02 지수함수와 로그함수

유제 본문 23~31쪽

1 ③	2 34	3 ③	4 ①	5 29
6 ②	7 8	8 ②	9 ②	10 5

1 세 함수 $f(x)=3^{2x}$, $g(x)=\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{x}{2}}$, $h(x)=(2a-3)^x$의 그래프에서

$g(1)<h(1)<f(1)$

이때 $f(1)=3^2=9$, $g(1)=\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$, $h(1)=2a-3$

이므로

$\frac{3}{2}<2a-3<9$

$\frac{9}{4}<a<6$ …… ㉠

따라서 부등식 ㉠을 만족시키는 자연수 a는 3, 4, 5로 그 개수는 3이다.

답 ③

2 세 점 A, B, C의 좌표는 각각

$\left(0, \frac{1}{a}\right)$, $(1, a)$, $(1, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AO}}=\frac{1}{a}$, $\overline{\mathrm{OC}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$

사각형 AOCB는 사다리꼴이고, 그 넓이가 3이므로

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{a}+a\right)\times1=3$

$a+\frac{1}{a}=6$

따라서

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$$
$$=6^2-2$$
$$=34$$

답 34

3 함수 $f(x)=a\times3^{2-x}+b=9a\times\left(\frac{1}{3}\right)^x+b$에서

$0<(\text{밑})=\frac{1}{3}<1$이고, $a>0$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 함수 $f(x)=a\times3^{2-x}+b$는

$x=0$일 때 최댓값을 갖고,

$x=2$일 때 최솟값을 갖는다.

$f(0)=4$에서 $a\times3^2+b=4$, 즉

$9a+b=4$ …… ㉠

$f(2)=0$에서 $a\times3^0+b=0$, 즉

$a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

따라서

$$f(x)=\frac{1}{2}\times3^{2-x}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3^{2-x}-1}{2}$$

이므로

$f(1)=\frac{3^1-1}{2}=1$

답 ③

4 함수 $f(x)=2^x+1$에서 (밑)$=2>1$이므로

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값을 갖고,

$x=0$일 때 최솟값을 갖는다.

$M=f(2)=2^2+1=5$, $m=f(0)=2^0+1=2$ …… ㉠

(i) $b>1$일 때

함수 $g(x)=a-\left(\frac{1}{b}\right)^x$에서 $0<(\text{밑})=\frac{1}{b}<1$이므로

x의 값이 증가하면 $\left(\frac{1}{b}\right)^x$의 값은 감소하고 $-\left(\frac{1}{b}\right)^x$의 값은 증가한다.

따라서 함수 $g(x)$는 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값도 증가한다.

그러므로 함수 $g(x)$는 $x=2$일 때 최댓값을 갖고,

$x=0$일 때 최솟값을 갖는다.

$$-m=g(2)$$
$$=a-\left(\frac{1}{b}\right)^2$$
$$-M=g(0)$$
$$=a-\left(\frac{1}{b}\right)^0$$

㉠에 의하여

$a-\frac{1}{b^2}=-2$ …… ㉡

$a-1=-5$ …… ㉢

㉢에서 $a=-4$이므로 ㉡에 대입하면

$b^2=-\frac{1}{2}$

이때 실수 b의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $0<b<1$일 때

함수 $g(x)=a-\left(\frac{1}{b}\right)^x$에서 (밑)$=\frac{1}{b}>1$이므로 x의 값이 증가하면 $\left(\frac{1}{b}\right)^x$의 값은 증가하고, $-\left(\frac{1}{b}\right)^x$의 값은 감소한다.

따라서 함수 $g(x)$는 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값은 감소한다.

그러므로 함수 $g(x)$는 $x=0$일 때 최댓값을 갖고, $x=2$일 때 최솟값을 갖는다.

$-m=g(0)$

$=a-\left(\frac{1}{b}\right)^0$

$-M=g(2)$

$=a-\left(\frac{1}{b}\right)^2$

㉠에 의하여

$a-1=-2$ ...... ㉣

$a-\frac{1}{b^2}=-5$ ...... ㉤

㉣에서 $a=-1$이므로 ㉤에 대입하면

$b^2=\frac{1}{4}$

이때 $0<b<1$에서

$b=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서

$a+b=-1+\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}$

답 ①

5 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-1}+b$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=\left(\frac{1}{a}\right)^{y-1}+b$

$\left(\frac{1}{a}\right)^{y-1}=x-b$

$y-1=\log_{\frac{1}{a}}(x-b)$

$y=\log_{\frac{1}{a}}(x-b)+1$

따라서 $g(x)=\log_{\frac{1}{a}}(x-b)+1$이고,

곡선 $y=g(x)$가 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0=\log_{\frac{1}{a}}(3-b)+1$

$3-b=\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}=a$

$a+b=3$ ...... ㉠

또 곡선 $y=g(x)$의 점근선이 직선 $x=-2$이므로

$b=-2$

㉠에서

$a=5$

따라서

$a^2+b^2=5^2+(-2)^2$

$=29$

답 29

다른 풀이

곡선 $y=g(x)$가 점 $(3, 0)$을 지나므로

$g(3)=0$

함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로

역함수의 성질에 의하여

$f(0)=3$

즉, $\left(\frac{1}{a}\right)^{0-1}+b=3$

$a+b=3$ ...... ㉠

또 곡선 $y=f(x)$의 점근선은 곡선 $y=g(x)$의 점근선인 직선 $x=-2$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 $y=-2$이다.

곡선 $y=f(x)$의 점근선은 직선 $y=b$이므로

$b=-2$

㉠에서

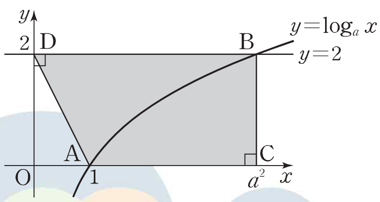
$a=5$

따라서

$a^2+b^2=5^2+(-2)^2$

$=29$

6



$\log_a x=2$에서 $x=a^2$이므로 점 B의 좌표는 $(a^2, 2)$

따라서 세 점 A, C, D의 좌표는 차례로 $(1, 0)$, $(a^2, 0)$, $(0, 2)$ 이다.

사각형 ACBD는 $\overline{DB}/\!/\overline{AC}$인 사다리꼴이고, 그 넓이가 7이므로

$\frac{1}{2}\times\{a^2+(a^2-1)\}\times 2=7$

$2a^2-1=7$

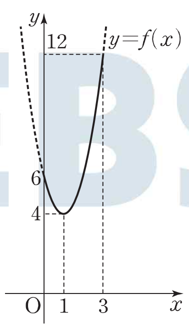
$a^2=4$
$a>1$에서
$a=2$

답 ②

7 함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$에서 $0<(\text{밑})=\frac{1}{2}<1$이므로
x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값은 감소하고,
x의 값이 감소하면 $g(x)$의 값은 증가한다.
이때 $g(x)=t$로 놓으면
$\frac{1}{2}\le x\le 4$일 때
$\log_{\frac{1}{2}} 4\le t\le \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$
즉, $-2\le t\le 1$이고
$(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$=f(t)$
$=6-t^2$
이므로 $-2\le t\le 1$일 때
$f(-2)\le f(t)\le f(0)$
즉, $2\le f(t)\le 6$
따라서 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은
$6+2=8$

답 8

8 $f(x)=2x^2-4x+6$, $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$로 놓으면
$y=\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-4x+6)$
$=(g\circ f)(x)$
$f(x)=2x^2-4x+6$
$=2(x-1)^2+4$
이므로 정의역이 $\{x\,|\,0\le x\le 3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는
$x=3$일 때 최댓값 12를 갖고,
$x=1$일 때 최솟값 4를 가지므로
$4\le f(x)\le 12$
한편 함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$에서
$0<(\text{밑})=\frac{1}{2}<1$이므로
x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값은 감소하고,
x의 값이 감소하면 $g(x)$의 값은 증가한다.
이때 $f(x)=t$로 놓으면
$(g\circ f)(x)=g(f(x))$
$=g(t)$
이고, 정의역이 $\{t\,|\,4\le t\le 12\}$이므로 함수 $g(t)$는
$t=4$일 때 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$를 갖는다.
따라서 정의역 $\{x\,|\,0\le x\le 3\}$에서
함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-4x+6)$의 최댓값은 -2이다.

답 ②

9 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2}=3^{-3x^2}$이므로
$3^{-3x^2}>3^{20-19x}$
이때 $(\text{밑})=3>1$이므로
$-3x^2>20-19x$
$3x^2-19x+20<0$
$(3x-4)(x-5)<0$
$\frac{4}{3}<x<5$
따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 2, 3, 4이므로
그 합은
$2+3+4=9$

답 ②

10 로그의 진수 조건에 의하여
$2x+1>0$, $x-4>0$
$x>4$ …… ㉠
$\log_2(2x+1)+\log_2(x-4)=\log_2 11$ …… ㉡
에서
$\log_2\{(2x+1)(x-4)\}=\log_2 11$
$(2x+1)(x-4)=11$이므로
$2x^2-7x-15=0$
$(2x+3)(x-5)=0$
$x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=5$
이때 $x=-\frac{3}{2}$은 부등식 ㉠을 만족시키지 않으므로 방정식 ㉡의 실근은 5이다.

답 5

Level 1 기초 연습 본문 32~33쪽

1 ③	2 ①	3 ③	4 ②	5 ①
6 ②	7 48	8 20		

1 $y=f(x)g(x)$

$=2^x\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^x$

이때 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$은 밑이 $\frac{2}{3}$인 지수함수이고, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 함수 $y=f(x)g(x)$의 그래프의 개형은 ③이다.

답 ③

2 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은
$y-2=f(x+2)$
$y=f(x+2)+2$
따라서
$f(x+2)+2=2-\left(\frac{2}{3}\right)^x$,
$f(x+2)=-\left(\frac{2}{3}\right)^x$
이므로
$f(2)=-\left(\frac{2}{3}\right)^0$
$=-1$

답 ①

다른 풀이
함수 $y=2-\left(\frac{2}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다.
$y-(-2)=2-\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$
$y=-\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$
따라서 $f(x)=-\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$이므로
$f(2)=-\left(\frac{2}{3}\right)^0$
$=-1$

3 $f(x)=a^x+2$에서 (밑)$=a>1$이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.
즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값을 갖고, $x=2$일 때 최댓값을 갖는다.
$f(2)=a^2+2$
$f(0)=a^0+2=3$
이때 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차가 8이므로
$(a^2+2)-3=8$
$a^2=9$
$a>1$이므로 $a=3$
따라서 $f(x)=3^x+2$이므로
$f(1)=3+2=5$

답 ③

4 두 함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이면 함수 $y=2^{-x+3}+\frac{1}{2}$의 역함수가 $y=\log_a(2x-1)+b$이다.
$y=2^{-x+3}+\frac{1}{2}$에서 x와 y를 서로 바꾸면
$x=2^{-y+3}+\frac{1}{2}$
$2^{-y+3}=x-\frac{1}{2}$
로그의 정의에 의하여
$-y+3=\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$이므로
$y=-\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)+3$
$=-\log_2\frac{2x-1}{2}+3$
$=-\log_2(2x-1)+4$
$=\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+4$
$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+4=\log_a(2x-1)+b$에서
$a=\frac{1}{2}$, $b=4$
따라서 $a+b=\frac{9}{2}$

답 ②

다른 풀이
함수 $y=2^{-x+3}+\frac{1}{2}$의 그래프는
두 점 $(4, 1)$, $\left(3, \frac{3}{2}\right)$을 지난다.
두 함수 $y=2^{-x+3}+\frac{1}{2}$, $y=\log_a(2x-1)+b$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로
함수 $y=\log_a(2x-1)+b$의 그래프는
두 점 $(1, 4)$, $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$을 지난다.

$4=\log_a(2-1)+b$에서

$b=4$

$3=\log_a\left(2\times\frac{3}{2}-1\right)+4$에서

$\log_a 2=-1$

$a^{-1}=2$

$a=\frac{1}{2}$

따라서

$a+b=\frac{1}{2}+4$

$=\frac{9}{2}$

5 함수 $y=\log_2(2x-a)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$y=\log_2\{2(x-1)-a\}$

$=\log_2(2x-2-a)$ …… ㉠

㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식은

$x=\log_2(2y-2-a)$

$2y-2-a=2^x$

$y=\frac{2^x}{2}+\frac{a+2}{2}$

$=2^{x-1}+\frac{a+2}{2}$

$f(x)=2^{x-1}+\frac{a+2}{2}$ …… ㉡

이때 함수 ㉡의 그래프의 점근선이 직선 $y=2$이므로

$\frac{a+2}{2}=2$에서

$a=2$

따라서 $f(x)=2^{x-1}+2$이므로

$f(a-2)=f(0)$

$=2^{-1}+2$

$=\frac{5}{2}$

답 ①

6 함수 $y=2\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$에서 $0<(\text{밑})=\frac{1}{2}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 함수 $y=2\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$은

$x=-1$일 때 최댓값

$2\log_{\frac{1}{2}}2=-2\log_2 2$

$=-2$

를 갖고,

$x=5$일 때 최솟값

$2\log_{\frac{1}{2}}8=2\log_{2^{-1}}2^3$

$=-6\log_2 2$

$=-6$

을 갖는다.

따라서

$M+m=-2+(-6)$

$=-8$

답 ②

7 직선 AB의 기울기가 -1이므로 선분 AB를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변은 x축 위에 있다.

정사각형의 넓이가 16이므로 정사각형의 한 변의 길이는 4이다.

따라서 점 A의 y좌표가 4이므로

$2^t+1=4$

$2^t=3$

$t=\log_2 3$

점 A의 좌표는 $(\log_2 3,\ 4)$이고, 정사각형의 한 변의 길이가 4이므로 점 B의 x좌표는

$\log_2 3+4=\log_2 3+\log_2 2^4$

$=\log_2(3\times16)$

$=\log_2 48$

따라서 $a=48$

답 48

8 로그의 진수 조건에 의하여

$x>0,\ 10-x>0$이므로

$0<x<10$ …… ㉠

$\log_2 x+\log_2(10-x)\le 4$에서

$\log_2 x(10-x)\le\log_2 2^4$

$x(10-x)\le16$

$x^2-10x+16\ge0$

$(x-2)(x-8)\ge0$

$x\le2$ 또는 $x\ge8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$0<x\le2$ 또는 $8\le x<10$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는

1, 2, 8, 9

이므로 그 합은

$1+2+8+9=20$

답 20

Level 2 기본 연습 본문 34쪽

1 16　2 ⑤　3 ④　4 ③

1 점 B의 x좌표를 t라 하자.

$\overline{AB}=5$이므로 점 A의 x좌표는 $t-5$이다.

두 점 A, B의 y좌표가 같으므로

$2^{-(t-5)}=a^t$

$a^t=32\times2^{-t}$ …… ㉠

두 점 B, C의 x좌표가 t로 같고, $\overline{BC}=\frac{31}{2}$이므로

$a^t-2^{-t}=\frac{31}{2}$

$a^t=2^{-t}+\frac{31}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$32\times2^{-t}=2^{-t}+\frac{31}{2}$이므로

$31\times2^{-t}=\frac{31}{2}$

$2^{-t}=2^{-1}$

즉, $-t=-1$에서

$t=1$

㉡에 $t=1$을 대입하면

$a=2^{-1}+\frac{31}{2}$

$=\frac{1}{2}+\frac{31}{2}$

$=16$

답 16

2 두 점 P, Q의 좌표가 각각

$(t,\ 2^{t-2}+2),\ \left(t,\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^t\right)$

이므로

$\overline{PQ}=(2^{t-2}+2)-\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^t\right\}$

$=2^{t-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^t+1$

$=\frac{2^t}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^t+1$

모든 실수 t에 대하여 $\frac{2^t}{4}>0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^t>0$이므로

$\frac{2^t}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^t\geq2\sqrt{\frac{2^t}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^t}$

$=2\sqrt{\frac{1}{4}}$

$=2\times\frac{1}{2}=1$

$\left(\text{등호는 }\frac{2^t}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^t\text{일 때 성립한다.}\right)$

이때 $\frac{2^t}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^t$에서

$\frac{2^t}{4}=\frac{1}{2^t}$

$(2^t)^2=4$

$2^t=2$, 즉 $t=1$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 $1+1=2$를 갖는다.

$a=1,\ b=2$이므로

$a+b=3$

답 ⑤

참고

$a>0,\ b>0$일 때,

$a+b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}$

$\geq2\sqrt{ab}$ (등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

3 $\log_2(4x-4)=\log_2 4(x-1)$

$=\log_2(x-1)+2$

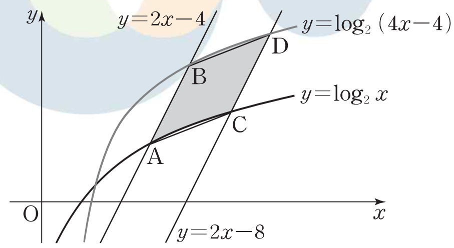
따라서 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 한 점을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점은 곡선 $y=\log_2(x-1)+2$ 위의 점이고, 이 두 점을 잇는 직선의 기울기는 2이다.

이때 두 점 A, B는 직선 $y=2x-4$ 위의 점이므로 직선 AB의 기울기는 2이다.

즉, 두 점 A, C를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 각각 B, D이다.

따라서 두 점 A, C를 잇는 곡선 $y=\log_2 x$의 일부분을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 두 점 B, D를 잇는 곡선 $y=\log_2(4x-4)$의 일부분과 일치한다.

따라서 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 AC로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=\log_2(4x-4)$와 직선 BD로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



그러므로 두 선분 AB, CD와 두 곡선 $y=\log_2 x$,

$y=\log_2(4x-4)$로 둘러싸인 부분의 넓이는
평행사변형 ACDB의 넓이와 같다.
점 A의 좌표를 (a, b) (a, b는 양의 실수)라 하면 점 B의 좌표는 $(a+1, b+2)$이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

이때 평행사변형 ACDB의 높이는 직선 $y=2x-4$ 위의 점 $(2, 0)$과 직선 $y=2x-8$, 즉 $2x-y-8=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2\times2-0-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

따라서 평행사변형 ACDB의 넓이는

$$\sqrt{5}\times\frac{4}{\sqrt{5}}=4$$

답 ④

4 점 P와 점 Q의 x좌표의 비가 $1:3$이므로 점 P의 x좌표를 α라 하면 점 Q의 x좌표는 3α이다.
점 P는 두 곡선 $y=\log_3 x+k$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 교점이므로
$\log_3 \alpha+k=\log_{\frac{1}{3}} \alpha$에서 로그의 진수 조건에 의하여
$\alpha>0$이고
$\log_3 \alpha+k=-\log_3 \alpha$
$k=-2\log_3 \alpha$ $(\alpha>0)$ …… ㉠
점 Q는 두 곡선 $y=\log_3 x+k$, $y=\log_3(6-x)$의 교점이므로
$\log_3 3\alpha+k=\log_3(6-3\alpha)$ …… ㉡
이때 로그의 진수 조건에 의하여
$3\alpha>0$에서
$\alpha>0$
$6-3\alpha>0$에서
$3\alpha<6$, $\alpha<2$
즉, $0<\alpha<2$이고 ㉠, ㉡에 의하여
$\log_3 3\alpha-2\log_3 \alpha=\log_3(6-3\alpha)$
$\log_3 \frac{3\alpha}{\alpha^2}=\log_3(6-3\alpha)$
$\log_3 \frac{3}{\alpha}=\log_3(6-3\alpha)$
즉, $\frac{3}{\alpha}=6-3\alpha$이므로
양변에 α를 곱하면
$3=6\alpha-3\alpha^2$
$3\alpha^2-6\alpha+3=0$
$\alpha^2-2\alpha+1=0$
$(\alpha-1)^2=0$
$\alpha=1$
이때 $\alpha=1$은 $0<\alpha<2$를 만족시키므로
$k=-2\log_3 1$
$=-2\times0$
$=0$

답 ③

Level 3 실력 완성

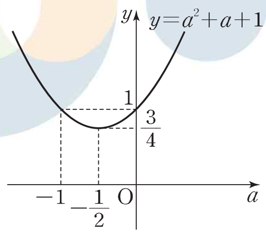
본문 35쪽

1 ② 2 ⑤ 3 33

1 ㄱ. 함수 $f(x)=(a^2+a+1)^x$은 밑이 a^2+a+1인 지수함수이므로 점근선은 직선 $y=0$이다. (참)
ㄴ. $a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$이므로
$-1<a<0$일 때
$\frac{3}{4}<a^2+a+1<1$
따라서 함수 $f(x)=(a^2+a+1)^x$의 그래프는 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로
$f(0)>f(1)$
즉, $f(1)<1$ (참)
ㄷ. (반례) $a=-2$이면
$a^2+a+1=(-2)^2+(-2)+1$
$=3$
따라서 $f(x)=(a^2+a+1)^x=3^x$이 되어 부등식
$f(-1)=3^{-1}=\frac{1}{3}<1$
을 만족시키지만 $a<0$이다. (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

참고
실수 a에 대한 함수 $y=a^2+a+1$의 그래프는 그림과 같다.



$-1<a<0$일 때, $0<a^2+a+1<1$
$a<-1$ 또는 $a>0$일 때, $a^2+a+1>1$

2 ㄱ. $|2^{2-x}-2|=0$에서

$2^{2-x}=2$

$2-x=1$이므로

$x=1$

따라서 $x_1<1<x_2$ (참)

ㄴ. 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 (밑)$=\frac{1}{2}<1$이므로

x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

$x_2>1$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}<\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$

따라서 $y_2<\frac{1}{2}$ (거짓)

ㄷ. 그림에서

$0<x<x_1$일 때 $|2^{2-x}-2|>\left(\frac{1}{2}\right)^x$이고,

$x_1<x<1$일 때 $|2^{2-x}-2|<\left(\frac{1}{2}\right)^x$이다.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$|2^{2-\frac{1}{2}}-2|=|2\sqrt{2}-2|$

$=2(\sqrt{2}-1)$

이때 $2(\sqrt{2}-1)-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}-4}{2}>0$이므로

$|2^{2-\frac{1}{2}}-2|>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

따라서 $x_1>\frac{1}{2}$ (참)

다른 풀이

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}=2^{2-x_1}-2$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}-2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}=\frac{2}{3}$

$2^{x_1}=\frac{3}{2}$

$x_1=\log_2\frac{3}{2}$

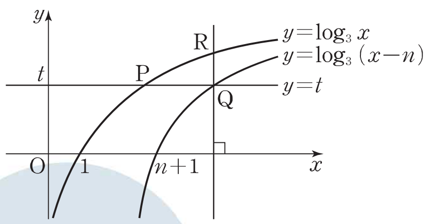
이때 $\frac{1}{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\log_2\sqrt{2}$이고, $\frac{3}{2}>\sqrt{2}$이므로

$x_1>\frac{1}{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

3



두 점 P, Q의 y좌표가 t이므로

$t=\log_3 x$에서 $x=3^t$

즉, 점 P의 좌표는 $(3^t,\ t)$이다.

$t=\log_3(x-n)$에서

$x-n=3^t$

$x=3^t+n$

즉, 점 Q의 좌표는 $(3^t+n,\ t)$이다.

따라서

$\overline{\text{PQ}}=(3^t+n)-3^t$

$=n$

두 점 Q, R의 x좌표가 3^t+n이므로

$y=\log_3(3^t+n)$

즉, 점 R의 좌표는 $(3^t+n,\ \log_3(3^t+n))$이다.

따라서

$\overline{\text{RQ}}=\log_3(3^t+n)-t$

$=\log_3\frac{3^t+n}{3^t}$

$=\log_3\left(1+\frac{n}{3^t}\right)$

이때 정의역이 $\{t\,|\,t\geq 0\}$인 함수 $f(t)=1+\frac{n}{3^t}$은

$t=0$일 때 최댓값 $f(0)=1+n$을 갖는다.

한편 함수 $y=\log_3 x$는 (밑)$=3>1$이므로

x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 t에 대한 함수 $g(t)=\log_3\left(1+\frac{n}{3^t}\right)$은

$t=0$일 때 최댓값

$g(0)=\log_3(1+n)$

을 갖는다.

즉, 음이 아닌 모든 실수 t에 대하여

$0<\log_3\left(1+\frac{n}{3^t}\right)\leq\log_3(1+n)$

(i) $\log_3(1+n)\leq 2$일 때

$1+n\leq 9$

$n\leq 8$

$\overline{\text{PQ}}+\overline{\text{RQ}}=n+\log_3\left(1+\frac{n}{3^t}\right)$

$\leq n+\log_3(1+n)$

≤ 10

이때 어떤 음이 아닌 실수 t에 대하여 $\overline{PQ}+\overline{RQ}\ge 20$을 만족시키는 자연수 n의 값은 없다.

(ii) $2<\log_3(1+n)\le 3$일 때

$9<1+n\le 27$

$8<n\le 26$ …… ㉠

$n<\overline{PQ}+\overline{RQ}\le n+\log_3(1+n)$

이때 어떤 음이 아닌 실수 t에 대하여 $\overline{PQ}+\overline{RQ}\ge 20$이 성립하려면

$n+\log_3(1+n)\ge 20$

$\log_3(1+n)\ge 20-n$ …… ㉡

$n=17$일 때, $\log_3 18<3$이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.

$n\ge 18$일 때, $\log_3(1+n)\ge\log_3 19\ge 2$이므로 ㉡을 만족시킨다.

따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 자연수 n의 값의 범위는

$18\le n\le 26$

(iii) $3<\log_3(1+n)\le 4$일 때

$27<1+n\le 81$

$26<n\le 80$

이때 조건 (가)에서 $n\le 50$이므로

$26<n\le 50$

$\overline{PQ}+\overline{RQ}>26$

즉, 음이 아닌 실수 t에 대하여 $\overline{PQ}+\overline{RQ}\ge 20$이 성립하므로 조건을 모두 만족시키는 자연수 n의 값의 범위는

$26<n\le 50$

(i), (ii), (iii)에서 모든 자연수 n의 값의 범위는

$18\le n\le 50$

이므로 그 개수는

$50-18+1=33$

답 33

03 삼각함수의 뜻과 그래프

유제

본문 39~47쪽

1 ①	2 10	3 ②	4 ②	5 ③
6 8	7 ①	8 ⑤	9 ②	10 ③

1 직각삼각형 ABC에서 $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$이므로

$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\overline{AB}}$, $\overline{AB}=4\sqrt{3}$

이때 $\overline{AD}=\overline{AB}=4\sqrt{3}$이므로

$\overline{DE}=\overline{AD}\times\sin\frac{\pi}{6}$

$=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$

$\overline{AE}=\overline{AD}\times\cos\frac{\pi}{6}$

$=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$

이때 삼각형 AED의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{DE}=\frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

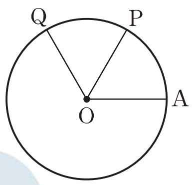
따라서 구하는 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(4\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{6}-6\sqrt{3}=4\pi-6\sqrt{3}$

이므로 $a+b=4+(-6)=-2$

답 ①

2 오른쪽 그림에서 동경 OP가 나타내는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로



$\angle AOP=\frac{\pi}{4}$

또 동경 OQ가 나타내는 각의 크기가 $-\frac{10}{3}\pi$이므로

이 각을 0 이상 2π 미만의 각으로 나타내면

$-\frac{10}{3}\pi+2\times 2\pi=\frac{2}{3}\pi$

그러므로

$\angle POQ=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}$

$=\frac{5}{12}\pi$

따라서 부채꼴 OPQ의 넓이는