2021 기대모의고사 출제 / 해설

김주한 (고려대학교 물리학과 16)
- 前) 강남대성학원 수학 컨텐츠 출제자

공개출판은 처음이지만 시중의 꽤 많은 컨텐츠에 출제 참여해온, 대치에 눌러살기 시작한 전문 수학 컨텐츠 제작자이다. 수험생활의 절박함을 항상 잊지 않고, 수학 컨텐츠는 결국 '점수를 올리기 위한 수단'이라는 생각으로 무엇보다 '실전적이고 실질적인 도움'을 줄 수 있는 컨텐츠를 만들어낼 수 있도록 노력하는 저자이다.

김기대 (고려대학교 수학과)
- 고려대, 서강대 등 5개교 수학과 논술 최초합격
- 매년 한양대, 인하대 등 이공대 수리논술 Final 마감 (입학처가 선정한 모범답안자 배출)
- 2016~2020 기대모의고사

2021 6평 대비 기대모의고사 가형 빠른 정답					
1.	⑤	11.	②	21.	①
2.	①	12.	③	22.	180
3.	③	13.	⑤	23.	30
4.	④	14.	②	24.	40
5.	③	15.	②	25.	7
6.	①	16.	①	26.	125
7.	⑤	17.	④	27.	5
8.	⑤	18.	②	28.	20
9.	④	19.	①	29.	18
10.	④	20.	③	30.	150

출판물은 본 시험보다 수학1 문항의 출제 다양화 (ex.수열 킬러, 사인-코사인법칙 준킬러 등) 및 난이도 강화가 이루어질 예정이며, 21번은 본 시험보다 쉽게 구성될 예정입니다.

1) 정답 : ⑤ 8

$2^6 \times 2^{-3} = 2^{6-3} = 2^3 = 8$

2) 정답 : ① 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n + 3\times 2^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{4^n}{4^n}\right) + 3\times\left(\frac{2^n}{4^n}\right)}{\left(\frac{4^n}{4^n}\right)} = 1$$

3) 정답 : ③ 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{e^{2x}+2x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+4x)}{x}}{\frac{e^{2x}-1}{x}+2} = \frac{4}{4} = 1$$

4) 정답 : ④ 10

$\log ab = 3$에서 $ab = 10^3 = 1000$이고

$\log_2 a = \log_4 b$에서 $b = a^2$이다.

따라서 $a^3 = 1000$에서 $a = 10$, $b = 100$임을 알 수 있고,

정답은 $\frac{b}{a} = 10$이다.

5) 정답 : ③ $\frac{3}{4}$

연속조건에 의해 $e^{b-a} = e^{b^2}$이고

미분가능성 조건에 의해 $e^{b-a} = 2be^{b^2}$이다.

따라서 $e^{b^2} = 2be^{b^2}$에서 $b = \frac{1}{2}$이고,

$e^{b-a} = e^{b^2}$에서 $a = \frac{1}{4}$이다. $\therefore a+b = \frac{3}{4}$

6) 정답 : ① $\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A|B) = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{P}(B) = 2\mathrm{P}(A\cap B)$이고

$\frac{\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cap B)} = 2$에서 $\mathrm{P}(B) = 2\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A) = 3\mathrm{P}(A\cap B)$이다.

따라서 $\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{1}{3}$이다.

7) 정답 : ⑤ $\frac{25}{2}$

sol 1)

등차수열의 성질에 의해 $a_3 + a_4 = a_2 + a_5 = 4$이다.

따라서 $2a_2a_5 = \frac{7}{2}$이므로

$(a_2)^2 + (a_5)^2 = (a_2 + a_5)^2 - 2a_2a_5 = 16 - \frac{7}{2} = \frac{25}{2}$이다.

sol 2)

$a_3 + a_4 = 2a_1 + 5d = 4$이므로 $a_1 = \frac{4-5d}{2}$이다.

$2(a_1+d)(a_1+4d) = \frac{7}{2}$에서 $2\left(2-\frac{3}{2}d\right)\left(2+\frac{3}{2}d\right) = \frac{7}{2}$이고

$4 - \frac{9}{4}d^2 = \frac{7}{4}$, $\frac{9}{4}d^2 = \frac{9}{4}$에서 $d = 1$ $(\because d > 0)$이다.

따라서 $a_1 = -\frac{1}{2}$이고 $(a_2)^2 + (a_5)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$이다.

8) 정답 : ⑤ $\frac{13}{18}$

$a^b \le 4$일 확률을 구한 후 1에서 빼주도록 하자.

$a=1$일 때, b에 관계없이 모두 성립한다.

$a=2$일 때, $b=1$, $b=2$ 인 경우만 가능하다.

$3 \le a \le 4$일 때, $b=1$인 경우만 가능하므로,

총 경우의 수는 $6+2+2=10$이다.

따라서, $a^b \le 4$일 확률은 $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$이므로

정답은 그 여사건의 확률인 $1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$이다.

9) 정답 : ④ 176

$$\sum_{k=1}^{11} (k \times |k-10|)$$

$$= 11 \times |11-10| + \sum_{k=1}^{10} \{k \times (10-k)\}$$

$$= 11 + (550 - 385) \quad \left(\because \sum_{k=1}^{10} k = 55,\ \sum_{k=1}^{10} k^2 = 385\right)$$

$$= 176$$

10) 정답 : ④ 64

$a_3a_5 = (a_4)^2$이므로 $a_4 = 1$.

또한 $\sum_{n=1}^{8} \log_2 a_n = \log_2(a_1a_2\ldots a_8) = 3$이므로 $a_1a_2\ldots a_8 = 8$.

그런데 $a_1a_7 = a_2a_6 = a_3a_5 = (a_4)^2$이므로

$a_1a_2\ldots a_8 = (a_4)^7 \times a_8$이다. 따라서 $a_8 = \frac{8}{1^7} = 8$.

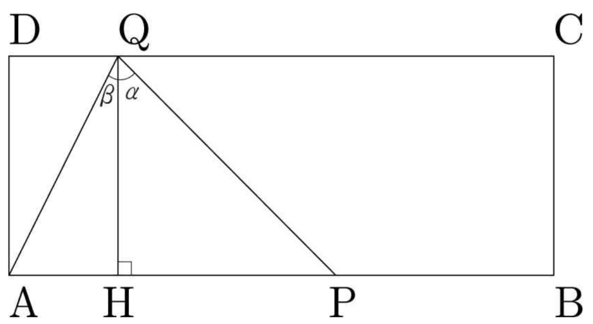
$a_4 = 1$, $a_8 = 8$이므로 공비를 r라 하면 $r^4 = 8$.

따라서 $a_{12} = a_4 \times r^8 = 8^2 = 64$

11) 정답 : ② 2

$\angle AQP$에 대한 $\tan$값이 문제의 조건으로 주어졌는데, 삼각형 AQP는 직각삼각형이 아니므로, 삼각비를 직접적으로 관찰하기 어렵다. 직각삼각형을 만들어 각을 관찰해 보도록 하자.

점 Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\overline{AH}=1$, $\overline{HP}=2$이다.



선분 $\overline{BC}=x$로 두고 $\angle HQP=\alpha$, $\angle AQH=\beta$로 둔 후 삼각형의 덧셈정리를 활용하면, 주어진 조건을 쉽게 사용할 수 있다.

$\tan\alpha=\frac{2}{x}$, $\tan\beta=\frac{1}{x}$이므로 $\tan(\alpha+\beta)=3$으로부터

$$\frac{\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x^2}}=3\text{이다.}$$

이 방정식을 풀면, $x=2\,(\because x>0)$를 얻을 수 있다.
따라서 $\overline{BC}=2$이다.

12) 정답 : ③ 3

$S_n=\frac{3n+1}{n}$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$으로 수렴한다.

즉, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$이 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$이어야 한다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n-a_n}{1+a_n}=\frac{3-0}{1+0}=3$이다.

출제자의 한마디
S_n이 주어졌다고 $S_n-S_{n-1}=a_n$을 무조건 구하고 보는 '기계적 풀이'는 지양하자. 문제에서 묻고 있는 것이 무엇인지 정확히 파악한 후, 필요한 정보만으로 문제들을 풀 수 있도록 훈련하는 것이 중요하다.

13) 정답 : ⑤ $\frac{1}{2}$

점 A와 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하자.
$\overline{PB}=2\overline{PA}$이므로 $\overline{BB'}=2\overline{AA'}$($\because \triangle PAA'$, $\triangle PBB'$은 AA 닮음)
이고, 두 점 A와 B는 곡선 $y=\log_3 x$ 위의 점이므로
점 A의 x좌표를 $a\ (0<a<5)$라 하면 점 B의 x좌표는 a^2이다.
또한 $\overline{PB'}=2\overline{PA'}$이므로 $a^2-5=2(5-a)$이고
$a^2+2a-15=0$, $a^2+2a-15=0$, $(a+5)(a-3)=0$이므로
$a=3$이다.
따라서 점 B의 좌표가 $B(9,\ 2)$이므로 $y=m|x-5|$에서 $2=4m$이고, $m=\frac{1}{2}$이다.

14) 정답 : ② 19

i) 이 주머니에서 0이 적힌 카드를 골랐을 때
0이 적힌 카드 1장, 1이 적힌 카드 2장, 2이 적힌 카드 1장을 갖고 있으므로
네 장의 카드를 임의로 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}$이고 네 자리 자연수를 만들어야 하기 때문에 첫 번째 자리에 0이 오는 경우의 수 $\frac{3!}{2!}$만큼을 빼주면
전체 경우의수 $\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=9$를 구할 수 있다.

ii) 이 주머니에서 1이 적힌 카드를 골랐을 때
1이 적힌 카드 3장, 2이 적힌 카드 1장을 갖고 있으므로
전체 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$이다.

iii) 이 주머니에서 2가 적힌 카드를 골랐을 때
1이 적힌 카드 2장, 2이 적힌 카드 2장을 갖고 있으므로
전체 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$이다.

따라서 세 가지 각각의 경우의 수를 모두 더하면 총 19가지이다.

15) 정답 : ② 10

수열의 귀납적 정의 문제는, 문제의 조건에 맞게 잘 나열하는 게 상책이다. 다만 $n \ge 5$부터는 $\{a_n\}$이 부분적으로 공비가 2인 등비수열을 이룬다는 것은 눈치채주자.

$$a_2 = -a_1 - 5 = -7$$
$$a_3 = a_2 - 5 = -12$$
$$a_4 = -a_3 - 5 = 7$$
$$a_5 = a_4 - 5 = 2$$

이므로 $\sum_{k=1}^{5} a_k = (2)+(-7)+(-12)+(7)+(2) = -8$이고,

$a_6 = 2\times2$, $a_7 = 2\times2\times2$ ⋯ 에서 $a_n = 2^{n-4}$ (단, $n \ge 6$) 이므로

$\sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=6}^{m} a_k = (-8) + (4+8+\cdots+2^{m-4}) > 53$,

$4+8+\cdots+2^{m-4} > 61$인 m을 찾아주면 된다.

$4+8+16+32 = 60 < 61$, $4+8+16+32+64 = 124 > 61$이므로

$m-4=6$, $m=10$일 때 처음으로 문제의 부등식을 만족시킨다.

따라서 정답은 10이다.

16) 정답 : ① $\frac{3}{4}(\pi + 2\sqrt{3} + 2)$

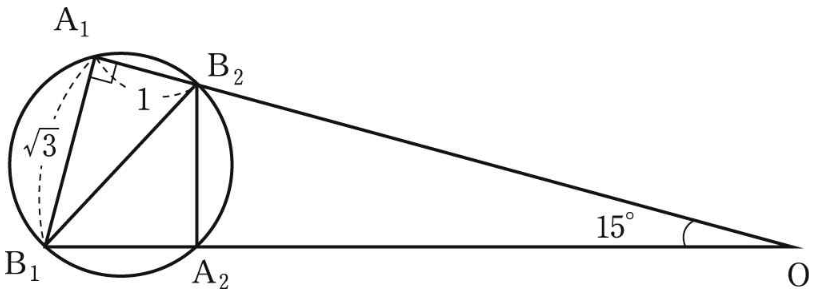
C_1은 B_2와 같은 점으로 문제에서 표현되었으므로, 이 해설에선 C_1을 B_2로 표시하겠다.

$\overline{B_1B_2}$는 원 R_1의 지름이다.

$\overline{B_1B_2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$, 따라서 $\angle A_1B_1B_2 = 30^\circ$이고

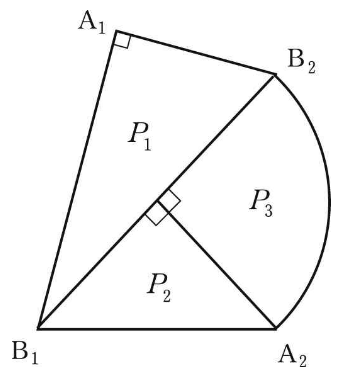
$\angle A_1B_1O = (180-15-90)^\circ = 75^\circ$이므로

$\angle B_2B_1O = (75-30)^\circ = 45^\circ$



따라서 $\overline{B_2A_2} = \overline{B_1A_2} = \sqrt{2}$, 도형 F_1의 넓이는

$P_1 + P_2 + P_3$로 구하면 된다.



$P_1 = 1\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $P_2 = 1\times1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

$P_3 = 1^2\pi\times\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$이므로 $S_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$

한편, 도형 F_1, F_2의 닮음비는 $\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$이므로

넓이비는 3:2이다.

(참고로, 두 삼각형 A_1B_1O, A_2B_2O는 세 각이 90°, 75°, 15°인 직각삼각형으로, AA 닮음이다.)

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}(\pi + 2\sqrt{3} + 2)$

17) 정답 : ③ 12

곡선 $y = 6\sin(nx)$와 직선 $y = n$의 교점에 대하여 n의 범위를 나누어 생각해 보자.

<u>1) $n < 6$일 때</u>

$nx = t$로 치환하면, 본 문제에서 원하는 값은 $0 \le t \le 2n\pi$에서 $6\sin t = n$을 만족하는 t값의 합에 $\frac{1}{n}$을 곱해준 값과 같다. (단순 치환)

$n=1$일 때, 교점이 2개가 나오는데 대칭성에 의해 t값의 총합은 π이다. $n=2$일 때, 교점이 4개가 나오는데 대칭성과 주기성 (3, 4번째 교점의 x좌표는 은 1, 2번째 교점들의 x좌표에 비해 각각 2π씩 큼) 에 의해 t값의 총합은 $\pi + (\pi + 4\pi)$이다.

마찬가지 방식으로 $n = k$ (단, $1 \le k \le 5$) 일 때,

t값의 총합은 $\sum_{i=1}^{k} (\pi + 4(i-1)\pi) = 2\pi k^2 - \pi k$이다.

따라서 x값의 총합은 $2\pi k - \pi$이고 이 값이 6π 이하여야 하므로 가능한 k는 $k = 1, 2, 3$뿐이다.

<u>2) $n = 6$일 때</u>

$6x = t$로 치환하면, 본 문제에서 원하는 값은 $0 \le t \le 12\pi$ 에서 $6\sin t = 6$, 즉 $\sin t = 1$을 만족하는 t를 모두 더한 후 $\frac{1}{6}$을 곱해주면 모든 교점의 x좌표들의 합을 구할 수 있다.

$$t=\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+2\pi,\ \frac{\pi}{2}+4\pi,\ \cdots,\ \frac{\pi}{2}+10\pi$$

이고 이 모든 t값의 총합은 33π이다. 이를 6으로 나누면 모든 x좌표의 합이다. 따라서 이 경우 역시 모든 x좌표의 합인 $\frac{33}{6}\pi=\frac{11}{2}\pi$가 6π 이하이므로 $n=6$일 때도 성립한다.

3) $n>6$일 때
곡선 $y=6\sin(nx)$와 직선 $y=n$의 교점이 존재하지 않는다.

따라서 가능한 모든 n은 $n=1,\ 2,\ 3,\ 6$이고 이들의 합은 12이다.

18) 정답 : ② $\frac{40}{3}$

<(가) 해석>
$ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(5,\ 1),\ (4,\ 1),\ (3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 1),$
$(1,\ 5),\ (1,\ 4),\ (1,\ 3),\ (1,\ 2),\ (1,\ 1)$

로 총 10개이고, $(5,\ 1),\ (1,\ 5)$일 때 $a+b$는 최댓값 6을 갖는다. 따라서 $p=6$이다.

$a+b$의 최댓값이 6이고, 문제 조건에서 n은 7 이상의 자연수이기 때문에 자연스럽게 $a+b\le n$를 항상 만족시킬 수밖에 없음을 확인하자.

<(나) 해석>
$a,\ b$는 자연수이고, c는 음이 아닌 정수이므로
$a=a'+1,\ b=b'+1$로 두면 $a+b+c=a'+b'+c+2=n$에서
$a'+b'+c=n-2$이다.
이를 만족시키는 순서쌍 $(a',\ b',\ c)$의 개수는
${}_3\mathrm{H}_{n-2}={}_n\mathrm{C}_{n-2}={}_n\mathrm{C}_2$이다. $\therefore f(n)=\frac{n(n-1)}{2}$

<(다) 해석>
조건부확률에 의하여
$g(n)=\frac{10}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{20}{n(n-1)}$이다.
(10은 $ab<6$를 만족시키는 자연수 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 뜻한다.)

따라서 $f(p+2)\times g(p+1)=f(8)\times g(7)=28\times\frac{10}{21}=\frac{40}{3}$이다.

출제자의 한마디
보통 '확률에서는 중복조합을 쓰면 안된다.' 는 말을 많이 들었을 것이다. 하지만, 각각 근원사건의 확률이 같은 경우, 중복조합으로 구한 경우의 수로도 확률을 구할 수 있다.
근원사건이 기대되는 정도가 같은 경우, 어떤 방법을 쓰든 상관이 없다.

19) 정답 : ① 108

<문제 접근>

자연수 a를 b로 나눈 몫과 나머지는 유일하게 결정된다.
예를 들면, $14=4\times3+2$이므로 몫과 나머지는 각각 3, 2 이다. $14=4\times2+6$으로도 표현은 되지만, 몫과 나머지를 2, 6이라고는 하지 않는다. 나머지는 $b(=4)$보다 작은 음이 아닌 정수여야 하기 때문이다.
이를 거꾸로 말하면, 몫과 나머지를 정하면 그 수가 역으로 결정된다는 것과 같다. 예를 들어, 4로 나눈 몫과 나머지가 각각 3, 2인 수는 14이다. 이 14를 다른 (몫, 나머지) 순서쌍으로 표현할 수 없기 때문에 몫과 나머지를 정하는 것과 그 수를 정하는 것은 정확히 일대일대응이 된다. 이러한 기본 생각을 갖고 문제에 접근해보자.

<문제 해설>

나머지에 대한 조건이 주어졌으므로, 나머지의 합에 집중해서 보자.

각각 $x,\ y,\ z$의 나머지의 합이 얼마가 되어야 하는지 알아보자. $x+y+z=26$ 인데, 26을 4로 나눈 나머지는 2이므로, $x,\ y,\ z$의 각각의 나머지의 합 역시 $4k+2$꼴이어야 한다. (k는 음이 아닌 정수)

하지만 (나) 조건에 의하면, $4k+2\le5$이므로, 가능한 음이 아닌 정수 k는 $k=0$뿐이다.
따라서, $x,\ y,\ z$의 나머지의 합이 반드시 2가 되어야 한다.

4로 나눈 나머지가 될 수 있는 0, 1, 2, 3 들의 합으로 2를 만드는 $x,\ y,\ z$의 집합은 $\{0,\ 1,\ 1\},\ \{2,\ 0,\ 0\}$뿐이다.

1) $\{0,\ 1,\ 1\}$인 경우
$x=4a,\ y=4b+1,\ z=4c+1$ 라 두자.
(a는 자연수, $b,\ c$는 음이 아닌 정수이다. a만 자연수인 이유는 $x,\ y,\ z$가 자연수여야 하는데 x엔 나머지가 없어서 몫이 자연수여야 하기 때문이다.)

이렇게 구한 경우의 수에 나머지가 0일 문자를 $x,\ y,\ z$ 중 골라주는 ${}_3\mathrm{C}_1$을 곱하면 된다.

따라서 $4a+(4b+1)+(4c+1)=26$ (a는 자연수, $b,\ c$는 음이 아닌 정수)를 만족하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하자.
$4a+(4b+1)+(4c+1)=26$에서 $4(a+b+c)=24$이고
$a+b+c=6$이므로 이를 만족하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
${}_3\mathrm{H}_{6-1}=21$이다.

따라서 1)의 경우의 수는 총 $21\times3=63$이다.

2) $\{2,\ 0,\ 0\}$인 경우

$x=4X+2,\ y=4Y,\ z=4Z$
(X는 음이 아닌 정수, $Y,\ Z$는 자연수)
로 두고, 마찬가지로 이렇게 구한 경우의 수에 나머지가 2일 문자를 x,y,z 중 골라주는 ${}_3\mathrm{C}_1$을 곱하면 된다.

1)에서와 마찬가지의 논리로
$X+Y+Z=6$ (X는 음이 아닌 정수, $Y,\ Z$는 자연수)를 만족하는 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z)$의 개수를 구하면 ${}_3\mathrm{H}_{6-2}=15$이다.

따라서 2)의 모든 경우의 수는 $15\times3=45$이다.

1)과 2)에 의해, 총 경우의 수는 $45+63=108$이다.

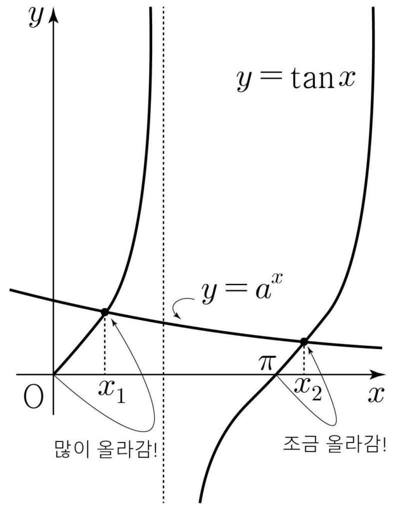
출제자의 한마디
$x+y+z=26$이고, 26은 4로 나눈 나머지가 2이므로 (나) 조건이 꼭 필요한 것이냐고 묻는 학생들이 있을 수 있다. 하지만 $x+y+z$를 4로 나눈 나머지는 2가 아닌 6이 될 수 도 있다. $(x,\ y,\ z)=(11,\ 11,\ 4)$를 확인해보면 나머지의 합이 6이다. 하지만 이를 더한 $x+y+z$의 나머지는 4 이상이 되면 안되므로 이 6을 다시 한 번 4로 나눠서 나머지 2를 맞춰주는 것이다.

20) 정답 : ③ ㄱ, ㄷ

두 곡선 $y=a^x\cos x\,(0\le x\le 2\pi)$, $y=\sin x$의 교점의 x좌표 $x_1,\ x_2$는 다음 방정식의 해이다.

$$a^x\cos x=\sin x \quad\Rightarrow\quad a^x=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$$

따라서 $x_1,\ x_2$는 두 곡선 $y=a^x,\ y=\tan x\,(0\le x\le 2\pi,\ \cos x\ne 0)$의 두 교점의 x좌표와 같으므로 $a^{x_1}=\tan x_1$이다.



ㄱ.
$0<a<1$이므로 $0<x<2\pi$인 모든 실수 x에 대하여 $0<a^x<1$이다. 따라서 $a^{x_1}=\tan x_1<1=\tan\frac{\pi}{4}$이므로 $0<x_1<\frac{\pi}{4}$이다.
(참)

ㄴ.
먼저, 문제에 등장하는 $y_1,\ y_2$는 위 그림에 찍힌 두 점의 y좌표가 아님에 유의하자.

ㄴ으로부터 $0<x_1<\frac{\pi}{4}$임을 알았고, 위 그림으로부터
$\pi<x_2<x_1+\pi$임을 알 수 있다.
$y_2=\sin x_2$의 값이 음수임을 부등식 $\pi<x_2$으로부터 알 수 있고,
$y_1=\sin x_1$의 절댓값이 $y_2=\sin x_2$의 절댓값보다 큼을
부등식 $x_2<x_1+\pi$으로부터 알 수 있다.
따라서 $y_1+y_2>0$이다. (거짓)

ㄷ.
$x_2<x_1+\pi$ 으로부터 $x_2-x_1<\pi$이다.
$0<x_1<\frac{\pi}{4}$이므로 $\sin x_1=y_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$이고,
$|\sin x_2|=|y_2|<|y_1|<\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로
$-\frac{\sqrt{2}}{2}<y_2,\ -y_2<\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.
따라서 $y_1-y_2<\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$이고, $(x_2-x_1)(y_1-y_2)<\sqrt{2}\pi$이다. (참)

21) **정답** : ① $\frac{\ln 2}{2}$

우선, 이 문제를 풀기에 앞서 $x=0$, $x=k$, $x=4$에서 최대, 최소임을 다시 한 번 파악하고 넘어가자.
(최대, 최소란 뜻은 극대, 극소라는 의미도 포함하지만 그 역은 아니므로 동치가 아니다! 더 많은 정보를 담고 있으므로, 극대-극소 조건만 쓸 경우 문제풀이에 애를 먹을 수 있다.
이는 *2nd step*에서 확인해보자.)

1st step)
$f(e^{f(x)})$를 미분하면 $f'(e^{f(x)})f'(x)e^{f(x)}$이고,
$x=0$, $x=k$, $x=4$에서 최대 또는 최소이므로
$x=0$, $x=k$, $x=4$에서 미분계수가 0이어야 한다.
따라서 세 등식

$$f'(e^{f(0)})f'(0)=0,\ f'(e^{f(4)})f'(4)=0,\ f'(e^{f(k)})f'(k)=0$$

을 만족시킨다.

$f(x)$는 이차함수이므로 $f'(x)=0$이 되도록 하는 실수 x는 하나만 존재하고 어떤 실수 n에 대하여 $f(x)=n$이 되도록 하는 실수 x는 최대 두 개까지 존재할 수 있으므로
결국 $f(e^{f(x)})$는 최대 세 개의 극값만을 가질 수 있다.
따라서 $x=0$, $x=k$, $x=4$에서만 극대 또는 극소이다.

따라서

$f'(0)=0$일 때, $e^{f(4)}=e^{f(k)}=0$
$f'(k)=0$일 때, $e^{f(0)}=e^{f(4)}=k$
$f'(4)=0$일 때, $e^{f(0)}=e^{f(k)}=4$

의 세 경우가 존재한다.

첫 번째 경우는 $e^{f(x)}>0$이므로 $e^{f(4)}=e^{f(k)}=0$일 수 없으므로 가능한 경우가 아니다.

세 번째 경우인 $e^{f(0)}=e^{f(k)}=4$인 경우,
$f(e^{f(x)})$는 $x=0$, $x=k$, $x=4$에서만 극대 또는 극소이고
$0<k<4$이므로 함수 $f(e^{f(x)})$는 $x=0$에서 극대, $x=k$에서 극소이거나 $x=0$에서 극소, $x=k$에서 극대이다.
그런데 $f(e^{f(0)})=f(e^{f(k)})=f(4)$이므로
$x=0$에서 극대, $x=k$에서 극소이거나
$x=0$에서 극소, $x=k$에서 극대일 수 없다.
따라서 가능한 경우가 아니다.

결국 두 번째 경우인 $f'(k)=0$, $e^{f(0)}=e^{f(4)}=k$,
즉 $f'(k)=0$, $f(0)=f(4)=\ln k$인 경우만이 가능하다.

$f(0)=f(4)=\ln k$을 이용하여

$$f(x)=ax(x-4)+\ln k\ \ (a\neq 0)$$

라 하면, $f'(x)=2a(x-2)$, $f'(k)=2a(k-2)$이다.
따라서 $f'(k)=0$에서 $k=2$이고, $f(x)=ax(x-4)+\ln 2$이다.

2nd step)

함수 $y=f(e^{f(x)})$가 최댓값과 최솟값을 모두 가지기 위해서는 $\lim_{x\to\infty}f(e^{f(x)})$와 $\lim_{x\to-\infty}f(e^{f(x)})$가 모두 수렴해야한다.
($\pm\infty$로 발산한다면 최댓값, 최솟값을 갖지 않겠죠?)
$f(x)$의 최고차항이 양수일 때, $\lim_{x\to\pm\infty}e^{f(x)}$는 양의 무한으로 발산하므로 $\lim_{x\to\pm\infty}f(e^{f(x)})$ 또한 발산하여 조건을 만족시키지 못한다.
$f(x)$의 최고차항이 음수일 때, $\lim_{x\to\pm\infty}e^{f(x)}=0$이므로
$\lim_{x\to\pm\infty}f(e^{f(x)})=f(0)=\ln 2$으로 조건을 만족시킨다.
따라서 $a<0$.

3rd step)

문제에서 $x=0$, 4에서 최대 또는 최소라고 했는데
$x=0$, 4에서의 함숫값이

$$f(e^{f(0)})=f(e^{f(4)})=f(2)=-4a+\ln 2>\ln 2\ \ (\because a<0)$$

에서 $\lim_{x\to\pm\infty}f(e^{f(x)})=\ln 2$의 값보다 크므로
$f(e^{f(x)})$는 $x=0$, 4에서 최솟값이 아니라, 최댓값 $-4a+\ln 2$를 갖는다.

따라서 $f(e^{f(x)})$는 $x=2$에서 최솟값을 가지며,
$f(e^{f(2)})$의 값은 $\lim_{x\to\pm\infty}f(e^{f(x)})=\ln 2$보다 작거나 같아야 한다.

$$f(e^{f(2)})=f(e^{-4a+\ln 2})=f(2e^{-4a})\le \ln 2$$

를 정리하면 $4ae^{-8a}-8ae^{-4a}\le 0$이 되고,
$a<0$이므로 $4a$를 양변에서 나눠 정리하면 $a\le-\frac{\ln 2}{4}$.
$f'(1)=-2a$이므로 이것의 최솟값은 $\frac{1}{2}\ln 2$.

22) **정답** : 180

x가 8번, $\frac{2}{x^4}$이 2번 선택되면 되므로

$${}_{10}C_2\times x^8\times\left(\frac{2}{x^4}\right)^2=180\text{이다.}$$

23) 정답 : 30

꺼낸 공에 1이 적힌 공이 있는 사건을 A,
꺼낸 공에 6이 적힌 공이 있는 사건을 B라 하자.

A 또는 B일 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$로 구할 수 있다. 따라서 $p=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_1-{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$,

$50p=30$이다.

24) 정답 : 40

$f'(x)=2x+4\sin x$, $f''(x)=2+4\cos x$에서,

$f''(a)=2+4\cos a=0$, $\cos a=-\dfrac{1}{2}$이므로

곡선 $f(x)=x^2-4\cos x\ (0<x<\pi)$는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$에서 변곡점을 갖는다. 따라서 $\dfrac{2}{3}\pi\times\dfrac{60}{\pi}=40$이다.

25) 정답 : 7

곡선 $y=2^{x+a}-b$ 위의 점 중 y축 위에 있는 점 $(0,\ 2^a-b)$를 생각해보면 우상향하는 그래프의 특성상 이 점이 $y<0$인 영역에 포함되어야 제2사분면을 제외한 모든 사분면을 지날 수 있다.

마찬가지로 곡선 $y=3^{-x+a}-b$ 위의 점 중 y축 위에 있는 점 $(0,\ 3^a-b)$를 생각해보면 우하향하는 그래프의 특성상 이 점이 $y>0$인 영역에 포함되어야 제3사분면을 제외한 모든 사분면을 지날 수 있다.
<u>(참고) x, y축은 어느 사분면에도 포함되지 않는다.</u>

따라서 $2^a<b<3^a$를 만족해야 하므로 $a=2$, $b=5$일 때 $a+b$의 값이 최소이다. 따라서 $a+b$의 최솟값은 7이다.

26) 정답 : 125

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선의 방정식은
$f(0)=2$이고 $f'(x)=(x^2+2x+2)e^x$에서 $f'(0)=2$이므로
$y=2x+2$이다. $\cdots$ ①
따라서 $g(x)=2x+2$이고 $f(g(x))=f(2x+2)$이다.

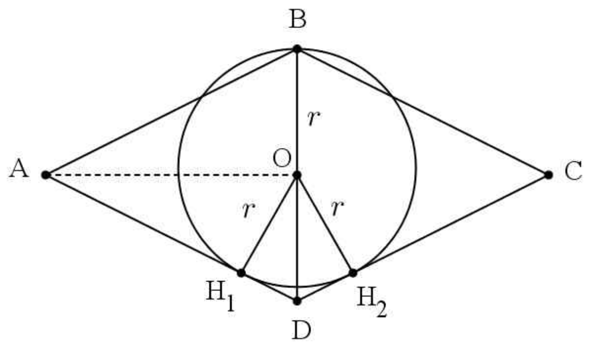
함수 $f(2x+2)$의 역함수 $h(x)$에 대하여 항상 $f(2h(x)+2)=x$가 성립한다. $h(2)=a$이므로 $f(2a+2)=2$인데 ①에서 $f(0)=2$이고 $f(x)$는 일대일대응 ($\because$역함수가 존재)이므로 $2a+2=0$일 수 밖에 없다. 따라서 $a=-1$이다.

곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(2,\ a)$에서의 접선의 기울기는
$h'(2)$이므로 역함수 미분법에 의해

$h'(x)=\dfrac{1}{2f'(2h(x)+2)}$에서 $h'(2)=\dfrac{1}{2f'(0)}=\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 $b=\dfrac{1}{4}$이므로 $100(b-a)=100\times\dfrac{5}{4}=125$이다.

27) 정답 : 5



(참고로, 원의 중심 O는 마름모의 대각선의 중점이 아니다.
즉, 위 그림에서 $\angle$AOB가 직각이라는 착각을 해선 안 된다는 것이다.)

삼각형 BAD에서 $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BCD}=\theta$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=2\times\sin\dfrac{\theta}{2}$이고 $\angle\mathrm{BDA}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$임을 알 수 있다.

또한 삼각형 $\mathrm{OH_1D}$에서 $\overline{\mathrm{OD}}=r\sec\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$임을 알 수 있다.

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BO}}+\overline{\mathrm{OD}}$이므로 $2\sin\dfrac{\theta}{2}=r\left(1+\sec\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$임을 알 수 있다.

여기서, 양변을 θ로 나누고 $\theta\to0+$ 극한을 취해주면 $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{r}{\theta}=\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.
선분 DE의 길이인 $l(\theta)$는 $\overline{\mathrm{OD}}-r$이고,
따라서 $l(\theta)=r\left(\sec\left(\dfrac{\theta}{2}\right)-1\right)$이다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{l(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{r}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}{\theta^2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{16}\text{이다.}$$

(물론 $2\sin\dfrac{\theta}{2}=r\left(1+\sec\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$을 r에 대하여 정리한 후

$l(\theta)=r\left(\sec\left(\dfrac{\theta}{2}\right)-1\right)$에 대입해줘도 된다.)

따라서 정답은 5이다.

(극한 계산법)

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}{\theta^2\left(\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)+1\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^2\left(\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)+1\right)}=\frac{1}{8}\ .$$

28) **정답** : 20

'총합이 8 이상일 때, 빨간 공을 적어도 하나 골랐을 확률'은 1에서 '총합이 8 이상일 때, 파란 공만 골랐을 확률'을 빼서 구할 수 있다(여사건의 확률). 따라서 총합이 8 이상일 때 파란 공만 골랐을 확률을 구하자.

먼저 8개의 공 중 3개의 공을 꺼냈을 때, 꺼낸 공에 적혀있는 숫자의 '총합이 8 이상일 경우의 수'를 구하기 위해, 그 여사건인 '총합이 8 미만일 경우의 수'를 구하자.

총합이 8 미만인 모든 경우는 공의 조합이

$(1,\ 2,\ 2),\ (1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 3,\ 3),\ (2,\ 2,\ 3)$

이 되도록 고른 경우이다. 이 경우들에서는 색깔을 정하지 않은 상태이므로, 색을 결정시켜주면 케이스에서 나올 수 있는 경우의 수는 각각

$(1\times1\times1),\ (1\times2\times2),\ (1\times2\times2),\ (1\times1\times1),\ (1\times1\times2)$

이므로 총합이 8 미만인 모든 경우의 수는 $1+4+4+1+2=12$가지이다.

따라서 8개의 공 중 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_8C_3=56$이므로 총합이 8 이상일 경우의 수는 $56-12=44$이다.

이제 8개의 공 중 3개의 공을 꺼냈을 때, 꺼낸 공에 적혀있는 숫자의 '총합이 8 이상이면서 파란공만 뽑을 경우의 수'를 구하자.

파란공만 뽑을 경우의 수는 ${}_5C_3=10$이고,
그 중 총합이 8 미만이 되는 경우는

$(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 2,\ 4)$

2가지가 있으므로, '총합이 8 이상이면서 파란공만 뽑을 경우의 수'는 $10-2=8$가지이다.

따라서 '총합이 8 이상일 때, 파란 공만 골랐을 확률'은
$\dfrac{{}_5C_3-2}{{}_8C_3-12}=\dfrac{8}{44}=\dfrac{2}{11}$이므로 그 여사건의 확률인
'총합이 8 이상일 때, 빨간 공을 적어도 하나 골랐을 확률'은
$1-\dfrac{2}{11}=\dfrac{9}{11}$이고, $p+q=20$이다.

29) **정답** : 18

문제에서 구하려는 것이 사각형 ABCD의 둘레이므로, 네 변을 모두 구해야할 것 같다.
먼저 눈에 띄는 것은 선분 AB. 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AB}=5$이다. 여기서 $\angle ABP=\theta$라 하면 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$, $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$이고
$\angle ABC=90^\circ+\theta$이다.

길이 정보와 각 정보가 있는 삼각형 ABC 부터 보자. 삼각형 ABC의 외접원 O의 반지름의 길이는 $\sqrt{\dfrac{25}{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$이므로
사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin(90^\circ+\theta)}=5\sqrt{2}$임을 알 수 있다.
$\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$이므로 $\overline{AC}=4\sqrt{2}$이다.
또한 $\angle APB=\angle PBC=90^\circ$ 이므로 점 A에서 선분 BC의 연장선에 수선의 발 H를 내려 삼각형 AHC에서 피타고라스 정리를 사용하면 $\overline{CH}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-4^2}=4$, $\overline{BC}=4-3=1$임을 알 수 있다.

한편 사각형 ABCD는 원에 내접한 사각형이므로
$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=90^\circ-\theta$이다.

사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구해야 하므로 $\overline{DC}=a$, $\overline{DA}=b$라 하자.
a, b를 각각 구할 수 있다면 좋겠지만 우리의 목표는 $a+b$를 구하는 것이므로 이를 통째로 구해야 할 수 도 있겠다는 생각을 반드시 갖고 있어야 한다.

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여
$a^2+b^2-2ab\times\cos(90^\circ-\theta)=32$ 이므로
$a^2+b^2-\dfrac{6}{5}ab=32$ 이다. ⋯ ①
또한 (다) 조건에 의하여 $\dfrac{1}{2}ab\sin(90^\circ-\theta)=14$, $ab=35$이다. ⋯ ②

①에 ②를 적용하면 $a^2+b^2=74$, $ab=35$이다. 이 둘을 연립하면 a, b를 $(5,7)$ 따위로 구할 수 있겠으나 앞서 말했듯이 문제의 목표는 둘레의 길이를 구하는 것이므로 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ 공식을 활용해주는 것이 좋은 센스이다.

$(a+b)^2=74+70=144$로부터 $a+b=12$이고 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=1$
이므로 정답은 $12+5+1=18$ 이다.

30) 정답 : 150

(가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=\sin(\pi x)$이므로
두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 실근은 정수이다.

- $k=1$일 때, $f(1)+f(2)=0$이다.

$f(1)\neq 0$, $f(2)\neq 0$인 경우,
$f(2)=-f(1)$이고 $f(x)$는 연속함수이므로
열린구간 $(1, 2)$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 적어도 하나 존재한다. 그런데 방정식 $f(x)=0$의 실근은 정수이므로 모순이다.
따라서, $f(1)=f(2)=0$이다.

- $k=2$일 때, $f(2)+f(4)=0$이다.

$f(2)=0$이므로, $f(4)=0$이다. 마찬가지로, $k=4$일 때 먼저 살펴보면

- $k=4$일 때, $f(4)+f(8)=0$이다.

$f(4)=0$이므로, $f(8)=0$이다.
따라서, $f(1)=f(2)=f(4)=f(8)=0$이다.

- $k=3$일 때, $f(3)+f(6)=0$이다.
- $k=5$일 때, $f(5)+f(10)=0$이다.

$g(10)=0$일 때,

$$f(10)=\lim_{x\to 10}\frac{\sin(\pi x)}{g(x)}\neq 0$$

이다. 이제 $f(10)=-f(5)$에서 $f(x)$는 연속함수이므로 열린구간 $(5, 10)$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 적어도 하나 존재한다. 이때 $f(8)=0$이므로 모순되는 상황은 아니다.

또, $f(5)\neq 0$인데 $f(x)g(x)=\sin(\pi x)$에서
$f(5)g(5)=0$이므로 $g(5)=0$이다.
따라서 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $p(x)$에 대하여

$$g(x)=(x-5)(x-10)p(x)$$

라 둘 수 있다.

이제 $f(3)+f(6)=0$에서
$f(3)\neq 0$, $f(6)\neq 0$인 경우, $f(x)g(x)=\sin(\pi x)$에서
$f(3)g(3)=0$, $f(6)g(6)=0$이므로 $g(3)=g(6)=0$이다.

따라서 $p(x)=(x-3)(x-6)$이 되어

$$g(x)=(x-3)(x-5)(x-6)(x-10)$$

이다. $f(x)$는 연속함수이므로, $f(3)$과 $f(6)$의 값을 각각 구하면

$$f(6)=\lim_{x\to 6}\frac{\sin(\pi x)}{(x-3)(x-5)(x-6)(x-10)}=-\frac{\pi}{12}$$

$$f(3)=\lim_{x\to 3}\frac{\sin(\pi x)}{(x-3)(x-5)(x-6)(x-10)}=\frac{\pi}{42}$$

이다. 그런데 이때 $f(6)\neq -f(3)$이므로 모순이다.
따라서 $f(3)=f(6)=0$이다.
이제 $f(x)$는 연속함수이므로, $f(5)$와 $f(10)$의 값을 각각 구하면

$$f(10)=\lim_{x\to 10}\frac{\sin(\pi x)}{(x-5)(x-10)p(x)}=\frac{\pi}{5\times p(10)}$$

$$f(5)=\lim_{x\to 5}\frac{\sin(\pi x)}{(x-5)(x-10)p(x)}=\frac{-\pi}{(-5)\times p(5)}$$

이다. 이때 $f(10)=-f(5)$이므로 $p(10)=-p(5)$이다.
이제 마찬가지로, $p(10)=-p(5)$이고 $p(x)$는 연속함수이므로
열린구간 $(5, 10)$에서 방정식 $p(x)=0$의 실근이 적어도 하나 존재한다. 이때 실근 x는 정수여야 하므로 가능한 x의 값은 $6, 7, 8, 9$이다.

그런데 $p(8)=0$인 경우, $g(8)=0$이므로
$f(8)=\lim_{x\to 8}\frac{\sin(\pi x)}{g(x)}\neq 0$이 되어 $f(8)=0$에 모순이다. …… ①
마찬가지로, $f(6)=0$이므로 실근 x로 6도 가능하지 않다.
따라서 가능한 x의 값은 7 또는 9이다.

먼저 7을 실근으로 갖는 경우를 생각하자. $p(7)=0$이므로

$$p(x)=(x-7)(x-a)\ (\text{단, } a\text{는 정수})$$

이다. 이때, $p(10)=-p(5)$에서 $3(10-a)=2(5-a)$, $a=20$이다.

이제 9를 실근으로 갖는 경우를 생각하자. $p(9)=0$이므로

$$p(x)=(x-9)(x-a)\ (\text{단, } a\text{는 정수})$$

이다. 이때, $p(10)=-p(5)$에서 $10-a=-(-4)\times(5-a)$,
$a=\frac{10}{3}$이다. a가 정수가 아니므로 모순이다.

따라서 가능한 경우는 $g(x)$가
$g(x)=(x-5)(x-7)(x-10)(x-20)$인 경우뿐이다.
이때, $\sum_{k=1}^{5}f(k)=f(5)=\frac{\pi}{150}$이다.