[정답률 41%]

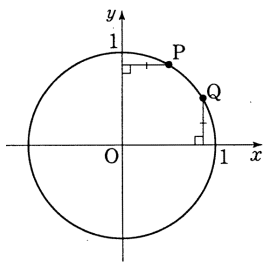
1. 원점 O를 지나고 기울기가 $\tan\theta$인 직선 l이 있다. 두 점 $A(0, 2)$, $B(2\sqrt{3}, 0)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하자. 원점 O로부터 점 A'까지의 거리와 점 B'까지의 거리의 합 $\overline{OA'}+\overline{OB'}$이 최대가 되는 θ의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.)

[3점] [05.11수능-가형27번][1]

① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}\pi$

[정답률 22%]

2. 좌표평면에서 두 점 P, Q가 점 $(1, 0)$을 동시에 출발하여 원 $x^2+y^2=1$ 위를 시계 반대 방향으로 돌고 있으며, 점 P가 $2t$ $(0\le t\le\pi)$만큼 움직일 때 점 Q는 t만큼 움직인다.
점 P에서 y축까지의 거리와 점 Q에서 x축까지의 거리가 같아지는 모든 t의 값의 합은?
[3점] [09. 6 평가원-가형(미적)28번][2]



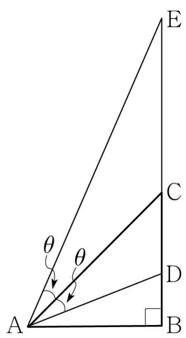
① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ $\frac{5}{4}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

[정답률 42%]

3. $\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$일 때, $\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\beta+\cos\beta$의 최댓값을 M이라 하자. M^2의 값을 구하시오.
[3점] [11. 3 교육청-가형24번][3]

[정답률 40%]

4. $\angle B$가 직각인 이등변삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 선분 BC 위의 점 D와 선분 BC의 연장선 위의 점 E를 $\angle CAD=\angle CAE=\theta$가 되도록 잡는다.



$\frac{\overline{AE}-\overline{AD}}{\overline{AC}}=2$일 때, $\sin\theta$의 값은?
[3점] [10. 10 교육청-가형(미적)28번][4]

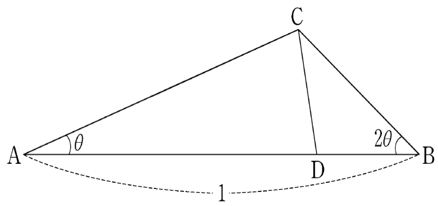
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

④ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4}$

[정답률 23%]

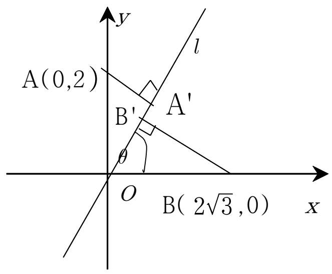
5. 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이고 $\angle\mathrm{A}=\theta$, $\angle\mathrm{B}=2\theta$이다. 변 AB 위의 점 D를 $\angle\mathrm{ACD}=2\angle\mathrm{BCD}$가 되도록 잡는다. $\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta}=a$일 때, $27a^2$의 값을 구하시오.[5] (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)

[4점][2012년 11월 수능 가형-29번]



1. 정답 ②

(풀이) 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 θ이므로 다음 그림에서



$\overline{OA}' = \overline{OA}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 2\sin\theta$,

$\overline{OB}' = \overline{OB}\cos\theta = 2\sqrt{3}\cos\theta$

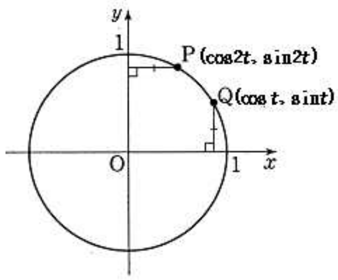
$\therefore\ \overline{OA}' + \overline{OB}' = 2\sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta$

$$= \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) \le 4$$

(단, 등호는 $\theta+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ 즉, $\theta = \frac{\pi}{6}$일 때 성립한다.) 따라서 $\overline{OA}' + \overline{OB}'$이 최대가 되는 θ의 값은 $\frac{\pi}{6}$이다.

2. 정답 5



두 점을 $P(\cos 2t, \sin 2t)$, $Q(\cos t, \sin t)$ 라 하면

$|\cos 2t| = \sin t \ \Rightarrow\ \cos 2t = \pm\sin t$

i) $\cos 2t = \sin t$ 에서 $2\sin^2 t + \sin t - 1 = 0$

$\therefore\ \sin t = \frac{1}{2}\ (0 \le t \le \pi)$ $\quad\therefore\ t = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

ii) $\cos 2t = -\sin t$ 에서 $2\sin^2 t - \sin t - 1 = 0$

$\therefore\ \sin t = 1\ (0 \le t \le \pi)$ $\quad\therefore\ t = \frac{\pi}{2}$

따라서 t 의 값의 합은 $\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\pi = \frac{3}{2}\pi$

3. 정답 6

$\sin\alpha + \cos\alpha + \sin\beta + \cos\beta$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left\{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= \sqrt{6}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

그러므로 $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 1$일 때

최댓값 $M = \sqrt{6}$이고, $M^2 = 6$

[참고]

$\alpha = \frac{5}{12}\pi$이고 $\beta = \frac{\pi}{12}$일 때

두 식 $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{4}$과 $\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\pi}{6}$를 만족시킨다.

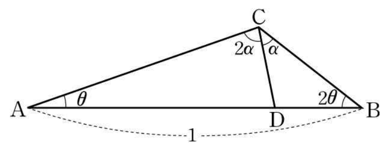
4. 정답 ②

$\overline{\mathrm{AB}} = a$라 하면 $\overline{\mathrm{AE}} = \frac{a}{\cos(45^\circ+\theta)} = \frac{\sqrt{2}a}{\cos\theta-\sin\theta}$

$\overline{\mathrm{AD}} = \frac{a}{\cos(45^\circ-\theta)} = \frac{\sqrt{2}a}{\cos\theta+\sin\theta}$

$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$이므로 $\sin\theta = \frac{1}{2}$

5. 정답 16



$\angle\mathrm{BCD} = \alpha$라 하면 사인법칙에서

$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta} = \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin 2\alpha}$, $\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\alpha}$

$\overline{\mathrm{AD}} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\theta}\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{BD}} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\theta}\overline{\mathrm{CD}}$

$\overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{BD}} = 1$이므로 $\overline{\mathrm{CD}} = \dfrac{1}{\frac{\sin 2\alpha}{\sin\theta} + \frac{\sin\alpha}{\sin 2\theta}}$

한편, $3\theta + 3\alpha = \pi$이므로 $\alpha = \frac{\pi}{3} - \theta$

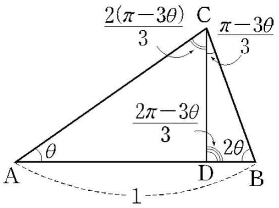
$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta} = \lim_{\theta\to+0}\frac{1}{\frac{\sin 2\alpha}{\sin\theta}\cdot\theta + \frac{\sin\alpha}{\sin 2\theta}\cdot\theta}$$

$$= \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$=\frac{4}{3\sqrt{3}}=a$

$\therefore\ 27a^2=27\cdot\frac{16}{27}=16$

[다른 풀이]



$\angle\mathrm{BCD}=\frac{1}{3}(\angle\mathrm{BCA})=\frac{\pi-3\theta}{3}$

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 사인법칙에 의해

$\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}$

$\triangle\mathrm{BCD}$에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin 2\theta}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}=\frac{\sin 2\theta}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}\overline{BC}=\frac{\sin 2\theta}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$

$\therefore\ a=\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta}$

$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}\cdot\frac{\sin 2\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$

$=\frac{1}{\sin\frac{2}{3}\pi}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3\sqrt{3}}$

$\therefore\ 27a^2=27\times\frac{16}{27}=16$