2021학년도 수능 가형 홀수형 (by.CSM17)
정답 및 해설

수능 가형 홀수형

1. 정답 : ③

$\sqrt[3]{9}\times 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=3$

2. 정답 : ②

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+2n+1}-2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}{4n^2+2n+1-4n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}{2n+1}$

$=\frac{2+2}{2}=2$

3. 정답 : ①

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\tan\theta$의 값은 음수이다.

$\tan\theta=\frac{\sqrt{21}}{-2\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 정답 : ④

$P(B|A)=\frac{1}{4}$이므로 $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{4}$,

$P(A)=4P(A\cap B)$이다.

$P(A|B)=\frac{1}{3}$이므로 $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{3}$,

$P(B)=3P(A\cap B)$이다.

$P(A)+P(B)=7P(A\cap B)=\frac{7}{10}$,

$P(A\cap B)=\frac{1}{10}$

5. 정답 : ⑤

주어진 식을 변형하면

$3^{-2x}<3^{21-4x}$

$3>1$이므로 지수를 비교하면

$-2x<21-4x$

정리하면 $2x<21$

$x<\frac{21}{2}$

그러므로 자연수의 개수는 10개이다.

6. 정답 : ②

표본평균 $\overline{X}$는 $N\left(20,\ \frac{5^2}{16}\right)$ 이므로

$E(\overline{X})=20$ 이고, $\sigma(\overline{X})=\frac{5}{4}$ 이다.

따라서, $E(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=\frac{85}{4}$

7. 정답 : ①

함수 $f(x)$를 미분하면 $f'(x)=(x^2-9)e^x$

모든 실수 x에 대하여 $e^x>0$이므로

$x=-3$에서 극솟값, $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

$a=f(3)=-4e^3$

$b=f(-3)=8e^{-3}$이므로

$ab=-32$

8. 정답 : ②

$\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2}e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2}=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{8}$

9. 정답 : ④

전체 경우의 수는 카드 9장을 나열하는 경우의 수와 같으므로 $9!$

A 카드 양옆에 숫자 카드를 배치하고 숫자 카드 2장과 A 카드를 한 묶음으로 생각하여 배열한다.

A 카드 양옆에 숫자 카드를 배치하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

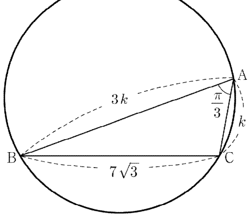
숫자 카드 2장과 A 카드를 한 묶음으로 생각하여 배열하는 경우의 수는 $7!$이므로 구하는 확률은

$\frac{12\times 7!}{9!}=\frac{1}{6}$

10. 정답 : ②

$\angle A=\frac{\pi}{3}$이고, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름이 7이므로 사인 법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times 7$, $\overline{BC}=7\sqrt{3}$



$\overline{AC}=k$, $\overline{AB}=3k$이므로 삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의하여

$(7\sqrt{3})^2=k^2+9k^2-2\cdot k\cdot 3k\cdot\cos\frac{\pi}{3}=7k^2$

$\therefore\ k^2=21$

11. 정답 : ①

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}}$에서

$\frac{k}{n}=x$라 하면 $\frac{1}{n}=dx$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}}=\int_0^1\sqrt{\frac{3}{3+x}}dx$

$\int_0^1\sqrt{\frac{3}{3+x}}dx=\sqrt{3}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{3+x}}dx$

$=\sqrt{3}\left[2\sqrt{3+x}\right]_0^1=4\sqrt{3}-6$

12. 정답 : ②

표본평균 $\overline{X}$는 $N\left(20,\ \frac{5^2}{16}\right)$ 이므로

$E(\overline{X})=20$ 이고, $\sigma(\overline{X})=\frac{5}{4}$ 이다.

따라서, $E(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=\frac{85}{4}$

13. 정답 : ③

점 A의 좌표는 $A(a,\ 1)$, 점 B의 좌표는 $B(4a,\ 1)$ 또한 점 C의 좌표는 $C\left(\frac{1}{a},\ -1\right)$, 점 D의 좌표는 $D\left(\frac{1}{4a},\ -1\right)$이다.

ㄱ. 선분 AB를 $1:4$로 외분한 점은 $(0,\ 1)$이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이려면 점 A와 점 D의 x값이 같고 점 B와 점 C의 x값이 같아야 한다. 그러므로 $a=\frac{1}{4a}$, $a=\frac{1}{2}$

ㄷ. $\overline{AB}=4a-a=3a$, $\overline{CD}=\frac{1}{a}-\frac{1}{4a}=\frac{3}{4a}$

이므로 $3a<\frac{3}{4a}$, $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$이고

$\frac{1}{4}<a<1$이므로 $\overline{AB}<\overline{CD}$를 만족시키는

a의 범위는 $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14. 정답 : ③

삼각형 $C_1D_1E_1$의 넓이는 1이고, 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{C_1E_1}=\sqrt{5}$

삼각형 $E_1F_1C_1$는 직각이등변삼각형이므로 삼각비에 의하여 $\overline{E_1F_1}=\overline{F_1C_1}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

넓이를 구하면 $\frac{5}{4}$

$\therefore\ S_1=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

또한 주어진 조건에 의하여 $\overline{AE_1}=3$, $\overline{E_1D_1}=1$

사각형 $AB_2C_2D_2$에서 $\overline{AB_2}=\overline{D_2C_2}=l$이라 하면 $\overline{AD_2}=2l$

$\overline{D_2E_1}=4-\left(\overline{AD_2}+\overline{E_1D_1}\right)$

$=3-2l$

삼각형 $E_1F_1C_1$이 직각이등변삼각형이므로

$\angle F_1E_1C_1=\frac{\pi}{4}$이다.

두 삼각형 $C_2E_1D_2$, $C_1E_1D_1$에서

$\angle C_2E_1D_2=\theta_1$, $\angle C_1E_1D_1=\theta_2$라 하면

$\tan\theta_1=\frac{l}{3-2l}$, $\tan\theta_2=2$이고

$\theta_1+\theta_2=\frac{3}{4}\pi$이다.

즉, $\tan(\theta_1+\theta_2)=\tan\frac{3}{4}\pi$에서

$$\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{\frac{l}{3-2l}+2}{1-\frac{2l}{3-2l}}$$
$$=\frac{6-3l}{3-4l}$$

따라서 $\frac{6-3l}{3-4l}=\tan\frac{3}{4}\pi=-1$이므로

$l=\frac{9}{7}$

길이의 비가 $1:\frac{9}{14}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{81}{196}$

이다. 즉 공비가 $\frac{81}{196}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{81}{196}}$$
$$=\frac{441}{115}$$

15. 정답 : ②

주어진 함수 $f'(x)$의 식을 부정적분하면

$x>0$에서

$f(x)=2x+\frac{3}{x}+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

$f(1)=5$이므로 $C_1=0$

따라서 $x>0$에서 $f(x)=2x+\frac{3}{x}$

조건 (가)에 의해 함수 $g'(x)=f'(-x)$이므로

양변을 부정적분 하면 $x<0$인 x에 대하여

$g(x)=-f(-x)+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

이므로 $x<0$인 x에 대하여

$g(x)=2x+\frac{3}{x}+C_2$

조건 (나)에서 $g(-2)=9-f(2)=9-\frac{11}{2}=\frac{7}{2}$이

므로 $g(-2)=-4-\frac{3}{2}+C_2=\frac{7}{2}$

따라서 $C_2=9$이므로

$g(-3)=-6-1+9=2$이다.

16. 정답 : ⑤

수열 $\{a_n\}$이 공차가 d인 등차수열이므로

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$

$A_n=\frac{d}{2}\left(2^{a_{n+1}}-2^{a_n}\right)$에서

$$\frac{A_3}{A_1}=\frac{\frac{d}{2}\left(2^{a_4}-2^{a_3}\right)}{\frac{d}{2}\left(2^{a_2}-2^{a_1}\right)}$$
$$=\frac{2^{a_1+3d}-2^{a_1+2d}}{2^{a_1+d}-2^{a_1}}$$
$$=2^{2d}=16$$

이므로 $2d=4$, $d=2$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=2n-1$이고

모든 자연수 n에 대하여

$A_n=2^{2n+1}-2^{2n-1}$이다.

이상에서 p의 값은 2, $f(n)=2n-1$,

$g(n)=2^{2n+1}-2^{2n-1}$이므로

$p+\frac{g(4)}{f(2)}=2+\frac{2^9-2^7}{3}=2+128=130$

17. 정답 : ③

15번의 시행 중 주사위를 던져 나온 눈의 수가 2이하인 횟수를 a번 $(a=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 15)$이라 하면 주사위의 눈의 수가 3이상이 나온 횟수는 $15-a$번이므로 15번의 시행 후 점 P의 좌표는 $(3a,\ 15-a)$이다.

점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리가 확률변수 X이므로

$$X=\frac{|3\cdot 3a+4\cdot(15-a)|}{5}$$
$$=\frac{|5a+60|}{5}=|a+12|$$

이때 $a+12$는 항상 양수이므로

$X=a+12$이다.

또한, a는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로,

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(a+12)=\mathrm{E}(a)+12$에서

$\mathrm{E}(a)=15\times\frac{1}{3}=5$이므로

$\mathrm{E}(X)=5+12=17$

18. 정답 : ③

x의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 보자.

(i) $|x|<1$일 때

$f(x)=2x$

(ii) $|x|=1$일 때

$f(1)=\frac{a}{4}$, $f(-1)=-\frac{a}{4}$

(iii) $|x|>1$일 때

$f(x)=\frac{a-2}{3}x$

이상에서 $f(f(1))=f\left(\frac{a}{4}\right)$이므로

$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{5}{4}$를 만족시키기 위해서는

$\left|\frac{a}{4}\right|<1$일 때 $f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a}{2}=\frac{5}{4}$에서 $a=\frac{5}{2}$

$\left|\frac{a}{4}\right|=1$이면 조건을 만족시킬 수 없다.

$\left|\frac{a}{4}\right|>1$일 때 $f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a-2}{3}\times\frac{a}{4}=\frac{5}{4}$에서

$a^2-2a-15=(a-5)(a+3)=0$이므로

$a=5$ ($\because$ $a=-3$일 때 $\left|\frac{a}{4}\right|<1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.)

이상에서 모든 a의 값의 합은 $\frac{5}{2}+5=\frac{15}{2}$

19. 정답 : ⑤

[해설]

(i) 주머니에서 3이 적힌 공을 뽑을 경우

주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수를 $a,\ b,\ c$라 할 때 $a+b+c=10$을 만족하는 경우의 수는 세 수의 합이 10인 자연수를 택하는 경우에서 a, b, c 중 하나가 7 이상을 택하는 경우를 제외하면 된다.

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$로 놓으면

$a'+b'+c'=7$을 만족시키는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_7=36$

a', b', c' 중 하나가 6이 되는 경우의 수는

$3\times{}_2\mathrm{H}_1=6$, a', b', c' 중 하나가 7이 되는 경우의 수는 3, 3이 적힌 공을 뽑을 확률은 $\frac{2}{5}$이므로 한 번 시행하여 얻은 점수가 10점일 확률은

$\frac{2}{5}\times\frac{36-6-3}{216}=\frac{1}{20}$

(ii) 주머니에서 4가 적힌 공을 뽑을 경우

주사위를 4번 던져서 나오는 눈의 수를 $a,\ b,\ c,\ d$라 할 때 $a+b+c+d=10$을 만족하는 경우의 수는 네 수의 합이 10인 자연수를 택하는 경우에서 $a,\ b,\ c,\ d$ 중 하나가 7 이상을 택하는 경우를 제외하면 된다.

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$로 놓으면 $a'+b'+c'+d'=6$을 만족시키는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_6=84$

a', b', c', d' 중 하나가 6이 되는 경우의 수는 4, 4가 적힌 공을 뽑을 확률은 $\frac{3}{5}$이므로

한 번 시행하여 얻은 점수가 10점일 확률은

$\frac{3}{5}\times\frac{84-4}{6^4}=\frac{1}{27}$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{20}+\frac{1}{27}=\frac{47}{540}$

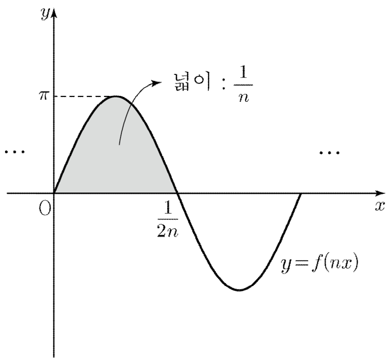
20. 정답 : ⑤

함수 $g(x)$는 1 또는 0이므로

함수 $h(x)$는

$h(x)=f(nx)$ 또는 $h(x)=0$이다.

함수 $f(nx)$는 그림과 같이 그려진다.



$\int_0^{\frac{1}{2n}} f(nx)dx = \int_0^{\frac{1}{2n}} \pi \sin 2\pi x dx = \frac{1}{n}$

이다.

$\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2$ 이므로

$f(nx) \geq 0$ 부분의 모든 넓이의 합이 1 이므로

함수 $h(x)$ 는

$f(nx) < 0$ 부분의 모든 값이 0 이 되어야한다.

따라서

$$h(x) = \begin{cases} f(nx) & (f(nx) \geq 0) \\ 0 & (f(nx) < 0) \end{cases}$$

이다.

$\int_{-1}^{1} xh(x)dx = -\frac{1}{32}$ 에서

함수 $xh(x)$ 는

$f(nx) \geq 0$ 에서 $xh(x) = x \cdot \pi \sin 2\pi x$ 이고

$f(nx) < 0$ 에서 $xh(x) = 0$ 이므로

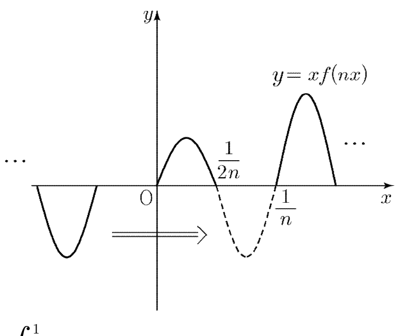
$x < 0$ 에서 함수 $xh(x)$ 를 y 축 대칭시키면

$x > 0$ 에서 $xh(x) = 0$ 인 부분에

함수 $xf(nx)$ 가 되므로

$\int_{-1}^{1} xh(x)dx = \int_0^1 xf(nx)dx = -\frac{1}{32}$

이다.



$\int_0^1 \pi x \sin(2\pi nx)dx$

$= \left[-\frac{x}{2n}\cos(2\pi nx)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2n}\cos(2\pi nx)dx$

$= -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$ $\left(\because \int_0^1 \cos(2\pi nx)dx = 0\right)$

따라서 $n = 16$

21. 정답 : ②

조건 (가), (나)에 의하여 $a_{2n} - a_{2n+1} = 3$ 이고,

$a_{2n+1} - a_{2n+2} = a_2(a_n - a_{2n+1}) - 3$ 이다. 따라서

$a_8 - a_{15} = \sum_{k=4}^{7}(a_{2n} - a_{2n+1}) + \sum_{k=4}^{6}\{a_2(a_n - a_{n+1}) - 3\}$

$= 4 \times 3 + a_2(a_4 - a_7) - 3 \times 3$

$= 3 + a_2\left\{\sum_{k=2}^{3}(a_{2k} - a_{2k+1}) + a_5 - a_6\right\}$

$= 3 + a_2\{6 + a_2(a_2 - a_3 - 3)\}$

$= 3 + 3(a_2)^2 + 3a_2$

주어진 조건에 의하여 $a_8 - a_{15} = 63$ 이므로

$63 = 3 + 3(a_2)^2 + 3a_2$, $a_3 = 4$ 또는 -5 이다.

$a_2 = -5$ 일 때, 조건 (가)에 $n = 1$ 을 대입하면

$a_2 = a_2 \times a_1 + 1$, $a_1 = \frac{6}{5}$ 이다. 이는 $0 < a_1 < 1$ 을

만족시키지 못하므로, $a_2 = 4$ 이고, $a_2 = a_2 \times a_1 + 1$ 에서

$a_1 = \frac{3}{4}$

조건 (가)에 $n = 2$ 를 대입하면

$a_4 = (a_2)^2 + 1 = 17$ 이고, 조건 (가)에 $n = 4$ 를

대입하면 $a_8 = a_2 \times a_4 + 1 = 69$

따라서 $\frac{a_8}{a_1} = 92$

22. 정답 : 15

$\left(x + \frac{3}{x^2}\right)^5$ 의 일반항을 ${}_5C_r x^r (3x^{-2})^{5-r}$

$(0 \leq r \leq 5)$ 라 하면 x^2 의 계수는 $r = 4$ 일 때이므로

${}_5C_4 \times 3^1 = 15$

23. 정답 : 8

$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 8}{(x-1)^2}$ 이므로 $f'(0) = 8$

24. 정답 : 60

삼각형 ABG 에서

$\overline{\mathrm{BG}} = \overline{\mathrm{AB}}\, tan\theta = 2\tan\theta$ …… ㉠

두 호 EF, FD 의 길이의 비가 $2:1$ 이므로

중심각의 비도 $2:1$ 이다. $\angle \mathrm{EAF} = 2\theta$

$f(\theta)$

$=$(삼각형 ABG 의 넓이)$-$(부채꼴 ADF 의 넓이)

$= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BG}} \times 2 - \frac{1}{2} \times 1^2 \times \theta$

$= 2\tan\theta - \frac{\theta}{2}$ ($\because$ ㉠)

$g(\theta) = \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2\theta = \theta$

이므로

$40 \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$

$= 40 \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{2\tan\theta - \frac{\theta}{2}}{\theta}$

$= 40 \times \left(2 - \frac{1}{2}\right)$

25. 정답 : 160

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 55$ 에서

$\frac{5\{2 \times 3 + 4 \times d\}}{2} = 55$, $d = 4$

$\{a_n\} = 3 + 4(n-1) = 4n - 1$

$\sum_{k=1}^{5} k(4k - 1 - 3) = \sum_{k=1}^{5}(4k^2 - 4k) = 160$

26. 정답 : 36

A 와 B 를 한 묶음으로 보고 A 와 B 를 배열하는 경우의 수는 $2!$ 가지이다.

B 옆에 C 를 제외한 한명의 학생을 앉히는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$ 이다.

남은 세 명의 학생을 앉히는 경우의 수가 $3!$ 이므로

$2! \times 3 \times 3! = 36$ 이다.

27. 정답 : 13

$\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\log_2 n$ 이므로

$\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$ 의 값이 자연수가 되기 위해서는

$\frac{3}{4}\log_2 n$ 의 값이 짝수이면서, 4 의 배수이면 안된다.

따라서 $\frac{3}{4}\log_2 n$ 의 값으로 가능한 값은 2, 6, 10, ⋯ , 38 이 있다.

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\log_2 n = 38 \Leftrightarrow \log_2 n = 50$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 n 의 개수는 50 이하의 짝수의 개수 중에서 4 의 배수의 개수를 제외한 13 이다.

28. 정답 : 72

함수 $g(x)$ 의 역함수를 $p(x)$ 라 하면 함수 $h(x)$ 는

$h(x) = f(p(x)) = \{p(x) - a\}\{p(x) - b\}^2$ 이고

조건 (가)에 의해 함수 $(x-1)|h(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로, $p(1) - a = 0$ 이다,

이때 $g(0) = 1$ 이므로 $p(1) = 0$ 에서 $a = 0$ 이다.

또한, 조건 (나)에서 $h'(3) = p'(3)f'(p(3)) = 2$ 이고

$g(1) = 3$ 이므로 $p(3) = 1$ 이다.

역함수의 미분법에 의해 $p'(3) = \frac{1}{g'(p(3))} = \frac{1}{g'(1)}$

이고 $g'(x) = 3x^2 + 1$ 이므로 $g'(1) = 4$

따라서 $p'(3) = \frac{1}{4}$ 이므로

$f'(1) = 8$ 이다.

$f(x)=x(x-b)^2$ ($\because\ a=0$)에서 도함수를 구하면
$f'(x)=(x-b)^2+2x(x-b)$에서
$f'(1)=(1-b)^2+2(1-b)=8$이므로
위 식을 정리하면
$b^2-4b-5=(b+1)(b-5)=0$이므로
$b=-1$ 또는 $b=5$
이때 주어진 조건에서 $a<b$이므로 $b=5$
따라서 $f(x)=x(x-5)^2$이므로
$f(8)=8\times 3^2=72$ 이다.

29. 정답 : 201

검은색 모자를 나누는 경우에 따라 분류하면 다음과 같다.

(ⅰ) 검은색 모자를 각 학생에게 4개, 2개, 0개, 0개로 나누어 주는 경우
B, C, D 중에서 검은색 모자를 2개 받는 학생을 고르는 경우의 수는 ${}_3C_1$
조건 (가)에 의하여 검은색 모자를 0개 받은 학생은 흰 색 모자를 적어도 1개 이상 받아야 하고, 조건 (다)에 의하여 A는 흰 모자를 3개까지 받을 수 있고, 검은색 모자를 2개 받은 학생은 흰 모자를 1개 또는 0개를 받을 수 있다.
따라서 남은 흰 모자를 나누어 주는 경우의 수는
① 검은색 모자를 2개 받은 학생이 흰 모자를 1개 받는 경우 : ${}_3H_3$
② 검은색 모자를 2개 받은 학생이 흰 모자를 1개 받는 경우 : ${}_3H_4-1$
$\therefore\ {}_3C_1\times({}_3H_4-1+{}_3H_3)=72$

(ⅱ) 검은색 모자를 각 학생에게 4개, 1개, 1개, 0개로 나누어 주는 경우
검은색 모자를 1개씩 받을 2명을 고르는 경우의 수는 ${}_3C_2$
2명 중 한 명은 (다) 조건에 의하여 흰 모자를 받을 수 없고, 남은 한 명은 반드시 적어도 하나를 받아야 한다. 또한 A는 흰 모자를 3개까지 받을 수 있다. 흰 모자를 받지 못할 학생을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1$
남은 4개의 흰 모자를 3명에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_4-1$
$\therefore\ {}_3C_2\times{}_2C_1\times({}_3H_4-1)=84$

(ⅲ) 검은색 모자를 각 학생에게 5개, 1개, 0개, 0개로 나누어 주는 경우
검은색 모자를 1개 받을 학생을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1$
(가) 조건에 의하여 검은색 모자를 받지 못한 학생은 흰 모자를 적어도 한 개 이상 받아야 하고, (다) 조건에 의하여 검은색 모자를 1개 받은 학생은 흰 모자를 받을 수 없다.
따라서 남은 4개의 흰 모자를 나누어주는 경우의 수는 ${}_3H_4$
$\therefore\ {}_3C_1\times{}_3H_4=45$

A가 검은색 모자를 6개 갖는 경우는 (다) 조건을 만족할 수 없다.
이상에서 구하는 경우의 수는 $72+84+45=201$

30. 정답 : 29

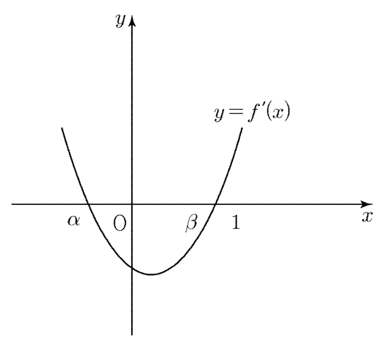
함수 $g(x)=f(\sin^2\pi x)$ 에 대하여
$g'(x)=2\pi\times\sin\pi x\times\cos\pi x\times f'(\sin^2\pi x)$이고,
$0<x<1$ 에서 $2\pi\times\sin\pi x>0$ 이므로 $g'(x)$ 의 부호는 $\cos\pi x\times f'(\sin^2\pi x)$ 의 부호와 같다. 함수 $h(x)$ 를

$$h(x)=\begin{cases} f'(\sin^2\pi x) & \left(0<x<\frac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(x=\frac{1}{2}\right) \\ -f'(\sin^2\pi x) & \left(\frac{1}{2}<x<1\right) \end{cases}$$

라 하면, 함수 $g'(x)$ 의 부호는 함수 $h(x)$ 의 부호변화와 같다. 또한 $0<x<\frac{1}{2}$ 과 $\frac{1}{2}<x<1$ 에서 각각 $0<\sin^2\pi x<1$ 이다.

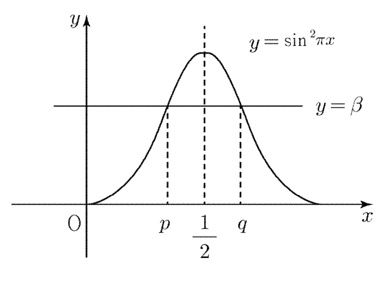
함수 $f(x)$ 가 삼차함수이므로, 함수 $f'(x)$는 이차함수이다. $0<x<1$ 에서 방정식 $f'(x)=0$ 이 실근을 갖지 않거나 중근을 갖는다면, 열린구간 $(0, 1)$ 에서 함수 $h(x)$ 는 부호변화를 가질 수 없고, 함수 $g(x)$ 는 극값을 가질 수 없다.

ⅰ) 방정식 $f'(x)=0$ 이 $0<x<1$ 에서 실근 $x=\alpha$ 를 갖고, $x\le 0$ 에서 실근을 $x=\beta$ 를 가질 때



$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ 에서
$f'(\sin^2\pi x)=3(\sin^2\pi x-\alpha)(\sin^2\pi x-\beta)$이고,
$\alpha<0$ 에서 $\sin^2\pi x-\alpha>0$ 이므로 함수 $f'(\sin^2\pi x)$ 의 부호변화는 $\sin^2\pi x-\beta$ 의 부호변화와 같다. 또한, $-f'(\sin^2\pi x)$ 의 부호변화는 $\beta-\sin^2\pi x$ 의 부호변화와 같다.

다음 그림과 같이 곡선 $y=\sin^2\pi x$ 와 직선 $y=\beta$ 가 만나는 점의 x 좌표를 p, q라 하자.



$0<x<p$ 에서 $\sin^2\pi x-\beta<0$ 이고,
$p<x<\frac{1}{2}$ 에서 $\sin^2\pi x-\beta>0$ 이다.

마찬가지로, $\frac{1}{2}<x<q$ 에서
$-\sin^2\pi x+\beta<0$ 이고, $q<x<1$ 에서
$-\sin^2\pi x+\beta>0$ 이다.

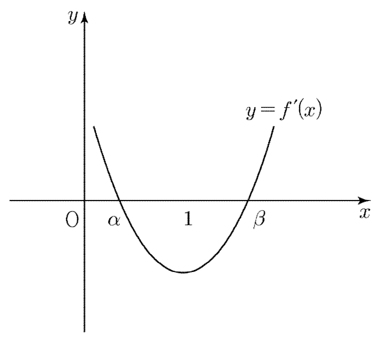
따라서 함수

$$h(x)=\begin{cases} f'(\sin^2\pi x) & \left(0<x<\frac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(x=\frac{1}{2}\right) \\ -f'(\sin^2\pi x) & \left(\frac{1}{2}<x<1\right) \end{cases}$$

는 $x=p$ 에서 극소를 갖고, $x=\frac{1}{2}$ 에서 극대를 갖고, $x=q$ 에서 극소를 갖는다.

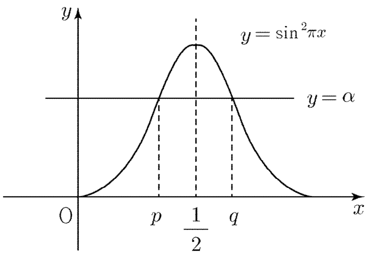
따라서 $0<x<1$ 에서 함수 $g(x)$ 가 극대가 되는 x 의 개수는 1 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

ⅱ) 방정식 $f'(x)=0$ 이 $0<x<1$ 에서 실근 $x=\alpha$ 를 갖고, $x\le 0$ 에서 실근을 $x=\beta$ 를 가질 때



$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ 에서
$f'(\sin^2\pi x)=3(\sin^2\pi x-\alpha)(\sin^2\pi x-\beta)$이고,
$\beta>1$ 에서 $\sin^2\pi x-\beta<0$ 이므로 함수 $f'(\sin^2\pi x)$ 의 부호변화는 $\alpha-\sin^2\pi x$의 부호변화와 같다. 또한, $-f'(\sin^2\pi x)$ 의 부호변화는 $\sin^2\pi x-\alpha$ 의 부호변화와 같다.

다음 그림과 같이 곡선 $y=\sin^2\pi x$ 와 직선 $y=\alpha$ 가 만나는 점의 x 좌표를 p, q라 하자.



$0<x<p$에서 $\alpha-\sin^2\pi x>0$이고,
$p<x<\frac{1}{2}$에서 $\alpha-\sin^2\pi x<0$이다.

마찬가지로, $\frac{1}{2}<x<q$에서 $\sin^2\pi x-\alpha>0$이고,
$q<x<1$에서 $\sin^2\pi x-\alpha<0$이다.

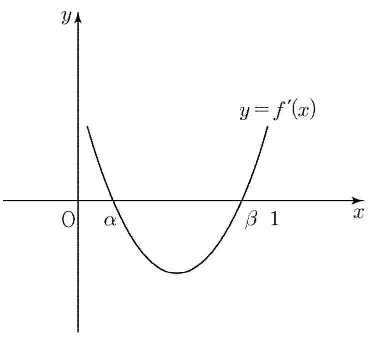
따라서 함수

$$h(x)=\begin{cases} f'(\sin^2\pi x) & \left(0<x<\frac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(x=\frac{1}{2}\right) \\ -f'(\sin^2\pi x) & \left(\frac{1}{2}<x<1\right) \end{cases}$$

는 $x=p$에서 극대를 갖고, $x=\frac{1}{2}$에서 극소를 갖고, $x=q$에서 극대를 갖는다.

따라서 $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수는 2이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

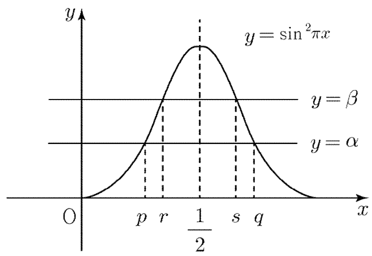
iii) 방정식 $f'(x)=0$이 $0<x<1$에서 서로 다른 두 실근 $x=\alpha$, β를 가질 때



$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$에서
$f'(\sin^2\pi x)=3(\sin^2\pi x-\alpha)(\sin^2\pi x-\beta)$이다.

다음 그림과 같이 곡선 $y=\sin^2\pi x$와 직선 $y=\alpha$가 만나는 점의 x좌표를 p, q라 하고, 곡선 $y=\sin^2\pi x$와 직선 $y=\beta$가 만나는 점의 x좌표를 r, s라 하자.

$0<x<p$에서 $(\sin^2\pi x-\alpha)(\sin^2\pi x-\beta)>0$이고,
$p<x<r$에서 $(\sin^2\pi x-\alpha)(\sin^2\pi x-\beta)<0$이고,
$r<x<\frac{1}{2}$에서$(\sin^2\pi x-\alpha)(\sin^2\pi x-\beta)>0$이다.



또한,
$\frac{1}{2}<x<s$에서
$-(\sin^2\pi x-\alpha)(\sin^2\pi x-\beta)<0$이고,
$s<x<q$에서
$-(\sin^2\pi x-\alpha)(\sin^2\pi x-\beta)>0$이고,
$q<x<1$에서
$-(\sin^2\pi x-\alpha)(\sin^2\pi x-\beta)<0$이다.

따라서 함수

$$h(x)=\begin{cases} f'(\sin^2\pi x) & \left(0<x<\frac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(x=\frac{1}{2}\right) \\ -f'(\sin^2\pi x) & \left(\frac{1}{2}<x<1\right) \end{cases}$$

는 $x=p$, $\frac{1}{2}$, q에서 극대를 갖고, $x=r$, s에서 극대를 갖고, $x=q$에서 극소를 갖는다.

이상에서, $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이 되기 위해서는 방정식 $f'(x)=0$이 $0<x<1$에서 두 실근을 가져야 한다.

함수 $g(x)$의 극댓값은 $g(p)=f(\sin^2 p\pi)=f(\alpha)$, $g(q)=f(\sin^2 q\pi)=f(\alpha)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\sin^2\frac{\pi}{2}\right)=f(1)$이고, 세 값이 모두 같으므로 $f(\alpha)=f(1)$이다.

주어진 조건에 의하여 열린구간 $(0,1)$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $\frac{1}{2}$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{1}{2}$이다. 따라서 $f(\alpha)=f(1)=\frac{1}{2}$이다. 또한, $f'(\alpha)=0$이므로 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-1)+\frac{1}{2}$이다.

열린구간 $(0,1)$에서 함수 $g(x)$의 최솟값이 0이므로 열린구간 $(0,1)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이다.

i) 함수 $f(x)$의 극솟값이 0인 경우

함수 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-1)+\frac{1}{2}$는 $x=\frac{\alpha+2}{3}$에서 극소이고. $f\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)=4\left(\frac{\alpha-1}{3}\right)^3+\frac{1}{2}$에서 함수 $f(x)$의 극솟값이 0이 되도록 하는 $\alpha=-\frac{1}{2}$이다.
이는 $\alpha>0$을 만족시키지 못하므로 모순이다.

ii) 함수 $f(x)$의 그래프가 점 $(0,0)$을 지나는 경우

$f(0)=-\alpha^2+\frac{1}{2}=0$에서 $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\because \alpha>0)$

i), ii)에서 $f(x)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(x-1)+\frac{1}{2}$이고,
$f(2)=5-2\sqrt{2}$이다. 따라서 $a=5$, $b=-2$에서
$a^2+b^2=29$