[정답률 39%]

1. 두 자연수 a, b $(a<b)$에 대하여 분수부등식

$$\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b} \leq 0$$

을 만족시키는 정수 x가 2개가 되도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수는?

[3점] [05.11수능-가형8번][1]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[정답률 22%]

2. x에 대한 분수방정식 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{a}{2x^2}$의 실근이 존재하지 않도록 하는 정수 a의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

[3점] [11. 3 교육청-가형12번][2]

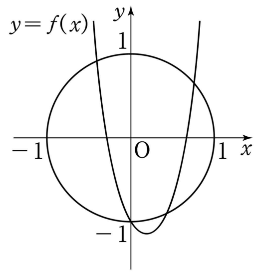
[정답률 10%]

3. n이 자연수일 때, x에 대한 무리방정식 $\sqrt{4n+x}+\sqrt{4n-x}=2n$이 실수해를 갖도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.

[4점] [09. 6 평가원-가형21번][3]

[정답률 45%]

4. 오른쪽 그림은 좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원과 점 $(0, -1)$을 지나는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 방정식



$$\frac{1}{f(x)+1}-\frac{1}{f(x)-1}=\frac{2}{x^2}$$

의 서로 다른 실근 x의 개수는?[4]

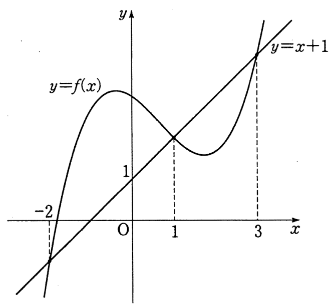
[3점][08년.11수능 - 가형 5번]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

[정답률 50%]

4. 그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 세 점에서 만나고 그 교점의 x좌표는 -2, 1, 3이다. 부등식 $\frac{x}{f(2x)-1} \geq \frac{1}{2}$을 만족시키는 실수 x의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

[4점] [09. 6 평가원-가형9번][5]



① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

1. 정답 ③

(풀이) 분수부등식 $\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{x}{x-b}\leqq 0$의 좌변을

통분하면 $\dfrac{x(x-b)}{x-a}+\dfrac{x(x-a)}{x-b}\leqq 0$

$\dfrac{x(2x-a-b)}{(x-a)(x-b)}\leqq 0$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $(x-a)^2(x-b)^2$을 곱하면

$x(2x-a-b)(x-a)(x-b)\leqq 0$,

(단, $x\neq a$, $x\neq b$)

이 때, $a<\dfrac{a+b}{2}<b$이므로 주어진 분수부등식의

해는 $0\leqq x<a$ 또는 $\dfrac{a+b}{2}\leqq x<b$

$a=1, b=2$일 때 정수인 해가 존재하지 않는다.

$a=1, b=3$일 때 $\dfrac{a+b}{2}=2$이므로 정수인 해는

$x=0$, $x=2$의 2개이다.

$a=1, b=4$일 때 $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{5}{2}$이므로 정수인 해는

$x=0$, $x=3$의 2개이다.

$a=1, b\geqq 5$일 때 정수인 해는 세 개 이상이다.

$a=2, b=3$일 때 $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{5}{2}$이므로 정수인 해는

$x=0$, $x=1$의 2개이다.

$a=2, b\geqq 4$일 때 정수인 해는 3개 이상이다.

$a\geqq 3$이면 정수인 해는 3개 이상이다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$의 3개이다.

2. 정답 ④

$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{a}{2x^2}$의 양변에

분모의 최소공배수 $2x^2(x-1)(x+1)$을 곱하면

$2x^2(x+1)-2x^2(x-1)=a(x^2-1)$

$4x^2=ax^2-a$ 에서 $(a-4)x^2=a$

ⅰ) $a=4$인 경우

$0\cdot x^2=4$이므로 해가 존재하지 않는다.

ⅱ) $a\neq 4$인 경우

$x^2=\dfrac{a}{a-4}$ ⋯ ㉠

(1) $\dfrac{a}{a-4}\geq 0$이면 실근이 존재하지만

이 해가 모두 무연근이어야 하므로

㉠에서 $x=0$이면 $a=0$

㉠에서 $x=-1$ 또는 $x=1$이면 $a-4=a$이므로

실수 a가 존재하지 않는다.

(2) $\dfrac{a}{a-4}<0$이면 실근이 존재하지 않으므로

$a(a-4)<0$ 에서 $0<a<4$

따라서 정수 a는 $1, 2, 3$이다.

ⅰ), ⅱ)에서 정수 a는 $0, 1, 2, 3, 4$로 5개다.

3. 정답 9

$-4n\leq x\leq 4n$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$\sqrt{(4n+x)(4n-x)}=2n^2-4n$ ……①

$16n^2-x^2=(2n^2-4n)^2$ 에서

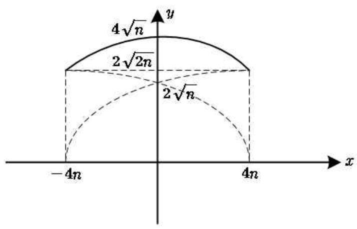
$x^2=2n^3(8-2n)$ ……②

① 과 ②에서 $2n^2-4n\geq 0,\ 8-2n\geq 0$ ⇨ $2\leq n\leq 4$

∴ $n=2, 3, 4$ ∴ 모든 n의 값은 9

[다른 풀이]

$y=\sqrt{(4n+x)}+\sqrt{(4n-x)}$ 의 그래프를 그려보면



실근을 갖기 위한 n값의 범위를 구해보면

$2\sqrt{2n}\leq 2n\leq 4\sqrt{n}$

이것을 정리하면 $2\leq n\leq 4$ ∴ $n=2, 3, 4$

∴ 모든 n의 값은 9

4. 답 ② $\dfrac{1}{f(x)+1}-\dfrac{1}{f(x)-1}=\dfrac{2}{x^2}$

의 좌변을 통분하여 정리하면

$\dfrac{-2}{\{f(x)\}^2-1}=\dfrac{2}{x^2}$ ∴ $\{f(x)\}^2=1-x^2$

∴ $f(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$

따라서 구하는 방정식의 실근은

두 곡선 $y=f(x)$, $y=\pm\sqrt{1-x^2}$가 만나는 점의

x좌표 중에서 $f(x)\neq\pm 1$, $x\neq 0$인 x좌표와 같다.

그런데 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$의 그래프는 원 $x^2+y^2=1$과

같으므로 주어진 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$,

$y=\pm\sqrt{1-x^2}$는 서로 다른 네 점에서 만난다.

그런데, $x\neq 0$, $f(x)\neq -1$이므로 점 (0, -1)은

제외해야 한다.

따라서 구하는 실근의 개수는 3이다.

5. 정답 ③

$2x=t$로 치환하면 부등식 $\dfrac{x}{f(2x)-1}\geq\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{t}{f(t-1)-1} \geq 1$

i) $f(t)>1$이면 $f(t) \leq t+1$이어야 하므로
주어진 그래프에서 두 조건을 만족하는 t의
범위는 $1 \leq t \leq 3$이다.

ii) $f(t)<1$이면 $f(t) \geq t+1$이어야 하므로
같은 방법으로 t의 범위를 구하면
$-2 \leq t < \alpha$이다.

$\therefore \ -2 \leq 2x < \alpha$,
$1 \leq 2x \leq 3$

$-1 \leq x \leq \dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}$

$\mathrm{M}=\dfrac{3}{2}$, $m=-1$

$\therefore \ \mathrm{M}+m=\dfrac{1}{2}$