2019학년도 11월 고2 전국연합학력평가

정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[나형]

1	④	**2**	③	**3**	②	**4**	①	**5**	⑤
6	③	**7**	⑤	**8**	④	**9**	⑤	**10**	②
11	②	**12**	①	**13**	④	**14**	①	**15**	⑤
16	④	**17**	③	**18**	①	**19**	③	**20**	②
21	①	**22**	2	**23**	21	**24**	6	**25**	10
26	16	**27**	8	**28**	13	**29**	192	**30**	48

1. [출제의도] 지수 계산하기

$9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^3=27$

2. [출제의도] 등차수열 계산하기

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 4인 등차수열이므로 일반항은

$a_n=1+4(n-1)=4n-3$

따라서 $a_3=9$

3. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x(x+2)}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x+2)=2$

4. [출제의도] 미분계수 이해하기

$f(x)=x^2+7x+6$에서 $f'(x)=2x+7$

따라서 $f'(2)=11$

5. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$0\le x\le\frac{\pi}{3}$, $0\le 3x\le\pi$에서 $\sin\frac{\pi}{2}=1$

$\sin3x=1$에서 $3x=\frac{\pi}{2}$

따라서 $x=\frac{\pi}{6}$

6. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$\lim\limits_{x\to2}2f(x)=2\times\lim\limits_{x\to2}f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to2}g(x)=\lim\limits_{x\to2}\{2f(x)+g(x)-2f(x)\}$

$=\lim\limits_{x\to2}\{2f(x)+g(x)\}-\lim\limits_{x\to2}2f(x)$

$=8-2=6$

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$f(3)+\lim\limits_{x\to1-}f(x)=1+1=2$

8. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

$a_{n+1}+a_n=n+3$에서 $a_{n+1}=n+3-a_n$

$n=1$일 때, $a_1=1$이므로 $a_2=1+3-a_1=3$

$n=2$일 때, $a_3=2+3-a_2=2$

$n=3$일 때, $a_4=3+3-a_3=4$

9. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

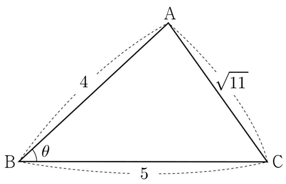
함수 $f(x)=(x-2)(x^3-4x+a)$에서

$f'(x)=(x^3-4x+a)+(x-2)(3x^2-4)$

$f'(1)=(a-3)+1=6$

따라서 $a=8$

10. [출제의도] 코사인법칙 이해하기



$\cos\theta=\frac{4^2+5^2-(\sqrt{11})^2}{2\times4\times5}=\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$

11. [출제의도] 지수함수를 활용하여 문제해결하기

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(a,1)$, $(b,4)$라 하자.

$\frac{2^a}{3}=1$, $\frac{2^b}{3}=4$이므로 $2^a=3$, $2^b=12$

$2^{b-a}=\frac{2^b}{2^a}=\frac{12}{3}=4$에서 $b-a=2$

따라서 직선 AB의 기울기는

$\frac{4-1}{b-a}=\frac{3}{2}$

[다른 풀이]

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(a,1)$, $(b,4)$라 하자.

$y=\frac{2^x}{3}$에서 $3y=2^x$, $x=\log_2 3y$이므로

$a=\log_2(3\times1)=\log_2 3$

$b=\log_2(3\times4)=\log_2 12$

$b-a=\log_2 12-\log_2 3=\log_2 4=2$

따라서 직선 AB의 기울기는

$\frac{4-1}{b-a}=\frac{3}{2}$

12. [출제의도] 다항함수의 미분 이해하기

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=5$이고 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$

$f(x)=2x^2+ax+b$에서

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=2+a+b=0$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이고

$f'(x)=4x+a$이므로

$f'(1)=4+a=5$에서 $a=1$

$2+a+b=0$에서 $b=-3$

따라서 $f(x)=2x^2+x-3$이므로

$f(2)=7$

13. [출제의도] 미분가능성 이해하기

$f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다. 즉, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=2+b$,

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=f(1)=1-a+b$이므로

$2+b=1-a+b$에서 $a=-1$

$f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=3-2a+b=5+b$

$\lim\limits_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$

$5+b=2$에서 $b=-3$

따라서 $a\times b=3$

14. [출제의도] 등차수열과 등비수열 이해하기

a, b, 6이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+6$ … ㉠

a, 6, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$6^2=ab$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$(2b-6)b=36$

$b^2-3b-18=(b-6)(b+3)=0$

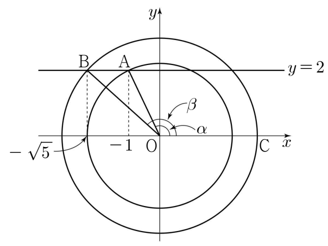
$b=6$ 또는 $b=-3$

㉠에서 $b=6$일 때 $a=6$이므로 조건에 맞지 않는다.

$b=-3$일 때 $a=-12$

따라서 $a+b=-12-3=-15$

15. [출제의도] 삼각함수의 뜻 이해하기



직선 $y=2$가 원 $x^2+y^2=5$와 제2사분면에서 만나는 점 A의 좌표는 $(-1,2)$이고

$\overline{OA}=\sqrt{5}$이므로 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$

직선 $y=2$가 원 $x^2+y^2=9$와 제2사분면에서 만나는 점 B의 좌표는 $(-\sqrt{5},2)$이고

$\overline{OB}=3$이므로 $\cos\beta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 $\sin\alpha\times\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=-\frac{2}{3}$

16. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$A(t,\sqrt{t})$, $B(t+4,\sqrt{t+4})$, $C(t+4,\sqrt{t})$이므로

$\overline{AC}=4$, $\overline{BC}=\sqrt{t+4}-\sqrt{t}$

삼각형 ABC의 넓이는

$S(t)=\frac{1}{2}\times4\times(\sqrt{t+4}-\sqrt{t})=2(\sqrt{t+4}-\sqrt{t})$

$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}\times S(t)}{2}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt{t}\times(\sqrt{t+4}-\sqrt{t})$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}\times(\sqrt{t+4}-\sqrt{t})(\sqrt{t+4}+\sqrt{t})}{\sqrt{t+4}+\sqrt{t}}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{t+4}+\sqrt{t}}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{t}}+1}$

$=\frac{4}{1+1}=2$

17. [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2a_6=ar\times ar^5=a^2r^6=1$ … ㉠

$S_3=3a_3$이고 $r<0$이므로 $\frac{a(1-r^3)}{1-r}=3ar^2$

$r^2+r+1=3r^2$, $(2r+1)(r-1)=0$에서 $r=-\frac{1}{2}$

$a>0$이고 ㉠에서 $a^2=64$이므로 $a=8$

따라서 $a_7=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{8}$

18. [출제의도] 지수방정식을 이용하여 추론하기

	l_4	l_5	l_6	
l_1	4^a	p	-2^{a+1}	S_1
l_2	q	$2^{a+3}-16$	r	S_2
l_3	-2^{a+1}	$2^{a+3}-16$	s	S_3
	S_4	S_5	S_6	

그림과 같이 빈 칸에 들어갈 수를 각각 p, q, r, s라 하자.

$S_1=S_4$이므로 $q=p$

$S_3=S_6$이므로 $r=2^{a+3}-16$

$S_3=S_4$이므로 $s=4^a-2^{a+3}+16+p$

	l_4	l_5	l_6	
l_1	4^a	p	-2^{a+1}	S_1
l_2	p	$2^{a+3}-16$	$2^{a+3}-16$	S_2
l_3	-2^{a+1}	$2^{a+3}-16$	$4^a-2^{a+3}+16+p$	S_3
	S_4	S_5	S_6	

$S_1=S_3=S_4=S_6=4^a-2^{a+1}+p$

$S_2=S_5=2^{a+4}-32+p$이므로

$4^a-2^{a+1}+p=2^{a+4}-32+p$

$(2^a)^2-18\times2^a+32=0$

$(2^a-2)(2^a-16)=0$

$2^a=2$ 또는 $2^a=16$

$a=1$ 또는 $a=4$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 5

19. [출제의도] 수열을 이용하여 추론하기

세 자연수 a, b, d는 $2b=a+d$를 만족시키므로 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

이 등차수열의 공차가 될 수 있는 가장 작은 값은 2, 가장 큰 값은 $\boxed{10}$이다.

이 등차수열의 공차를 $k\left(2\le k\le \boxed{10}\right)$이라 하면 $1\le a<a+k<c<a+2k\le 21$이므로

c가 될 수 있는 모든 자연수의 개수는 $k-1$이고 a가 될 수 있는 모든 자연수의 개수는 $\boxed{21-2k}$이다.

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수는

$\sum_{k=2}^{\boxed{10}}\left\{(k-1)\times\left(\boxed{21-2k}\right)\right\}$

$=\sum_{k=2}^{10}\left(-2k^2+23k-21\right)$

$=\sum_{k=1}^{10}\left(-2k^2+23k-21\right)-\left(-2\times1^2+23\times1-21\right)$

$=-2\times\frac{10\times11\times21}{6}+23\times\frac{10\times11}{2}-21\times10$

$=\boxed{285}$

따라서 $p=10$, $f(k)=21-2k$, $q=285$이므로

$p+q+f(3)=10+285+15=310$

20. [출제의도] 로그함수를 이용하여 추론하기

$\left|\log_2x-n\right|=1$에서

$\log_2x-n=1$ 또는 $\log_2x-n=-1$

$x=2^{n+1}$ 또는 $x=2^{n-1}$

$\left|\log_2x-n\right|=2$에서

$\log_2x-n=2$ 또는 $\log_2x-n=-2$

$x=2^{n+2}$ 또는 $x=2^{n-2}$

ㄱ. $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2^2-2^0=3$ (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=2^{n+1}-2^{n-1}=2^n(2-2^{-1})=\frac{3}{2}\times2^n$

$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}=2^{n+2}-2^{n-2}=2^n(2^2-2^{-2})=\frac{15}{4}\times2^n$

따라서 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}:\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}=\frac{3}{2}:\frac{15}{4}=2:5$ (참)

ㄷ. $S_n=\frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}+\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}+\frac{5}{2}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\right)$

$=\frac{7}{4}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\frac{21}{8}\times2^n$

따라서 $S_n=21\times2^{n-3}$

$21\le21\times2^{k-3}\le210$

$1\le2^{k-3}\le10$을 만족하는 자연수 k의 값은 3, 4, 5, 6

모든 자연수 k의 값의 합은 18 (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

21. [출제의도] 로그를 이용하여 추론하기

$\log_ab=\frac{q}{p}$(p, q는 서로소인 자연수)라 하면

서로 다른 유리수 $\frac{q}{p}$의 개수는

서로 다른 순서쌍 (p,q)의 개수와 같다.

$\log_ab=\frac{q}{p}$이므로 $b=a^{\frac{q}{p}}$, $a^q=b^p$

a, b, p, q가 모두 자연수이므로, 어떤 자연수 c에 대하여 $a=c^p$, $b=c^q$이다.

$4<a<b<200$이므로 $4<c^p<c^q<200$이다.

(i) $c=2$일 때

$4<2^p<2^q<200$이고 이를 만족시키는

p, q의 순서쌍을 구하면 (p,q)는

$(3,4)$, $(3,5)$, $(3,7)$, $(4,5)$, $(4,7)$, $(5,6)$, $(5,7)$, $(6,7)$이므로 8개

(ii) $c=3$일 때

$4<3^p<3^q<200$이고 이를 만족시키는

p, q의 순서쌍을 구하면 (p,q)는

$(2,3)$, $(3,4)$이므로 2개

(iii) $c=4$일 때

$4<4^p<4^q<200$이고 이를 만족시키는

p, q의 순서쌍을 구하면 (p,q)는 $(2,3)$이므로 1개

(iv) $c=5$일 때

$4<5^p<5^q<200$이고 이를 만족시키는

p, q의 순서쌍을 구하면 (p,q)는

$(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$이므로 3개

(v) $6\le c\le14$일 때

$4<c^p<c^q<200$이고 이를 만족시키는

p, q의 순서쌍을 구하면 (p,q)는

$(1,2)$뿐이므로 모두 (iv)의 경우에 포함된다.

(i), (ii), (iii), (iv)에서

$(2,3)$이 세 번, $(3,4)$가 두 번 중복되었으므로

서로 다른 순서쌍 (p,q)의 개수는

$(8+2+1+3)-2-1=11$

따라서 $n(A)=11$

[다른 풀이]

$\log_ab=\frac{q}{p}$(p, q는 서로소인 자연수)라 하면

$b=a^{\frac{q}{p}}$이고 $n(A)$는 서로 다른 $\frac{q}{p}$의 개수와 같다.

(i) $p=1$일 때

a는 $4<a<200$을 만족하는 자연수이고

4보다 큰 자연수 중 가장 작은 수는 5이므로

$4<a<a^q<200$을 만족하는 모든 자연수 q는

$4<5<5^q<200$을 만족한다.

따라서 $\frac{q}{p}$는 2, 3이다.

(ii) $p\ge2$일 때

$a^{\frac{q}{p}}$이 자연수이므로 $a^{\frac{1}{p}}$은 자연수이다.

따라서 a가 될 수 있는 가장 작은 자연수는 2^p

(단, $p=2$일 때 $4<a$에서 $a=3^2$)

따라서 $4<a<200$이고 $a^{\frac{1}{p}}$이 자연수인 모든

자연수 a에 대하여 $4<a<a^{\frac{q}{p}}<200$을 만족하는

모든 자연수 q는 $4<2^p<(2^p)^{\frac{q}{p}}<200$을 만족한다.

따라서 서로 다른 유리수 $\frac{q}{p}$의 개수는

$4<2^p<2^q<200$을 만족시키는 $\frac{q}{p}$의 개수와 같다.

i) $p=2$일 때

$4<3^2<3^q<200$을 만족하는

p와 서로소인 자연수 q는 3이다.

따라서 $\frac{q}{p}$는 $\frac{3}{2}$이다.

ii) $p=3$일 때

$4<2^3<2^q<200$을 만족하는

p와 서로소인 자연수 q는 4, 5, 7이다.

따라서 $\frac{q}{p}$는 $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$이다.

iii) $p=4$일 때

$4<2^4<2^q<200$을 만족하는

p와 서로소인 자연수 q는 5, 7이다.

따라서 $\frac{q}{p}$는 $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$이다.

iv) $p=5$일 때

$4<2^5<2^q<200$을 만족하는

p와 서로소인 자연수 q는 6, 7이다.

따라서 $\frac{q}{p}$는 $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$이다.

v) $p=6$일 때

$4<2^6<2^q<200$을 만족하는

p와 서로소인 자연수 q는 7이다.

따라서 $\frac{q}{p}$는 $\frac{7}{6}$이다.

$4<2^7<200<2^8$이므로 $p\ge7$일 때 조건을 만족하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\frac{q}{p}$의 개수는 11이다.

따라서 $n(A)=11$

22. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_318-\log_32=\log_3\frac{18}{2}=\log_33^2=2$

23. [출제의도] 미분계수 이해하기

$\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{3h}=\frac{1}{3}\times\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$

$=\frac{1}{3}f'(4)=7$

따라서 $f'(4)=3\times7=21$

24. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질 이해하기

함수 $y=3^x+2$의 그래프의 점근선의 방정식은
$y=2$
함수 $y=\log_3(x-4)$의 그래프의 점근선의 방정식은
$x=4$
따라서 두 점근선이 만나는 점의 좌표는
$(4,\ 2)$이므로 $a+b$의 값은 6

25. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

삼각형 ABC에서 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$

$\overline{\mathrm{AB}}=15$이고 삼각형 ABC의 넓이가 50이므로

$50=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times15\times\overline{\mathrm{BC}}\times\dfrac{2}{3}$

$=5\times\overline{\mathrm{BC}}$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=10$

26. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=x^2+ax+b$라 하면 $f'(x)=2x+a$
모든 실수 x에 대하여 $2f(x)=(x+1)f'(x)$이므로
$2(x^2+ax+b)=(x+1)(2x+a)$
등식 $2x^2+2ax+2b=2x^2+(a+2)x+a$는 항등식이므로
$2a=a+2$, $2b=a$에서 $a=2$, $b=1$
따라서 $f(x)=x^2+2x+1$이므로 $f(3)=16$

27. [출제의도] 삼각함수 이해하기

함수 $f(x)=3\sin\dfrac{\pi(x+a)}{2}+b$에서

최댓값은 $3+b=5$이고
최솟값은 $-3+b=-1$이므로 $b=2$

함수 $f(x)=3\sin\dfrac{\pi}{2}(x+a)+2$의 그래프는

함수 $y=3\sin\dfrac{\pi}{2}x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이다.
모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족하는 최소의 양수 p가 4이므로 함수 $f(x)$의 주기는 4이다.

함수 $f(x)$의 그래프는 함수 $y=3\sin\dfrac{\pi}{2}x+2$의 그래프와 일치하고 함수 $f(x)$의 주기는 4이므로 $a=4k$(k는 정수)이다.
a가 양수일 때 a의 최솟값은 4이므로
$a\times b$의 최솟값은 8

28. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

조건 (가)에서 $|a_5|+|a_6|=|a_5+a_6|+2$이고
공차가 음수이므로 $a_5>0$, $a_6<0$이다.
이 수열의 공차를 d라 하면
$(a_1+4d)-(a_1+5d)=|2a_1+9d|+2$
$|2a_1+9d|=-d-2$이므로
$2a_1+9d=d+2$, $a_1+4d=1$ ⋯ ㉠
또는 $2a_1+9d=-d-2$, $a_1+5d=-1$ ⋯ ㉡
조건 (나)에서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{6}|a_n|=\sum_{n=1}^{5}a_n-a_6$

$=\dfrac{5(2a_1+4d)}{2}-a_1-5d=37$에서

$4a_1+5d=37$ ⋯ ㉢
㉠, ㉢에서 $a_1=13$

㉡, ㉢에서 $a_1=\dfrac{38}{3}$은 자연수가 아니다.

따라서 $a_1=13$

29. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

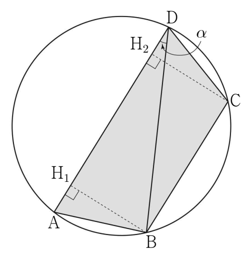
삼각형 ABD에서 $\angle\mathrm{ADB}=\alpha$라 할 때,
삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\alpha}=12$

$\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{CBD}$
선분 AD와 선분 BC는 평행하므로
사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다.



두 점 B, C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 할 때,

$\overline{\mathrm{DH_1}}=\overline{\mathrm{BD}}\cos\alpha=8\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{13}}{4}=2\sqrt{26}$

$\overline{\mathrm{BH_1}}=\overline{\mathrm{BD}}\sin\alpha=8\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}=2\sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{AH_1}}=\overline{\mathrm{DH_2}}$이므로 사각형 ABCD의 넓이

$S=\dfrac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}})\times\overline{\mathrm{BH_1}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\left\{(\overline{\mathrm{DH_1}}+\overline{\mathrm{AH_1}})+(\overline{\mathrm{DH_1}}-\overline{\mathrm{DH_2}})\right\}\times\overline{\mathrm{BH_1}}$

$=\overline{\mathrm{DH_1}}\times\overline{\mathrm{BH_1}}$

$=2\sqrt{26}\times2\sqrt{6}=8\sqrt{39}$

따라서 $\dfrac{S^2}{13}=192$

30. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

정의역이 $\{x\,|\,x\geq m\}$인 함수 $y=\dfrac{1}{4}(x-3)^2$의 그래프가 직선 $y=mx$와 만나는 점의 개수를 $h_1(m)$이라 하고

정의역이 $\{x\,|\,x<m\}$인 함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $y=mx$와 만나는 점의 개수를 $h_2(m)$이라 하면 $g(m)=h_1(m)+h_2(m)$이다.
함수 $g(m)$이 $m=0$에서 연속이므로

$g(0)=\displaystyle\lim_{m\to0+}g(m)=\lim_{m\to0-}g(m)$이고

함수 $y=\dfrac{1}{4}(x-3)^2$의 그래프는 $x=3$에서 x축에 접하므로

$\displaystyle\lim_{m\to0+}h_1(m)=2$, $\displaystyle\lim_{m\to0-}h_1(m)=0$, $h_1(0)=1$

$\displaystyle\lim_{m\to0+}g(m)=\lim_{m\to0+}\{h_1(m)+h_2(m)\}$

$=2+\displaystyle\lim_{m\to0+}h_2(m)$

$\displaystyle\lim_{m\to0-}g(m)=\lim_{m\to0-}\{h_1(m)+h_2(m)\}$

$=0+\displaystyle\lim_{m\to0-}h_2(m)$

$g(0)=h_1(0)+h_2(0)=1+h_2(0)$

따라서 $2+\displaystyle\lim_{m\to0+}h_2(m)=0+\lim_{m\to0-}h_2(m)=1+h_2(0)$

이때, $h_2(m)=0$ 또는 $h_2(m)=1$ 또는 $h_2(m)=2$이므로

$h_2(0)=0$일 때

$2+\displaystyle\lim_{m\to0+}h_2(m)=1+h_2(0)=1$, $\displaystyle\lim_{m\to0+}h_2(m)=-1$

이므로 성립하지 않는다.

$h_2(0)=2$일 때

$0+\displaystyle\lim_{m\to0-}h_2(m)=1+h_2(0)=3$,

$\displaystyle\lim_{m\to0-}h_2(m)=3$이므로 성립하지 않는다.

따라서 $h_2(0)=1$

$\displaystyle\lim_{m\to0-}h_2(m)=2$, $\displaystyle\lim_{m\to0+}h_2(m)=0$이므로

$y=x^2+ax+b$의 그래프는 $x<0$에서 x축에 접한다.

따라서 $a>0$, $b=\dfrac{a^2}{4}$, $g(0)=2$

(ⅰ) 직선 $y=mx$와 곡선 $y=\dfrac{1}{4}(x-3)^2$의 위치관계를 확인하면

$mx=\dfrac{1}{4}(x-3)^2$

$x^2-(4m+6)x+9=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(4m+6)^2-4\times9=16m(m+3)$

함수 $y=\dfrac{1}{4}(x-3)^2$의 그래프와 직선 $y=mx$는

$-3<m<0$에서 만나지 않고
$m=0$, $m=-3$에서 한 점에서 만나고
$m<-3$ 또는 $m>0$에서 두 점에서 만난다.
$x=m$일 때 직선 $y=mx$와

곡선 $y=\dfrac{1}{4}(x-3)^2$의 y좌표의 대소관계를 확인하면

$\dfrac{1}{4}(m-3)^2-m^2=-\dfrac{3}{4}(m+3)(m-1)$이므로

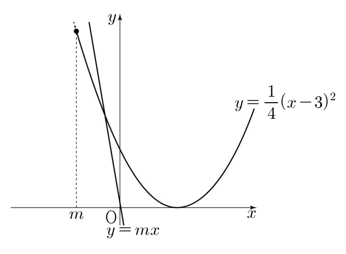
$m<0$에서

$-3<m<0$일 때 $y=\dfrac{1}{4}(x-3)^2$의 y좌표가 더 크고

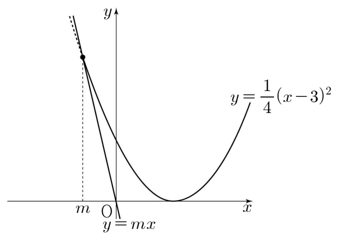
$m<-3$일 때 $y=mx$의 y좌표가 더 크다.

직선 $y=mx$와 함수 $y=\dfrac{1}{4}(x-3)^2$의 그래프의 교점의 개수는 다음과 같다.

ⅰ) $m<-3$일 때
$x\geq m$에서 교점의 개수 $h_1(m)=1$

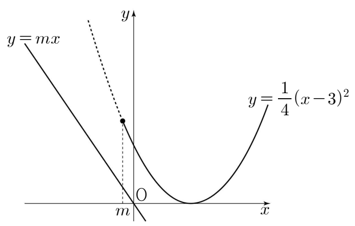


ⅱ) $m=-3$일 때
$x\geq m$에서 교점의 개수 $h_1(m)=1$



iii) $-3<m<0$일 때

$x \ge m$에서 교점의 개수 $h_1(m)=0$



$g(m)$은 $m \le 0$에서 연속이고 $g(0)=2$이므로
$m<-3$일 때 $h_2(m)=1$
$m=-3$일 때 $h_2(m)=1$
$-3<m<0$일 때 $h_2(m)=2$

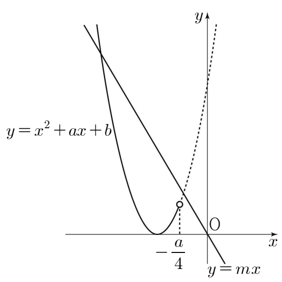
(ii) 직선 $y=mx$와 곡선 $y=x^2+ax+\frac{a^2}{4}$의 위치관계를 확인하면
$x=m$일 때

$m^2+am+\frac{a^2}{4}-m\times m=a\left(m+\frac{a}{4}\right)$이므로

$m=-\frac{a}{4}$일 때 함수 $y=x^2+ax+\frac{a^2}{4}$의 그래프와 직선 $y=mx$는 $x=m$에서 만난다.

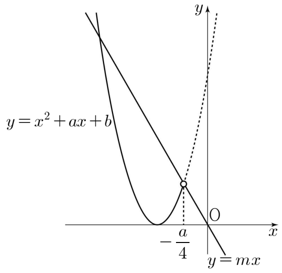
i) $m<-\frac{a}{4}$일 때

$x<m$에서 교점의 개수 $h_2(m)=1$



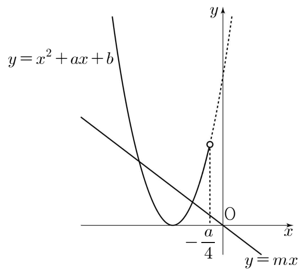
ii) $m=-\frac{a}{4}$일 때

$x<m$에서 교점의 개수 $h_2(m)=1$



iii) $-\frac{a}{4}<m<0$일 때

$x<m$에서 교점의 개수 $h_2(m)=2$



(i), (ii)에서

$h_2(m)$	1	1	2
(i)	$m<-3$	$m=-3$	$-3<m<0$
(ii)	$m<-\frac{a}{4}$	$m=-\frac{a}{4}$	$-\frac{a}{4}<m<0$

$m \le 0$에서 함수 $g(m)$이 연속이 되려면

$-\frac{a}{4}=-3$, $a=12$

$b=\frac{a^2}{4}$이므로 $b=36$

따라서 $a+b=48$