[정답률 28%]

1. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5,\quad \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$$ 을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

[3점][08년. 6 평가원 - 가형 19번][1.]

[정답률 36%]

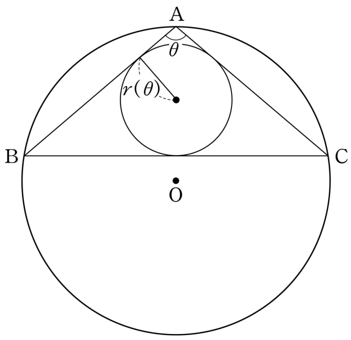
2. $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$ 의 값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ 1 ④ e ⑤ $2e$

[3점][08년. 6 평가원 - 가형(미적) 27번[2.]]

[정답률 13%]

3. 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 점 A가 있다. 그림과 같이 양수 θ에 대하여 원 O 위의 두 점 B, C를 $\angle BAC=\theta$이고 $\overline{AB}=\overline{AC}$가 되도록 잡는다. 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to\pi-0}\dfrac{r(\theta)}{(\pi-\theta)^2}=\dfrac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[3.] [4점][08년.11수능 - 가형 30번]



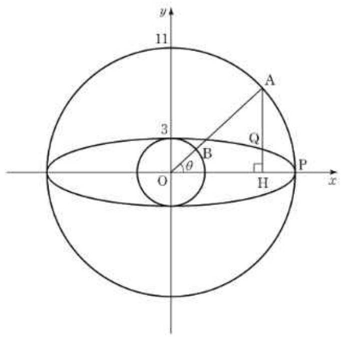
[정답률 27%]

4. 좌표평면 위에 타원 $\dfrac{x^2}{11^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$과 점 $P(11, 0)$이 있고, 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 11인 원 C_1과 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 C_2가 있다. 제 1사분면에 있는 원 C_1 위의 점 A에 대하여 선분 OA와 원 C_2의 교점을 B, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH와 타원의 교점을 Q, 선분 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하자. 삼각형 ABQ의 넓이를 S_1이라 하고, 삼각형 APQ의 넓이를 S_2라 하자.

$\lim_{\theta\to0}\dfrac{S_2}{\theta^2\cdot S_1}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][09년.9 평가원 - 가형(미적) 30번][4.]



[정답률 37%]

5. 함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

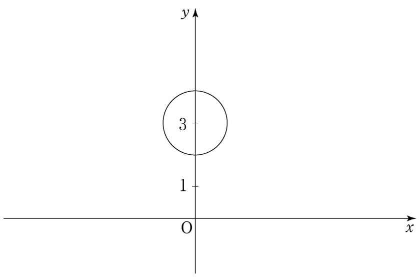
[3점][08년. 6 평가원 - 가형(미적) 29번][5.]

ㄱ. $f(x)=x^2$이면 $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{x}=0$이다.
ㄴ. $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{f(x)}=1$ 이면 $\lim_{x\to0}\dfrac{3^x-1}{f(x)}=\ln 3$
ㄷ. $\lim_{x\to0}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{x}$이 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답률 41%]

6. 좌표평면에서 중심이 $(0, 3)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 C라 하자. 양수 r에 대하여 $f(r)$를 반지름의 길이가 r인 원 중에서, 원 C와 한 점에서 만나고 동시에 x축에 접하는 원의 개수라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점] [06.11수능-가형9번]6.



<보 기>

ㄱ. $f(2)=3$

ㄴ. $\lim_{r \to 1+0} f(r)=f(1)$

ㄷ. 구간 $(0, 4)$에서 함수 $f(r)$의 불연속점은 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답률 47%]

7. 폐구간 $[0, 5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

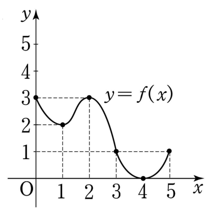
$$g(x)=\begin{cases} \{f(x)\}^2 & (0 \leq x \leq 3) \\ (f \circ f)(x) & (3 < x \leq 5) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 폐구간 $[0, 5]$에서 연속이 되도록 하는 함수 $y=f(x)$의 그래프로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?7.

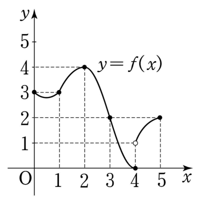
[4점][08년.11수능 - 가형 9번]

<보 기>

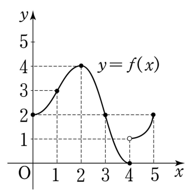
ㄱ



ㄴ.



ㄷ.



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[정답률 49%]

8. 실수 a에 대하여 집합

$\{x \mid ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x$는 실수$\}$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
[3점]['10.11수능-가형 8번][8.]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{a\to 0} f(a)=f(0)$

ㄴ. $\lim_{a\to c+0} f(a) \neq \lim_{a\to c-0} f(a)$인 실수 c는 2개이다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

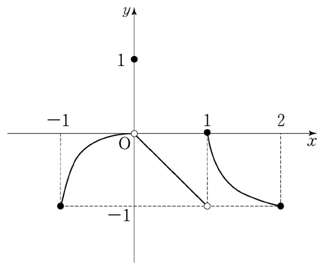
[정답률 46%]

9. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1}$, $h(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$와 함수 $f(x)h(x)$가 모두 연속함수일 때, $f(10)$의 값을 구하시오.
[4점][09년. 6 평가원 - 가형 23번] [9.]

[정답률 37%]

10. 폐구간 $[-1,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



폐구간 $[-1,\ 2]$에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를

$g(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}$ $h(x)=\frac{f(x)-|f(x)|}{2}$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점][09.6 평가원-가형 10번][10.]

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to 1} h(x)$는 존재한다.

ㄴ. 함수 $(h\circ g)(x)$는 폐구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0}(g\circ h)(x)=(g\circ h)(0)$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

1. 정답 10

$\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x^3 + x} = 5$에서 $x \to +0$일 때

(분모) → 0이므로 (분자) → 0이다.

따라서 $f(x)$는 삼차함수이면서 삼차항의 계수는 1이다.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$라 놓으면

$$\lim_{x \to +0} \frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x^3 + x} = \lim_{x \to +0} \frac{ax + bx^2 + cx^3}{x^3 + x}$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{cx^2 + bx + a}{x^2 + 1} = a = 5$$

또한 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x^2 + x - 2} = \dfrac{1}{3}$에서 $x \to 1$일 때

(분모) → 0이므로 (분자) → 0이다.

따라서 $f(1) = 0$이므로 $1 + 5 + b + c = 0$에서 $c = -b - 6$이다.

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 5x^2 + bx - (b+6)}{x^2 + x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\{x^2 + 6x + (b+6)\}}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 6x + (b+6)}{x+2} = \frac{b+13}{3} = \frac{1}{3}$$

$\therefore\ b = -12 \quad \therefore\ c = 12 - 6 = 6$

$\therefore\ f(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$

$\therefore\ f(2) = 8 + 20 - 24 + 6 = 10$

2. 정답 ④

$$(\text{주어진 식}) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{1 - \tan x}(e^{\tan x - \sin x} - 1)}{\tan x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(e^{1 - \tan x} \cdot \frac{e^{\tan x - \sin x} - 1}{\tan x - \sin x} \right)$$

$$= e \cdot 1 = e$$

3. 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\Theta} = 2 \cdot 1 \quad \therefore \quad \overline{BC} = 2\sin\Theta$

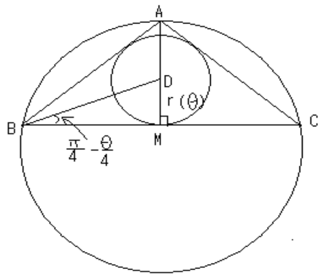
따라서 선분 BC의 중점을 M이라 하면

$\overline{BM} = \sin\Theta$ 이다.

또, 내접원의 중심을 D라고 하면 위 그림의 직각삼각형 BMD에서 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\Theta}{4}\right) = \dfrac{r(\Theta)}{\sin\Theta}$

$$\therefore\ r(\Theta) = \sin\Theta \times \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{4}\right)$$

이때, $\pi - \Theta = t$로 놓으면 $\Theta \to \pi - 0$일 때



$t \to +0$이고 $\sin\Theta = \sin(\pi - t) = \sin t$,

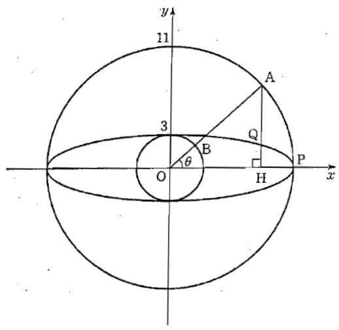
$\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\Theta}{4}\right) = \tan\dfrac{t}{4}$ 이다.

$$\therefore\ (\text{주어진 식}) = \lim_{t \to +0} \frac{\sin t \times \tan\frac{t}{4}}{t^2}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{t \to +0} \frac{\sin t}{t} \times \lim_{t \to +0} \frac{\tan\frac{t}{4}}{\frac{t}{4}} = \frac{1}{4} \times 1 \times 1 = \frac{1}{4}$$

$\therefore\ p^2 + q^2 = 16 + 1 = 17$ 답 17

4. 정답: 27



조건에 의해 $A(11\cos\theta, 11\sin\theta)$, $B(3\cos\theta, 3\sin\theta)$, $P(11, 0)$, $Q(11\cos\theta, 3\sin\theta)$, $H(11\cos\theta, 0)$ 로 놓을 수 있다.

$\overline{AQ} = 8\sin\theta$, $\overline{BQ} = 8\cos\theta$, $\overline{PH} = 11(1 - \cos\theta)$

$\triangle ABQ = S_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AQ} \cdot \overline{BQ} = \dfrac{1}{2} \cdot 8\sin\theta \cdot 8\cos\theta = 16\sin 2\theta$

$\triangle APQ = S_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AQ} \cdot \overline{PH} = \dfrac{1}{2} \cdot 8\sin\theta \cdot 11(1 - \cos\theta)$

$= 44\sin\theta(1 - \cos\theta)$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{S_2}{\theta^2 \cdot S_1} = \frac{44\sin\theta(1 - \cos\theta)}{\theta^2 \cdot 16\sin 2\theta}$$

$$= \frac{11}{16} \cdot \frac{2(1 - \cos\theta)}{\theta^2} \cdot \frac{\frac{\sin\theta}{\theta}}{\frac{\sin 2\theta}{2\theta}} = \frac{11}{16}$$

$\therefore\ p + q = 16 + 11 = 27$

5. 정답 ③

ㄱ. (참) $f(x)=x^2$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot x=1\cdot0=0$$

ㄴ. (참) $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{f(x)}=1$이므로 $f(x)=x$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}=\ln3$$

ㄷ. (거짓) [반례] $f(x)=|x|$이면 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이

지만 $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{e^{|x|}-1}{|x|}\cdot\dfrac{|x|}{x}$에서

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{|x|}-1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=1\cdot1=1$$

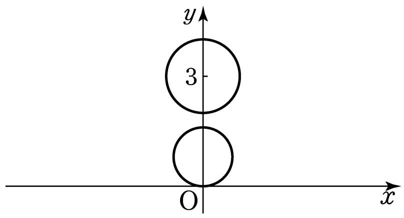
$$\lim_{x\to-0}\frac{e^{|x|}-1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}$$

$$=1\cdot(-1)=-1$$

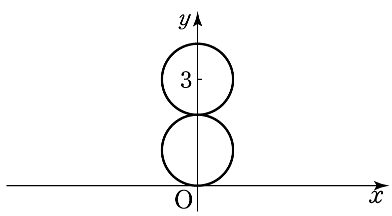
따라서, $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x}$은 존재하지 않는다.

6. 정답 ④

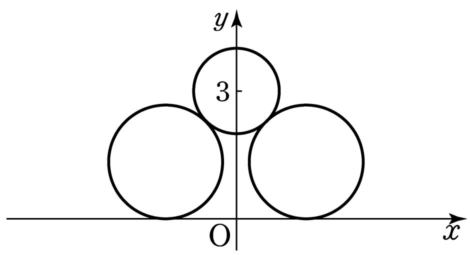
(풀이) i) $0<r<1 \Rightarrow f(r)=0$



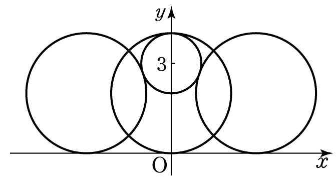
ii) $r=1 \Rightarrow f(r)=1$



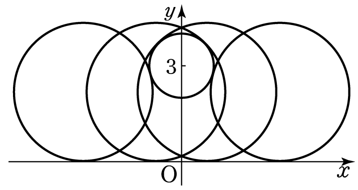
iii) $1<r<2 \Rightarrow f(r)=2$



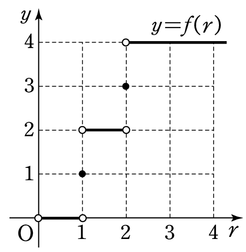
iv) $r=2 \Rightarrow f(r)=3$



iv) $r>2 \Rightarrow f(r)=4$



$$f(r)=\begin{cases}0 & (0<r<1)\\ 1 & (r=1)\\ 2 & (1<r<2)\\ 3 & (r=2)\\ 4 & (r>2)\end{cases}$$



그래프에서

ㄱ. $f(2)=3$

ㄴ. $\lim_{r\to1+0}f(r)=2\neq f(1)=1$

ㄷ. 그래프에서, 구간 (0, 4)에서 불연속점은 2개($r=1$, 2일 때)

7. ㄱ. $f(x)$는 폐구간 [0, 5]에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$, $(f\circ f)(x)$는 모두 폐구간 [0,5]에서 연속이다. 따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 [0, 5]에서 연속이다.

$$\lim_{x\to3-0}g(x)=\lim_{x\to3-0}\{f(x)\}^2=1^2=1$$

$$\lim_{x\to3+0}g(x)=\lim_{x\to3+0}(f\circ f)(x)=\lim_{t\to1-0}f(t)=2$$

$$\therefore \lim_{x\to3-0}g(x)\neq\lim_{x\to3+0}g(x)$$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이므로 폐구간 [0, 5]에서 연속이 아니다.

ㄴ. $f(x)$는 폐구간 [0, 3]에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$는 폐구간 [0, 3]에서 연속이다.

한편, 함수 $f(x)$는 $x\neq4$인 모든 x에서 연속이므로 합성함수 $(f\circ f)(x)$는 $x\neq4$이고 $f(x)\neq4$인 x에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 $x=4$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 [0, 5]에서 연속이다.

(i) $x=3$에서의 연속성

$\lim_{x\to3-0} g(x) = \lim_{x\to3-0}\{f(x)\}^2 = 2^2=4$

$\lim_{x\to3+0} g(x) = \lim_{x\to3+0}(f\circ f)(x) = \lim_{t\to2-0} f(t) = 4$

$g(3)=\{f(3)\}^2=2^2=4$

$\therefore \lim_{x\to3-0} g(x) = \lim_{x\to3+0} g(x) = g(3)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $x=4$에서의 연속성

$\lim_{x\to4-0} g(x) = \lim_{x\to4-0}(f\circ f)(x) = \lim_{t\to+0} f(t)=3$

$\lim_{x\to4+0} g(x) = \lim_{x\to4+0}(f\circ f)(x) = \lim_{t\to1+0} f(t)=3$

$g(4)=f(f(4))=f(0)=3$

$\therefore \lim_{x\to4-0} g(x) = \lim_{x\to4+0} g(x) = g(4)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$는 폐구간 [0, 5]에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)$는 폐구간 [0, 3]에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$는 폐구간 [0, 3]에서 연속이다.

한편, 함수 $f(x)$는 $x\neq4$인 모든 x에서 연속이므로 합성함수 $(f\circ f)(x)$는 $x\neq4$이고 $f(x)\neq4$인 x에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 $x=4$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 [0, 5]에서 연속이다.

(i) $x=3$에서의 연속성

$\lim_{x\to3-0} g(x) = \lim_{x\to3-0}\{f(x)\}^2 = 2^2=4$

$\lim_{x\to3+0} g(x) = \lim_{x\to3+0}(f\circ f)(x) = \lim_{t\to2-0} f(t) = 4$

$g(3)=\{f(3)\}^2=2^2=4$

$\therefore \lim_{x\to3-0} g(x) = \lim_{x\to3+0} g(x) = g(3)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $x=4$에서의 연속성

$\lim_{x\to4-0} g(x) = \lim_{x\to4-0}(f\circ f)(x) = \lim_{t\to+0} f(t)=2$

$\lim_{x\to4+0} g(x) = \lim_{x\to4+0}(f\circ f)(x) = \lim_{t\to1+0} f(t)=3$

$\therefore \lim_{x\to4-0} g(x) \neq \lim_{x\to4+0} g(x)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 불연속이므로 폐구간 [0, 5]에서 연속이 아니다.

이상에서 함수 $g(x)$가 폐구간 [0, 5]에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$의 그래프는 ㄴ이다.

답 ②

8. 답 ④

실수 a에 대하여 주어진 집합의 원소의 개수는 방정식 $ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$의 실근의 개수와 같다.

i) $a=0$일 때,

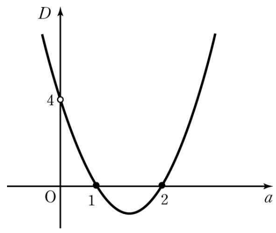
주어진 방정식은 $-4x+2=0$이므로 $x=\frac{1}{2}$

$\therefore f(0)=1$

ii) $a\neq0$일 때,

이차방정식 $ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2+a(a-2)=2(a-1)(a-2)$

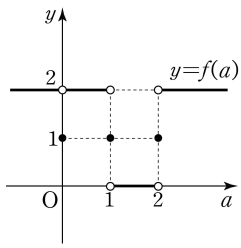


즉, 이 이차방정식은 $a=1$ 또는 $a=2$일 때 중근을 갖고, $1<a<2$일 때 실근을 갖지 않고, $a<1$ 또는 $a>2$일 때 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(1)=f(2)=1$, $1<a<2$일 때 $f(a)=0$,

$a<0$ 또는 $0<a<1$ 또는 $a>2$일 때 $f(a)=2$

i), ii)에 의해서 $y=f(a)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



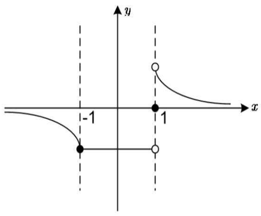
ㄱ. $\lim_{a\to0} f(a)=2$이고 $f(0)=1$이므로 $\lim_{a\to0} f(a)\neq f(0)$ (거짓)

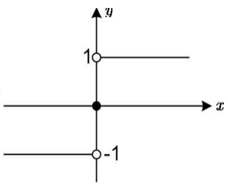
ㄴ. $\lim_{a\to c+0} f(a)\neq \lim_{a\to c-0} f(a)$인 실수 c는 즉, 함수 $f(a)$의 $a=c$에서의 좌극한과 우극한의 값이 서로 다르도록 하는 c는 1, 2의 2개다. (참)

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 $a=0$, 1, 2일 때로 3개다. (참) 따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

9. 정답 90

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x>1)\\ 0 & (x=1)\\ -1 & (-1<x<1)\\ -1 & (x=1)\\ \frac{1}{x} & (x<-1)\end{cases},\quad h(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$





$y=f(x)\cdot g(x)$ 가 연속이므로

$f(1)\cdot g(1)=0$, $\lim_{x\to 1+0} f(x)g(x)=f(1)=0$

$y=f(x)\cdot h(x)$ 가 연속이므로

$f(0)\cdot h(0)=0$, $\lim_{x\to +0} f(x)h(x)=f(0)=0$

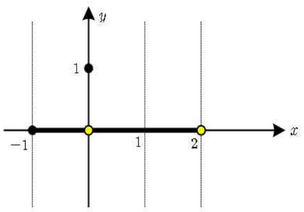
$\therefore\ f(x)=x\cdot(x-1)$

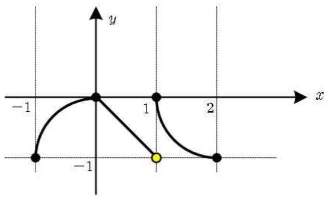
$\therefore\ f(10)=90$

10. 정답 ①

주어진 구간에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를 간단히 하면 $x=0$이면 $f(x)=1>0$

$x\neq 0$이면 $f(x)\leq 0$이므로





$$g(x)=\begin{cases}1 & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0)\end{cases},\quad h(x)=\begin{cases}0 & (x=0)\\ f(x) & (x\neq 0)\end{cases}$$

ㄱ. $\lim_{x\to 1+0} h(x)=0$, $\lim_{x\to 1-0} h(x)=-1$ 이므로

$\lim_{x\to 1} h(x)$를 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. 주어진 구간내의 임의의 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a}(h\circ g)(x)=0$이다.

$(\because\ \lim_{x\to a} g(x)=0,\ \lim_{x\to 0} h(x)=0)$

$$(h\circ g)(a)=\begin{cases}h(0)=0 & (a\neq 0)\ (\because g(a)=0)\\ h(1)=0 & (a=0)\ (\because g(a)=1)\end{cases}$$

$\therefore\ \lim_{x\to a}(h\circ g)(x)=(h\circ g)(a)$

주어진 구간에서 연속이다. (참)

ㄷ. $\lim_{x\to 0}(g\circ h)(x)=0$ $(g\circ h)(0)=g(0)=1$

$\therefore$ $x=0$에서 불연속 (거짓)