2021 9월 가형

10. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=12$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$$

을 만족시킨다. $a_k>a_1$인 자연수 k의 최솟값은? [3점]

$$a_{n+1}=-a_n+(-1)^{n+1}\times n$$

$$a_2=-12+1 \qquad a_3=12-1-2$$

$$a_4=-12+1+2+3 \qquad a_5=12-1-2-3-4$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_{2n}=-12+(1+2+\cdots+(2n-1)) \qquad a_{2n+1}=12-(1+2+\cdots+(2n-2))$$

$$=-12+n(2n-1) \qquad \le 12$$

$$a_6=3,\ a_8=16 \qquad \boxed{8}$$

#Comment

① 대입, 나열, 관찰이 기본

② 주기가 생기는 경우 관찰

③ 사칙연산을 표시하는게 관찰에 유리한 경우 있음

2022 예시

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100}a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

(가) $a_5=5$

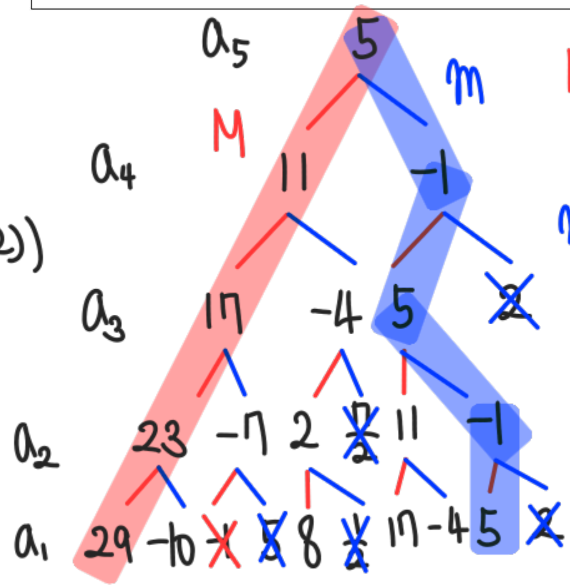
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-6 & (a_n\ge 0) \\ -2a_n+3 & (a_n<0)\end{cases}$$

이다.

$$a_n=a_{n+1}+6$$

$$a_n=\frac{3-a_{n+1}}{2}$$



$$M=5+11+17+23+29+(a_6+\cdots+a_{100})$$

$$m=5-1+5-1+5+(a_6+\cdots+a_{100})$$

$$M-m=72$$

#Comment

① 경우 나누어질 때 수형도(가지치기)가 강력한 도구

② 뒤에서부터 역추적

2021 9월 나형

21. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} 2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

a_1 부터 조사하면 갈길이 멀다. a_3 부터 시도

$\boxed{-\frac{1}{4}}$

a_2

a_3: 2

a_4: $2a_2+2$ $(a_2 \le 2)$, a_2+2 $(a_2>2)$

a_5: $2a_2+6$ $(a_2 \ge 0)$, $2a_2+4$ $(a_2<0)$, a_2+6 $(a_2 \ge 0)$, $\cancel{a_2+4}$ $\cancel{(a_2<0)}$ $(a_2>2)$

a_6: $6a_2+10$, $6a_2+8$, $3a_2+10$ $=19$

$\Rightarrow a_2 = \frac{3}{2}$, $\cancel{\frac{11}{6}}$ $(a_2<0)$, 3

$a_2=\frac{3}{2}$, $a_3=2 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4}$ (o) $\frac{1}{2}$ (x)

$a_2=3$, $a_3=2 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}$ (o) -1 (x)

$a_1 \le a_2$ $a_1 > a_2$

#Comment

① 경우 나누어질 때 수형도(가지치기)가 강력한 도구

② 추적 시작지점을 어디로 잡는 지가 센스

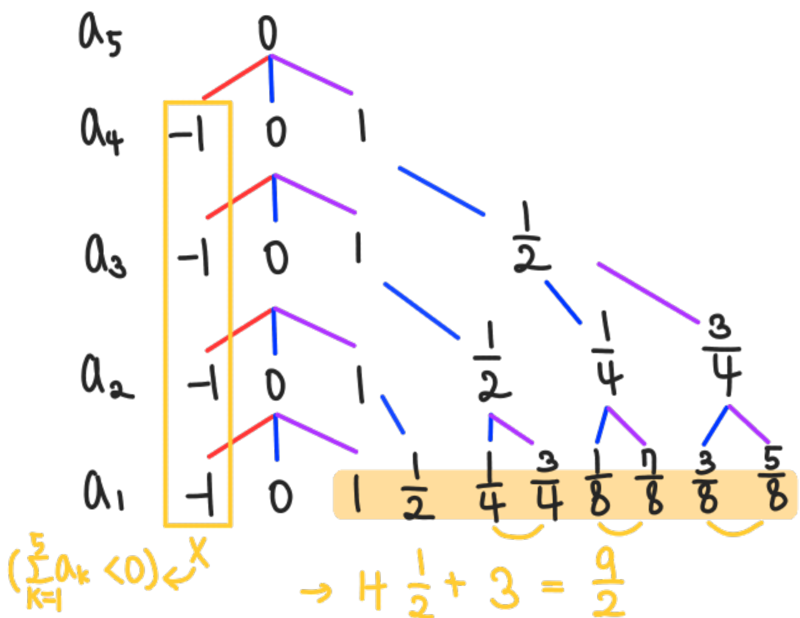
2022 9월

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n-2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \rightarrow -1 < a_{n+1} \le 0 \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \rightarrow -1 \le a_{n+1} \le 1 \\ -2a_n+2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \rightarrow 0 \le a_{n+1} < 1 \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} \boxed{\dfrac{a_{n+1}+2}{-2}} \\ \boxed{\dfrac{a_{n+1}}{2}} \\ \boxed{\dfrac{a_{n+1}-2}{-2}} \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5+a_6=0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]



a_n, a_{n+1} 부호가 같음을 눈치 챌 수 있으면 Good 👍

① $-1 \le a_5 < -\frac{1}{2} \rightarrow a_5+a_6 = -a_5-2=0,\ a_5=-2$ (X)

② $\frac{1}{2} < a_5 \le 1 \rightarrow a_5+a_6 = -a_5+2=0,\ a_5=2$ (X)

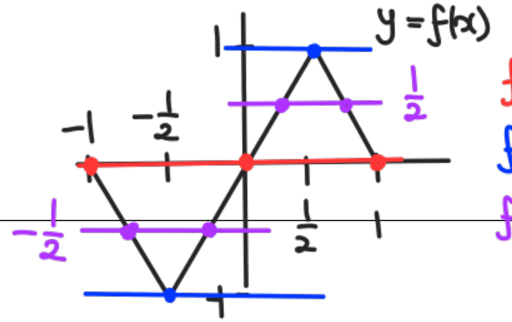
③ $-\frac{1}{2} \le a_5 \le \frac{1}{2} \rightarrow a_5+a_6 = 3a_5=0,\ a_5=0$

따라서 $a_5=a_6=0$.

Graph 이용 풀이

$$f(x)=\begin{cases} -2x-2 & \left(-1 \le x < -\frac{1}{2}\right) \\ 2x & \left(-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(\frac{1}{2} < x \le 1\right) \end{cases},\quad a_{n+1}=f(a_n)$$

(a_5, a_6)는 $y=-x$ & $y=f(x)$ 교점 $\rightarrow a_5=a_6=0$



$f(a_4)=a_5=0,\ \rightarrow a_4=0, \pm 1$

$f(a_3)=a_4=0, \pm 1,\ \rightarrow a_3=0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}$

$f(a_2)=a_3=0, \pm 1, \pm\frac{1}{2} \rightarrow \cdots$

#Comment

① 경우 나누어질 때 수형도(가지치기)가 강력한 도구

② 뒤에서부터 역추적

③ 수열은 n항 넣어서 $n+1$항 나오는 함수, 그래프 이용 가능

2021 사관 가형

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

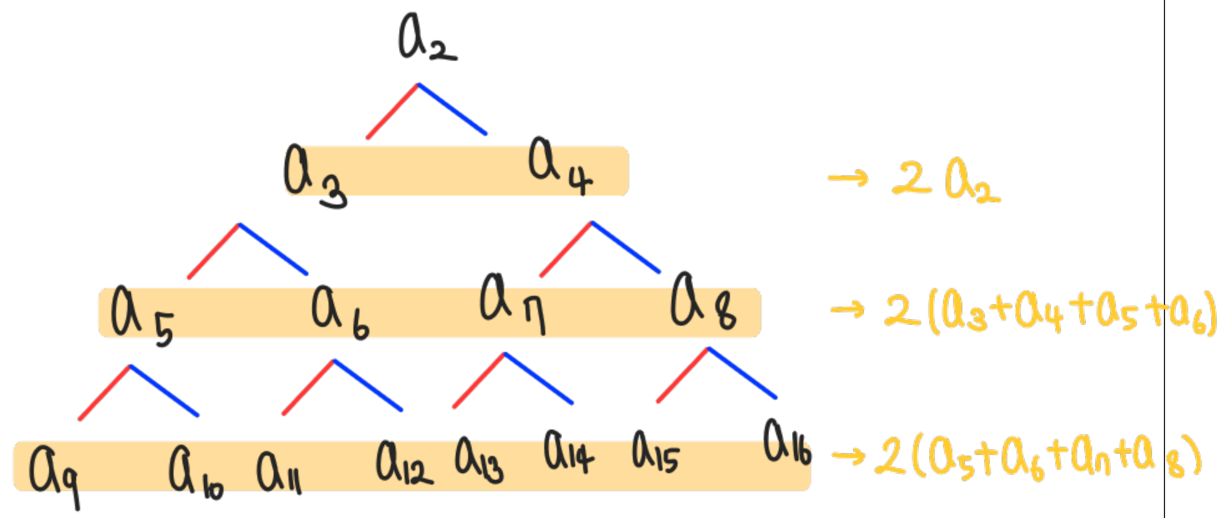
> (가) $a_{2n+1} = -a_n + 3a_{n+1}$
> (나) $a_{2n+2} = a_n - a_{n+1}$

$a_1 = 1,\ a_2 = 2$일 때 $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은? [4점]

합을 묻고 있다

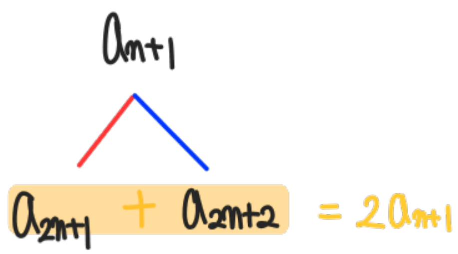
→ 짝꿍(a_{2n+1}, a_{2n+2})의 합

→ 한 줄 씩 합을 떠올려 본다



(가)+(나)

$$a_{2n+1} + a_{2n+2} = 2a_{n+1}$$



$$\sum_{k=1}^{16} a_k = a_1 + a_2 + (a_3+a_4) + (a_5+a_6+a_7+a_8) + (a_9+\cdots+a_{16})$$

$$= 1 + 2 + 2a_2 + 2(a_3+a_4) + 2(a_5+a_6+a_7+a_8)$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + 2\times 2a_2 + 2\times 2(a_3+a_4)$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2\times 2\times 2\times a_2$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$$

$$= \frac{2^5-1}{2-1} = 31$$

$\boxed{31}$

2020 수능 나형

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n-1$	$a_n=a_{2n}+1$
(나) $a_{2n+1}=2a_n+1$	$a_n=\dfrac{a_{2n+1}-1}{2}$

$a_{20}=1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은? [4점]

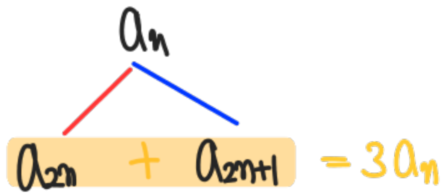
합을 묻고 있다

→ 짝꿍(a_{2n+1}, a_{2n+2})의 합

→ 한 줄 씩 합을 떠올려 본다.

(가)+(나)

$a_{2n}+a_{2n+1}=3a_n$



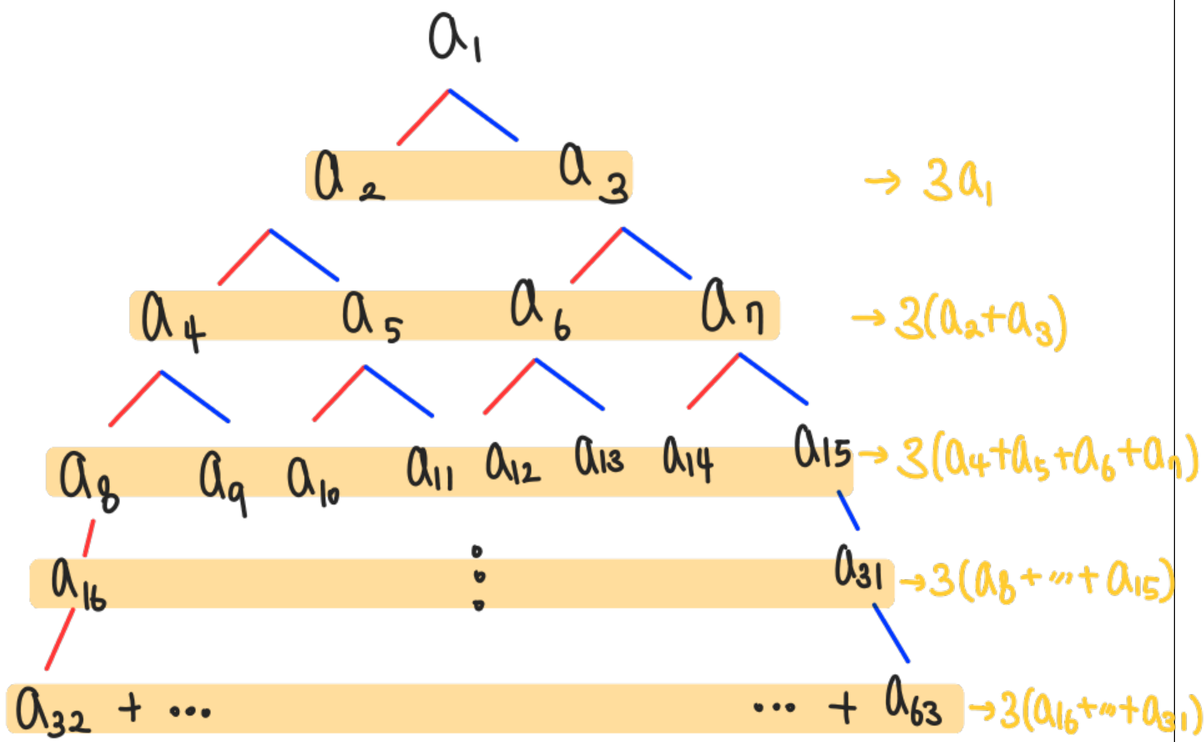
$a_{20}=1$

$a_{10}=a_{20}+1=2$

$a_5=a_{10}+1=3$

$a_2=\dfrac{a_5-1}{2}=1$

$a_1=a_2+1=2$



$$\sum_{k=1}^{63} a_k = a_1+(a_2+a_3)+(a_4+\cdots+a_7)+(a_8+\cdots+a_{15})+(a_{16}+\cdots+a_{31})+(a_{32}+\cdots+a_{63})$$

$$= a_1+3a_1+3(a_2+a_3)+3(a_4+\cdots+a_7)+3(a_8+\cdots+a_{15})+3(a_{16}+\cdots+a_{31})$$

$$= a_1+3a_1+3^2a_1+3^2(a_2+a_3)+3^2(a_4+\cdots+a_7)+3^2(a_8+\cdots+a_{15})$$

$$= \cdots$$

$$= (1+3+3^2+\cdots+3^5)a_1 = \frac{3^6-1}{3-1}\times 2 = 728$$

$\boxed{728}$

2021 수능 가형

21. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

차를 주었다.

짝꿍(a_{2n}, a_{2n+1})의 차

또는 한 줄의 양 끝의 차를 떠올려본다.

$a_{2n} - a_{2n+1} = 3$

풀이① 연립

$a_2 = a_2 a_1 + 1$, $a_1 = \dfrac{a_2 - 1}{a_2}$

$a_4 = a_2^2 + 1$

$a_8 = a_2^3 + a_2 + 1 = 4^3 + 4 + 1 = 69$

$a_3 = a_2 a_1 - 2$
$= a_2 - 3$

$a_7 = a_2^2 - 3a_2 - 2$

$a_{15} = a_2^3 - 3a_2^2 - 2a_2 - 2$

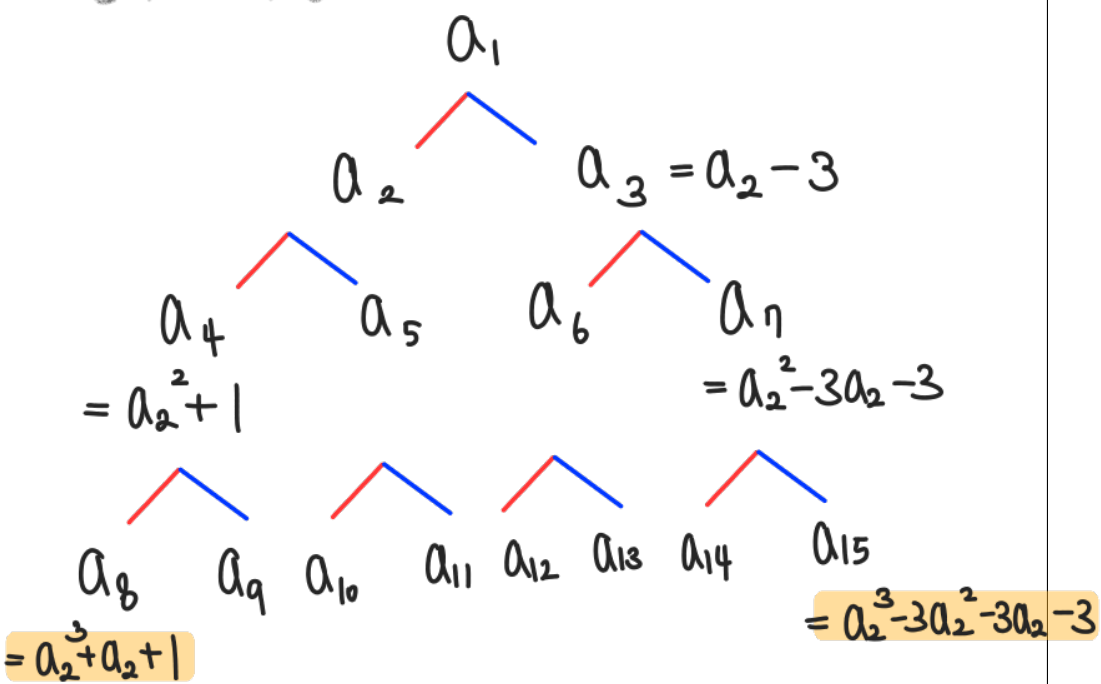
$a_8 - a_{15} = 3a_2^2 + 3a_2 + 3 = 63$

→ $a_2 = 4$ 또는 -5, $a_1 = \dfrac{3}{4}$ 또는 $\dfrac{6}{5}$

$\therefore \dfrac{a_8}{a_1} = 69 \times \dfrac{4}{3} = 92$

$\boxed{92}$

풀이② 수형도



2022 사관

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최솟값을 m이라 하자.

> (가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다. 예민하게 반응할 조건 → "약수"
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $a_{2n}=a_3\times a_n+1$, $a_{2n+1}=2a_n-a_2$
> 이다.

$a_1=m$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은? [4점]

$n=1$ 대입

$a_2=a_3a_1+1$, $a_3=\underline{2a_1-a_2}$

$a_2=2a_1^2-a_2a_1+1$

$a_2=\dfrac{2a_1^2+1}{a_1+1}=\dfrac{(a_1+1)(2a_1-2)+3}{a_1+1}$

$=2a_1-2+\boxed{\dfrac{3}{a_1+1}}$: 정수

$a_1=-4, -2, 0, 2$

$m=-4 \rightarrow a_2=\dfrac{2\times(-4)^2+1}{-4+1}=-11$

$a_9=2a_4-a_2 \quad = -53$

$a_4=a_3a_2+1 \quad = -32$

$a_3=2a_1-a_2 \quad = 3$

$\boxed{-53}$