
답 : 16

22번

점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이다. 점P의 좌표는 $(0,-tf'(t)+f(t))$이므로, 점 P부터 원점 O까지의 거리는 $|-tf'(t)+f(t)|$이다. 점H의 좌표는 $(t,0)$이므로 점 H부터 점 A까지의 거리는 $|1-t|$이다. $h_1(t)=f(t)-tf'(t)$, $h_2(t)=t-1$ 라 하였을 때, 함수$g(t)$는

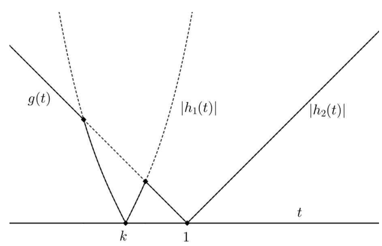
$$g(t)=\begin{cases}|h_1(t)| & (|h_2(t)|\geq|h_1(t)|)\\ |h_2(t)| & (|h_2(t)|<|h_1(t)|)\end{cases}$$

$f(t)=-\dfrac{1}{2}t^3+\cdots$이므로, $f'(t)=-\dfrac{3}{2}t^2+\cdots$이다. 따라서

$-tf'(t)+f(t)=\dfrac{3}{2}t^3+\cdots+\left(-\dfrac{1}{2}t+\cdots\right)=t^3+\cdots$이고, $h_1(t)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

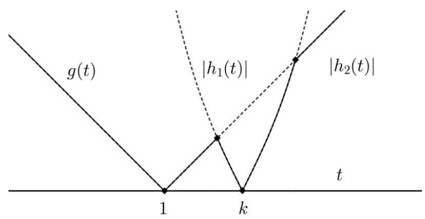
함수$|h_2(t)|$에서 $t=1$일 때, $g(1)=0$이므로, 방정식 $g(t)=0$는 $t=1$을 근으로 가진다. (다)조건에 의하면, 방정식 $g(t)=0$은 서로 다른 실근 2개를 가지고, 방정식$|h_2(t)|=0$에서 $t=1$을 제외하고, 근이 없으므로, 나머지 근 한 개는 방정식$|h_1(t)|=0$에서 가진다.
따라서 $|h_1(t)|$와 x축과의 교점이 $t=1$을 포함하여 2개거나, $t=1$을 제외하고 교점이 1개이면 (다)조건이 성립한다. 즉 방정식 $h_1(t)=0$는
1) $t=k\,(k\neq1)$에서 하나의 근을 가지거나
2) $t=1$에서 중근을 가지고 $t=k$ (단, $k\neq1$)에서 근을 가지거나
3) $t=k$(단, $k\neq1$)에서 중근을 가지고 $t=1$에서 근을 가져야한다.

$Case_1$)
방정식 $h_1(t)=0$은 $t=k\,(k\neq1)$에서 하나의 근을 가진다.
$Case_{1-1}$) 근이 $k<1$일 때



미분가능하지 않는 점이 4개이므로 (가)조건에 성립하지 않는다.
(k에서 삼중근일 경우에는 미분불가능점이 3개이다)

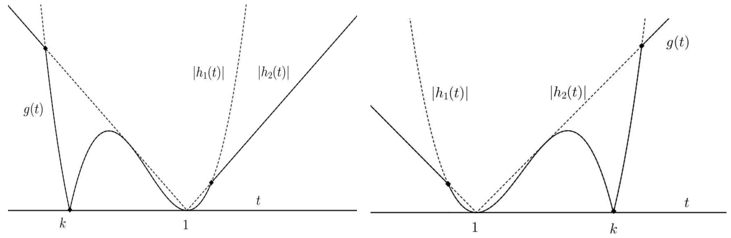
$Case_{1-2}$) 근이 $k>1$일 때



미분가능하지 않는 점이 4개이므로 (가)조건에 성립하지 않는다.
(k에서 삼중근일 경우에는 미분불가능점이 3개이다.)

$Case_2$)

방정식 $h_1(t)=0$은 $t=1$에서 중근을 가지고 $t=k$(단, $k\neq 1$)에서 근을 가진다.

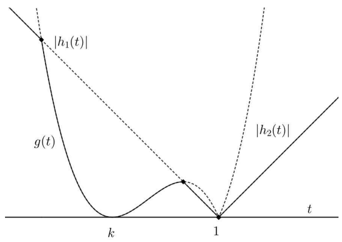


두 그래프 모두 미분가능하지 않는 점이 3개이므로 (가)조건에 성립하지 않는다. 오른쪽 그래프에서는 (나)조건도 만족시키지 못한다.

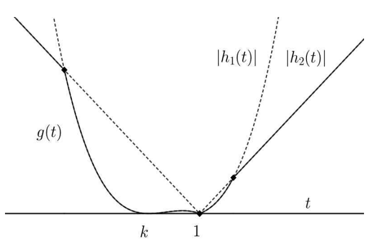
결국 (나)조건을 만족시키려면, $k<1$이어야하므로,

$Case_3$) **방정식 $h_1(t)$는 $t=k$(단, $k<1$)에서 중근을 가지고 $t=1$에서 근을 가진다.**

$Case_{3-1}$) **방정식 $h_1(t)=0$는 $t=k$(단, $k<1$)에서 중근을 가지고 $t=1$에서 근을 가지면서 $h_1{}'(1)\neq 1$일 때**



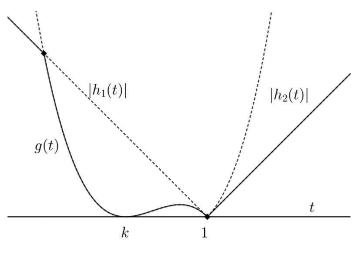
$1<h'(1)$



$h'(1)<1$

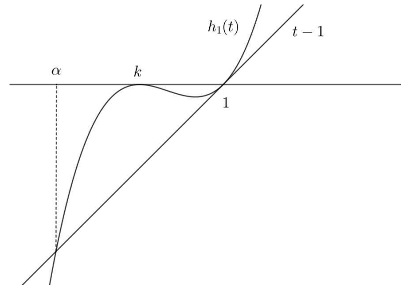
미분가능하지 않는 점이 3개이므로 (가)조건에 성립하지 않는다.

$Case_{3-2}$) **방정식 $h_1(t)=0$는 $t=k$(단, $k<1$)에서 중근을 가지고 $t=1$에서 근을 가지면서 $h_1{}'(1)=1$일 때**



미분가능하지 않는 점이 2개이므로 모든 조건에 성립한다.

따라서, 함수 $h_1(t)$는 $y=t-1$과 접하면서 $x=k\,(k<1)$에서 중근을 갖는다.



$h_1(t)=(t-k)^2(t-1)$ 또는 $h_1(t)-(t-1)=(t-\alpha)(t-1)^2$이므로,

$h_1(t)=t^3-(2k+1)t^2+(k^2+2k)t-k^2$

$h_1(t)=t^3-(\alpha+2)t^2+(2\alpha+2)t-(\alpha+1)$

$\therefore k=0,\ \alpha=-1$

따라서, $h_1(t)=f(t)-tf'(t)=t^3-t^2$

$f(t)=-\dfrac{1}{2}t^3+at^2+bt+c$라고 하면

$h_1(t)=-\dfrac{1}{2}t^3+at^2+bt+c-(-\dfrac{3}{2}t^3+2at^2+bt)$

$=t^3-at^2+c=t^3-t^2$

따라서, $a=1,\ c=0$이다.

고로 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+x^2+bx$ 이때, $f(1)=\dfrac{5}{2}$이므로

$b=2$

$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+x^2+2x$

$f(-2)\times g(13)=4\times|h_2(13)|=48$

답 : 48

23번

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{3}{4}n$, $\quad \mathrm{E}(\dfrac{1}{12}X+1)=\dfrac{1}{12}\mathrm{E}(X)+1=4$

$\mathrm{E}(X)=36 \quad n=48$

$\mathrm{V}(X)=48\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=9$

답: ②

24번

세 자연수의 합이 홀수인 경우는 다음과 같다.

$Case_1$) **3개의 홀수를 모두 뽑는 경우**

$1,3,5$중에서 3개를 뽑아야 하므로

$${}_3C_3=1$$

$Case_2$) **짝수 2개와 홀수 1개를 뽑는 경우**

짝수인 $2,4$중 두 개, 홀수인 $1,3,5$중 1개를 뽑는 경우의 수이므로

$${}_2C_2\times{}_3C_1=3$$

5개의 공 중 3개를 뽑아야 하므로 전체 확률은

$$\frac{{}_3C_3+({}_2C_2\times{}_3C_1)}{{}_5C_3}=\frac{2}{5}$$

답: ③

25번

주어진 식의 좌변의 일반항은 $a_r = {}_5C_r(a)^{5-r}i^r \quad (0 \le r \le 5)$이다.

이 때, $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$이므로

$r = 0, 2, 4$일 때는 상수인 항이

$r = 1, 3, 5$일 때는 i가 포함된 형태의 항이 나타난다.

$r = 0, 2, 4$일 때

${}_5C_0a^5i^0 + {}_5C_2a^3i^2 + {}_5C_4ai^4 = a^5 - 10a^3 + 5a$

$r = 1, 3, 5$일 때

${}_5C_1a^4i^1 + {}_5C_3a^2i^3 + {}_5C_5a^0i^5 = (5a^4 - 10a^2 + 1)i$

따라서 $5a^4 - 10a^2 + 1 = 1$이므로 $5a^2(a^2 - 2) = 0$

a는 양수이므로 $\sqrt{2}$

$b = a^5 - 10a^3 + 5a$이므로 $b = -11\sqrt{2}$

$(a+b)^2 = (-10\sqrt{2})^2 = 200$

답: ④

26번

확률변수의 중간값을 보면 Y는 X의 3배이다. 또한 X, Y 모두 확률변수의 중간값에 대해 일정 간격만큼 대칭적으로 떨어져 있다. 이 때, Y의 평균이 X의 평균보다 3배 크다. 즉, 중간값의 비율= 평균의 비율 이다. 이것은 중간값에 대해 좌우 양옆으로 n번째 떨어져 있는 확률변수의 확률이 X, Y가 같다는 뜻이다. 따라서, $b = d$이다.

이 때, $Y = 2X + 3$이므로, $3\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(2X+3)$

$\mathrm{E}(X) = 3, \qquad \mathrm{V}(X) = 1$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y^2) &= \mathrm{V}(Y) + \{\mathrm{E}(Y)\}^2 \\ &= \mathrm{V}(2X+3) + \{\mathrm{E}(2X+3)\}^2 \\ &= 4\mathrm{V}(X) + \{2\mathrm{E}(X) + 3\}^2 \\ &= 85\end{aligned}$$

답: ④

27번

$Case_1$) $f(4) + f(5) = 11$인 경우

$f(4)$와 $f(5)$가 각각 4 또는 5에 대응된다. $\Rightarrow 2!$

$f(1), f(2), f(3), f(6)$이 각각 1,2,3,4에 대응된다.

이 때, $f(1) + f(2) + f(3)$의 최댓값이 9이므로 아무런 제약 없이 대응될 수 있다. $f(1), f(2), f(3), f(6)$을 대응시키는 경우의 수 $\Rightarrow 4!$

$\Rightarrow 2! \times 4! = 48$

$Case_2$) $f(4) + f(5) = 10$인 경우

$f(4)$와 $f(5)$가 각각 4 또는 6에 대응된다. $\Rightarrow 2!$

$f(1), f(2), f(3), f(6)$이 각각 1,2,3,5에 대응되는데

$f(1) + f(2) + f(3)$의 최댓값이 10이므로 $Case_1$과 같이 대응될 수 있다.

$\Rightarrow 2! \times 4! = 48$

$Case_3$) $f(4) + f(5) = 9$인 경우

$Case_{3-1}$) $f(4)$와 $f(5)$가 3,6인 경우

$f(1) + f(2) + f(3)$에서 4와 5가 함께 있는 경우만 불가능하다. 그러므로, 4개를 대응시키는 전체 경우 − 4와 5가 함께 있는 경우

$\Rightarrow$전체 경우 $-$($f(6)$이 1또는 2인 경우$\times$ $f(6)$에 대응된 수를제외한 나머지 수를 대응시키는 경우)

$\Rightarrow 4! - (2 \times 3!) = 12$

$Case_{3-1}$의 경우 $\Rightarrow 2! \times 12 = 24$

$Case_{3-2}$) $f(4)$와 $f(5)$가 4,5인 경우

사고과정이 $Case_{3-1}$과 완전히 똑같다.

$\Rightarrow 24$

$Case_4$) $f(4) + f(5) = 8$인 경우

$Case_{4-1}$) $f(4)$와 $f(5)$가 2,6인 경우

$f(1) + f(2) + f(3)$의 최솟값은 8이므로 $f(1), f(2), f(3)$이 대응되는 순서쌍은 $(1,3,4)$만 존재한다.

$\Rightarrow 2! \times 3! = 12$

$Case_{4-2}$) $f(4)$와 $f(5)$가 3,5인 경우

$f(1) + f(2) + f(3)$의 최솟값은 7이므로 $f(1), f(2), f(3)$이 대응되는 순서쌍은 $(1,2,4)$만 존재한다.

$\Rightarrow 2! \times 3! = 12$

$Case_5$) $f(4) + f(5) \le 7$인 경우

$f(4)$와 $f(5)$의 최댓값은 7이다.

$f(4)$와 $f(5)$가 1,6인 경우 $f(1) + f(2) + f(3)$의

최솟값은 $2 + 3 + 4 = 9$

$f(4)$와 $f(5)$가 2,5인 경우 $f(1) + f(2) + f(3)$의

최솟값은 $1 + 3 + 4 = 8$

$f(4)$와 $f(5)$가 3,4인 경우 $f(1) + f(2) + f(3)$의

최솟값은 $1 + 2 + 5 = 8$

따라서 $Case_5$의 경우의 수는 0이다.

위의 풀이를 풀면서 f는 일대일대응이므로 조건에 제한되지 않은 $f(6)$의 값은 자동으로 대응된다는 것을 잊으면 안된다.

총 경우의수는 $48 + 48 + 48 + 24 = 168$가지이다.

답: ②

28번

편의상 각각 확률변수의 정규분포를 $X(m, 5^2)$, $Y(m+12, \sigma^2)$라 하겠다.

집단 A에서 n명을, 집단 B에서 $4n$명을 임의추출했으므로

$\overline{X}(m, (\frac{5}{\sqrt{n}})^2)$, $\overline{Y}(m+12, (\frac{\sigma}{2\sqrt{n}})^2)$이다.

조건 (가)에 의해서

$\mathrm{P}(m \le \overline{X} \le m+12)$

$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\frac{5}{\sqrt{n}}} \le Z \le \frac{(m+12)-m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right)$

$\Rightarrow \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{12\sqrt{n}}{5}\right)$

$\mathrm{P}(m+12 \le \overline{Y} \le m+24)$

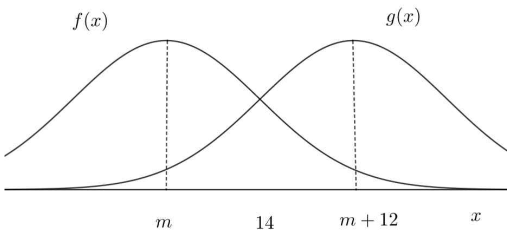
$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\frac{(m+12)-(m+12)}{\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}} \le Z \le \frac{(m+24)-(m+12)}{\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}}\right)$

$\Rightarrow \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{24\sqrt{n}}{\sigma}\right)$

이 두 개의 값이 같다고 했으므로 $\frac{12\sqrt{n}}{5} = \frac{24\sqrt{n}}{\sigma}$

$\Rightarrow \sigma = 10$

$\overline{X}$와 $\overline{Y}$의 표준변차는 같고 평균은 12만큼 차이가 난다.
표준편차가 같고 평균이 다른 두 확률밀도함수는 대칭선이 존재할 수밖에 없다. 조건 (나)가 의미하는 바는 두 함수는 $x=14$에 대해 대칭이라는 뜻이다.



따라서, $\frac{2m+12}{2} = 14$

$\Rightarrow m = 8$이다.

$\mathrm{P}(15 \le \overline{Y} \le 30)$

$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\frac{15-20}{\frac{5}{\sqrt{n}}} \le Z \le \frac{30-20}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right)$

$\Rightarrow \mathrm{P}(-\sqrt{n} \le Z \le 2\sqrt{n})$

표준정규분포의 확률밀도함수는 $x=0$에 대해 대칭이므로 n이 최소일 때 위의 값이 최소이다.

$\mathrm{P}(-1 \le Z \le 2) = 0.8185$

답: ⑤

29번

$Case_1$) 두 개의 4가 붙어 있는 경우

두 개의 4가 서로 붙어 있으면 오른쪽에 있는 4의 바로 왼쪽에 4가 있으므로 4와 같은 수가 있어 조건에 위배된다.

$Case_2$) 두 개의 4 사이에 1개의 숫자가 있는 경우

두 개의 4사이에 4보다 작은 숫자가 오는 경우 왼쪽에 있는 4의 오른쪽에 4보다 작은 숫자가 오게 되므로 조건에 위배된다. 두 개의 4사이에 4보다 큰 숫자가 오는 경우 오른쪽에 있는 4의 왼쪽에 4보다 큰 숫자가 오게 되므로 조건에 위배 된다.

$Case_3$) 두 개의 4사이에 2개의 숫자가 오는 경우

4보다 작은 수를 a, 4보다 큰 수를 b라고 하자. 그럼 a가 3개 존재하고 b가 2개 존재하게 된다. 가능한 경우의 수는 다음과 같다.

1) $a\ 4_a\ b\ a\ 4_b\ b\ a$

2) $a\ a\ 4_a\ b\ a\ 4_b\ b$

(4의 아래 첨자는 4가 서로 다른 것임을 의미한다.)

1)의 경우는 4의 위치를 바꾸는 경우 × a를 나열하는 경우 × b를 나열하는 경우 이므로,

$\Rightarrow 2! \times 3! \times 2! = 24$

2)의 경우도 마찬가지이므로

$\Rightarrow 24$

$Case_4$) 두 개의 4사이에 3개의 숫자가 오는 경우

가능한 경우의 수는 다음과 같다.

$a\ 4_a\ b\ a\ a\ 4_b\ b$

마찬가지로 $\Rightarrow 2! \times 3! \times 2! = 24$

$Case_5$) 두 개의 4사이에 4개의 숫자가 오는 경우

주어진 조건에 의해 4의 양옆에는 각각 4개의 숫자가 필요하므로 가운데에 4개의 숫자 중 2개가 채워져 있는 것이다. 이제 남아있는 숫자는 1개인데 2개의 빈자리가 있으므로 불가능한 경우이다.

이 때, $Case_3$에서 $9 < a+b$를 만족시켜야 한다. a중 가장 큰 수는 3, b에서 가장 큰 수는 6이므로 $a+b$의 최댓값은 9이다. $Case_3$에서는 $9 < a+b$를 만족시키는 경우는 존재하지 않는다.

$Case_4$에서는 $9 < a+a+b$를 만족시켜야 한다. 이를 만족시키는 순서쌍 (a, a, b)는 $(1,3,6)\,(2,3,6)\,(2,3,5)$ 3개다. 이 때, a끼리는 서로 위치를 바꿀 수 있고, 서로 다른 4끼리 위치가 바뀔 수 있으므로

$\Rightarrow 3 \times 2! \times 2! = 12$이다.

따라서, $\frac{q}{p} = \frac{\frac{12}{7!}}{\frac{72}{7!}} = \frac{1}{6}$이므로 $p+q=7$이다.

답: 7

30번

각각의 학생을 A,B,C라 하자.
초코를 먼저 배분한 후 라떼를 배분하기로 하자.

초코가 $(7,1,1)$일 때, 7을 누가 받는지 결정해야 하므로 3
조건에 맞게 라떼를 배분하는 순서쌍은 $(5,0,0)$이고 7을 받는 학생이 무조건 5를 받아야 하므로 1.

$\Rightarrow 3$

초코가 $(6,2,1)$인 경우 학생들에게 배분하면 3!
라떼는 $(5,0,0)\,(4,1,0)$이 가능한데 5의 위치는 고정, 4와 1

의 위치도 고정이므로 1.
$\Rightarrow 3! \times 2 = 12$

초코가 (5,3,1)인 경우 학생들에게 배분하면 3!
라떼는 (4,1,0)(3,2,0)이 가능한데 4와 1, 3과 2의 위치는 고정되어 있으므로 1.
$\Rightarrow 3! \times 2 = 12$

초코가 (5,2,2)인 경우 학생들에게 배분하면 3
라떼는 (4,1,0)이 가능한데 4의 위치는 고정, 1의 위치는 0과 바뀔 수 있으므로 2. (3,1,1)은 3의 위치는 고정되어 있으므로 1.
$\Rightarrow 3 \times (2+1) = 9$

초코가 (4,4,1)인 경우 학생들에게 배분하면 3
라떼는 (3,2,0)이 가능한데 3과 2의 위치를 바꿀 수 있으므로 2.
$\Rightarrow 3 \times 2 = 6$

초코가 (4,3,2)인 경우 학생들에게 배분하면 3!
라떼는 (3,2,0)이 가능하고 3,2의 위치는 고정. (3,1,1)이 가능하고 3의 위치는 고정. (2,2,1)이 가능하고 두 개의 2의 위치는 고정이므로 총 3.
$\Rightarrow 3! \times 3 = 18$

초코가 (3,3,3)인 경우 학생들에게 배분하면 1
라떼는 오직 (2,2,1)만 가능한데 이동에 제약이 없으므로 3.
$\Rightarrow 3$

따라서, 가능한 경우의 수는 $3+12+12+9+6+18+3=63$
답: 63

예상 등급컷

1컷: 81

2컷: 75

3컷: 65

예상 오답률 순위

1위: 30번

2위: 22번

3위: 29번

4위: 21번

5위: 15번

6위: 27번

7위: 14번