2012학년도 대학수학능력시험 대비 모의평가 문제지

제 2 교시

수리 영역(가형)

가 형

성명		수험 번호						—				

○ 자신이 선택한 유형('가' 형/'나' 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

---

1. $54^{\frac{2}{3}} \times 3^{\log_{27} 2}$의 값은? [2점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 18 ⑤ 27

-수능특강 수1 41쪽 5번, 수능특강 수1 60쪽 1번 (2)

2. $\tan\theta = \frac{1}{2}$일 때, $\sin 2\theta$의 값은? $\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ [2점]

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

-수능완성 실전모의고사 2쪽 3번

3. 연속함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0} f(x)\left(e^{4x^2} - 1\right) = 16$$

을 만족할 때, $\lim_{x \to 0} x^2 f(x)$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

-수능특강 수2 62쪽 4번

4. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$과 직선 $y = mx$가 만나기 위한 정수 m의 개수는? [3점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

-수능완성 기벡 50쪽 16번

5. 좌표공간에서 세 개의 구

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$$
$$x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$$

의 부피를 각각 이등분하는 평면 α에 대하여 점 A(1, 1, 0)에서 평면 α까지의 거리는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

-수능완성 기벡 107쪽 21번

6. 직선 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{4}$ 위의 두 점 A(1, −2, 1)와 B에 대하여 선분 AB의 xy평면 위로의 정사영의 길이가 $2\sqrt{13}$일 때, 선분 AB의 yz평면 위로의 정사영의 길이는? [3점]

① 5 ② $5\sqrt{2}$ ③ 10 ④ $10\sqrt{2}$ ⑤ 15

-수능특강 기벡 94쪽 4번

7. 두 일차변환 f, g를 나타내는 행렬을 각각

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}$$

라 하자. 좌표평면에서 행렬 $(ABA)^6$, $(BAB)^6$으로 나타내어지는 일차변환에 의하여 점 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 1)$이 옮겨지는 점을 각각 Q, R라고 할 때, 선분 QR의 길이는? [3점]

① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $4\sqrt{3}$

-수능완성 실전모의고사 8쪽 25번

8. 어떤 사람에게 알파벳 세 개를 들려준 다음 406과 같은 숫자를 하나 불러주고 숫자 3을 계속해서 빼는 과제를 시킴으로써 알파벳을 기억하지 못하게 하는 실험을 하였다. 숫자를 빼는 과제를 하는 시간 t에 따른 기억의 지속 시간을 측정해 본 결과 알파벳을 정확하게 기억할 확률 $\mathrm{P}(t)$는

$$\mathrm{P}(t)=0.89\{0.01+0.99\times 0.85^t\}$$

로 나타났다. $t=a$일 때의 확률 $\mathrm{P}(a)$가 알파벳을 들려주고 바로 기억할 확률 $\mathrm{P}(0)$의 $\frac{19}{100}$보다 작아지게 되는 자연수 a의 최솟값은? (단, 시간의 단위는 초이고, $\log 1.1=0.04$, $\log 1.7=0.23$, $\log 2=0.30$으로 계산한다.) [3점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

-수능완성 실전모의고사 43쪽 9번

9. 다음은 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=1$이고, $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=S_{n-1}+\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}$을 만족시킬 때, $a_n=3^n-2^n$ $(n\geq 2)$임을 수학적귀납법을 이용하여 증명한 것이다. (단, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$이다.)

< 증 명 >

(ⅰ) $n=2$일 때, $a_2=S_1+\sum_{k=1}^{2}3^{k-1}=1+(1+3)=5=3^2-2^2$

이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=m$ $(m\geq 2)$일 때 성립한다고 가정하면

$a_m=S_{m-1}+\sum_{k=1}^{m}3^{k-1}$이다.

$n=m+1$일 때,

$$a_{m+1}=S_m+\sum_{k=1}^{m+1}3^{k-1}$$

$$=(S_{m-1}+\boxed{\text{(가)}})+\left(\sum_{k=1}^{m}3^{k-1}+\boxed{\text{(나)}}\right)$$

$$=\left(S_{m-1}+\sum_{k=1}^{m}3^{k-1}\right)+(\boxed{\text{(가)}}+\boxed{\text{(나)}})$$

$$=a_m+(\boxed{\text{(가)}}+\boxed{\text{(나)}})$$

$$=\boxed{\text{(다)}}\times a_m+\boxed{\text{(나)}}$$

$$=3^{m+1}-2^{m+1}$$

따라서 모든 자연수 n $(n\geq 2)$에 대하여

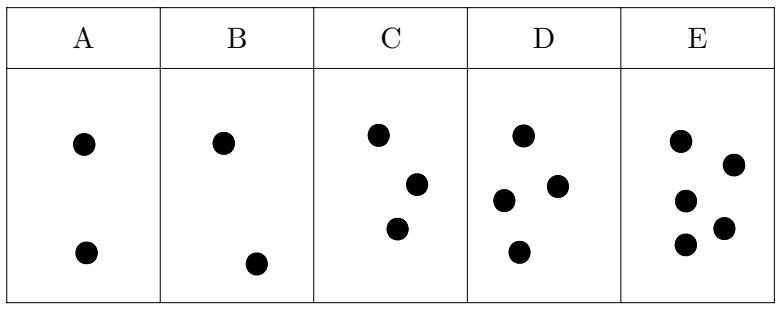
$a_n=3^n-2^n$이 성립한다.

위의 (다)에 알맞은 값을 p, (가), (나)에 알맞은 식의 합을 $f(m)$라고 할 때, $f(p)$의 값은? [3점]

① 5 ② 9 ③ 14 ④ 19 ⑤ 23

-수능완성 실전모의고사 36쪽 13번

10. 부산 국제 영화제에 출품된 영화 A, B, C, D, E가 상영되고 있다. 8명의 사람이 각각 5개의 영화를 보고, 그림과 같은 평가판에 만족한 두 영화를 선택하여 두 영화에 해당하는 칸에 ● 모양의 스티커를 1개씩 붙인다고 한다. 이와 같이 스티커를 붙여 평가된 결과 중 2개의 영화에 스티커가 붙여지지 않는 서로 다른 경우의 수는? [3점]



① 45 ② 105 ③ 210 ④ 420 ⑤ 840

-수능완성 적통 60쪽 4번

11. 수열 $\{a_n\}$이 다음 세 조건을 모두 만족할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}$의 값은? [3점]

(가) $a_1=1,\ a_2=7$
(나) 수열 $\{a_{n+1}-3a_n\}$은 공비가 4인 등비수열이다.
(다) 수열 $\{a_{n+1}-4a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

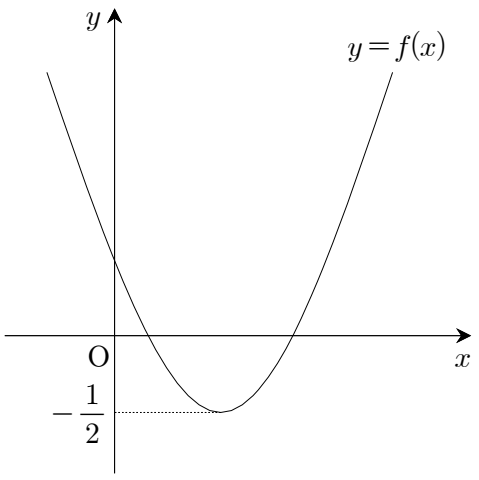
① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

-수능특강 수1 117쪽 15번

12. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 양수인 점에서 만나며, 최솟값이 $-\frac{1}{2}$이다. 이때, 방정식

$$\frac{1}{|f(x)|-1}-\frac{2}{\{|f(x)|\}^2-1}=\frac{2}{3}$$

의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

-수능특강 수2 9쪽 유제 3번

13. 확률변수 X는 정규분포 $N(10,\ {\sigma_1}^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $N(12,\ {\sigma_2}^2)$을 따른다. 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

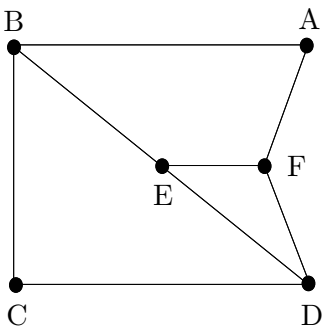
< 보 기 >

ㄱ. $\sigma_1=\sigma_2$이면 $f(x)$와 $g(x)$의 최댓값은 같다.
ㄴ. $\sigma_1=\sigma_2$이면 $\int_{10}^{12}f(x)dx=\int_{10}^{12}g(x)dx$이다.
ㄷ. $\sigma_1>\sigma_2$이면 $\int_{10}^{12}f(x)dx<\int_{10}^{12}g(x)dx$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

-수능완성 적통 102쪽 5번

14. 그림과 같이 꼭짓점이 A, B, C, D, E, F인 그래프 G에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 서로 다른 두 꼭짓점을 연결한 변은 오직 한 개이고, 하나의 꼭짓점을 시작점과 도착점으로 하는 변은 존재하지 않는다.) [4점]



< 보 기 >

ㄱ. 그래프 G를 나타내는 행렬을 P라 할 때, 행렬 P의 성분 중 1의 개수는 16이다.

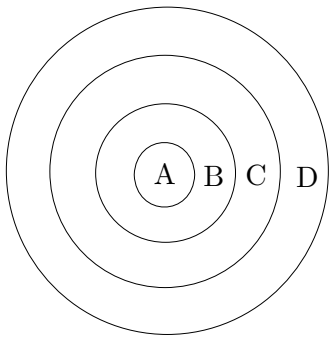
ㄴ. 꼭짓점 E의 차수가 짝수가 되도록 꼭짓점 E와 연결될 수 있는 꼭짓점의 개수는 2이다.

ㄷ. 그래프 G가 모든 변을 오직 한 번씩만 지나며 시작점으로 돌아오는 경로가 존재하도록 하기 위해 추가적으로 필요한 변의 개수의 최솟값은 3이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

-수능특강 수1 34쪽 4번

15. 그림과 같이 중심이 같고 반지름의 길이가 1, 2, 3, 4인 네 개의 원으로 구성된 원판이 있다. 이 네 개의 원을 경계로 하여 안으로부터 네 개의 영역 A, B, C, D로 나누고 차례대로 10, 8, 6, 4점을 나타낸다고 한다. 총 6발의 화살을 사용하여 원판을 맞힌다고 할 때, 처음 3발은 10점짜리 영역인 A에 명중하였고, 나머지 3발을 쏘아 총 50점의 점수를 받았다. 마지막 3발의 화살에서 같은 점수를 두 번 맞췄을 때, 4점짜리 영역인 D에 화살이 맞을 확률은? (단, 화살이 명중한 점수의 순서가 다르면 다른 경우로 생각하고, 모든 화살은 원판에 있는 원 안에 맞고 각 원의 경계 지점에 맞는 경우는 없다고 한다.) [4점]



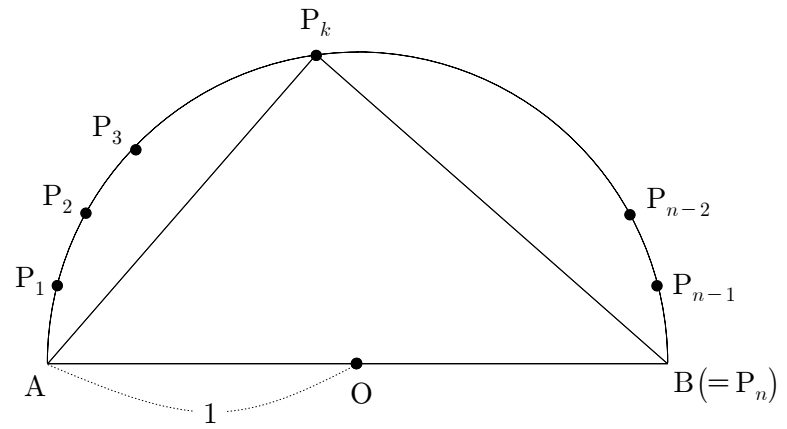
① $\frac{21}{46}$ ② $\frac{25}{46}$ ③ $\frac{29}{46}$ ④ $\frac{33}{46}$ ⑤ $\frac{21}{23}$

-수능완성 실전모의고사 14쪽 19번

16. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원에 대하여 점 O는 선분 AB의 중점이고 $\overline{OA}=1$이다. 반원에서 호 AB를 n등분하는 점을 각각 P_1, P_2, P_3, …, P_{n-1}이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{AP_k}$$

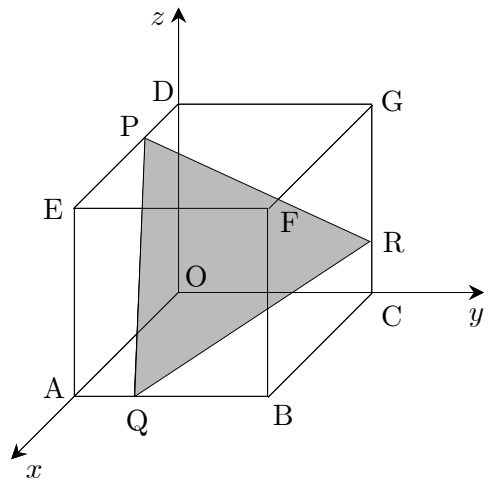
의 값은? (단, 점 P_n은 점 B와 같은 점이다.) [4점]



① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

-수능완성 적통 24쪽 27번

17. 그림과 같이 좌표공간에서 한 모서리의 길이가 3인 정육면체 OABC－DEFG가 있다. 선분 DE, AB, CG를 1 : 2로 내분하는 점을 각각 P, Q, R라 하고 세 점 P, Q, R를 지나는 평면을 α라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 점 O는 원점이다.) [4점]



< 보 기 >

ㄱ. 평면 α의 방정식은 $x+y+z=4$이다.

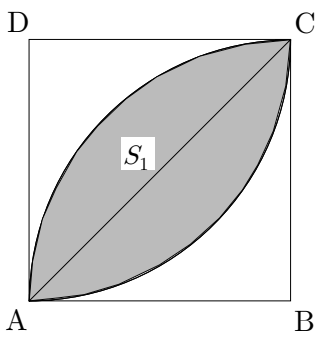
ㄴ. 평면 α와 평면 ABGD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$이다.

ㄷ. 삼각형 PQR를 평면 ABGD에 정사영 시킨 넓이는 $\frac{7}{2}\sqrt{2}$이다.

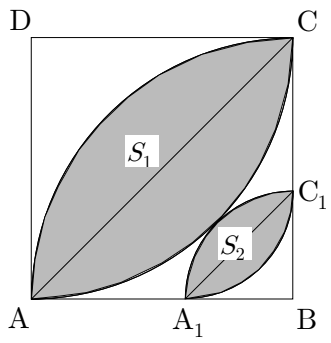
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

-수능특강 기벡 137쪽 7번

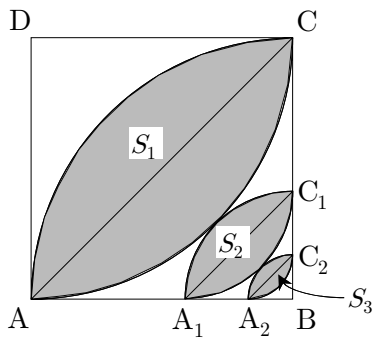
18. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. [그림 1]과 같이 점 B를 중심으로 하고, 선분 BA를 반지름으로 하는 부채꼴 BAC의 호 AC와 호 AC를 직선 AC에 대칭이동한 호로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자. [그림 2]와 같이 점 B를 중심으로 하고, 호 AC를 직선 AC에 대칭이동한 호에 접하는 부채꼴과 두 선분 AB, BC가 만나는 점을 각각 A_1, C_1이라 하고, 호 A_1C_1과 호 A_1C_1을 직선 A_1C_1에 대칭이동한 호로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자. [그림 3]과 같이 점 B를 중심으로 하고, 호 A_1C_1을 직선 A_1C_1에 대칭이동한 호에 접하는 부채꼴과 두 선분 A_1B, BC_1이 만나는 점을 각각 A_2, C_2라 하고, 호 A_2C_2와 호 A_2C_2를 직선 A_2C_2에 대칭이동한 호로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_3라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

① $\frac{\pi}{4}(\sqrt{2}-1)$ ② $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)(\sqrt{2}-1)$ ③ $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$
④ $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$ ⑤ $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)(\sqrt{2}+1)$

-수능완성 실전모의고사 38쪽 19번

19. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases}2(x+a)^2 & (x\le 0)\\ -2(x-a)^2 & (x>0)\end{cases},\ g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+x^{n+1}}{x^n+3}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체에서 연속함수일 때, $f(-3)g(3)$의 값은? (단, $a\neq 0$이다.) [4점]

① 12 ② 24 ③ 48 ④ 96 ⑤ 192

-수능특강 수2 77쪽 14번 ㄷ + 수능완성 수2 57쪽 7번

20. 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(\cos x+2)$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 함수 $f(x)$는 서로 다른 두 점에서 극값을 갖는다.

ㄴ. 열린 구간 $(0,\ \pi)$에서 방정식 $f'(x)=-\frac{\ln 3}{\pi}$는 적어도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=-\frac{\ln 3}{\pi}x+k$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(k)$라 할 때, 함수 $h(k)$은 서로 다른 네 개의 불연속점을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

-수능특강 수2 136쪽 4번

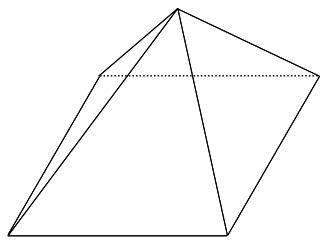
21. 정육면체 모양의 두 주사위 A, B를 동시에 던질 때, 나오는 각각의 눈의 수 a, b에 대하여 $\int_a^b |x-3|dx>2$가 되는 사건을 E라 하자. 두 주사위 A, B를 동시에 72번 던지는 시행에서 사건 E가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 할 때, X의 평균 E(X)는? [4점]

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 32 ⑤ 40

-수능완성 실전모의고사 17쪽 30번

단답형

22. 그림과 같이 모든 변의 길이가 같은 정사각뿔의 5개의 면을 5가지의 색을 사용하여 칠하려고 한다. 한 면에 한 가지의 색만 칠하려고 할 때, 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오. (단, 회전하여 같은 것은 한 가지의 경우로 생각한다.) [3점]



-수능완성 적통 47쪽 9번

23. $0 < a \le 3$에 대하여 연립부등식

$$\begin{cases} (x+1)(x-a)(x-5) \le 0 \\ \dfrac{(x-4)}{(x+a)(x-1)} \ge 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수의 개수가 3개일 때, a의 최댓값을 구하시오. [3점]

-수능완성 수2 21쪽 7번

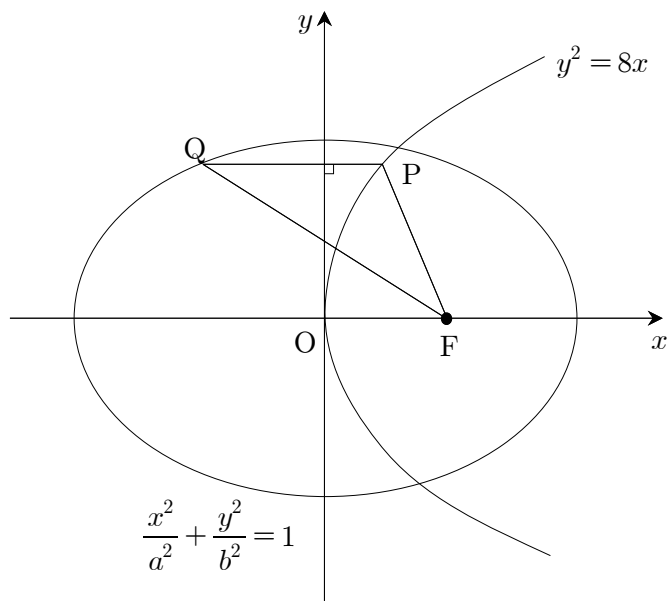
24. 좌표공간 위의 점 $\mathrm{P}(1, -3, 4)$에서 xy평면에 있는 직선 $y = \dfrac{3}{4}x$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 PH의 길이를 구하시오. [3점]

-수능완성 기벡 68쪽 7번

25. 그림과 같이 포물선 $y^2 = 8x$의 초점과 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$의 초점 F가 서로 일치한다. 제1사분면에 놓인 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점 P를 지나고 y축에 수직인 직선이 제2사분면에서 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$과 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 PQF에서

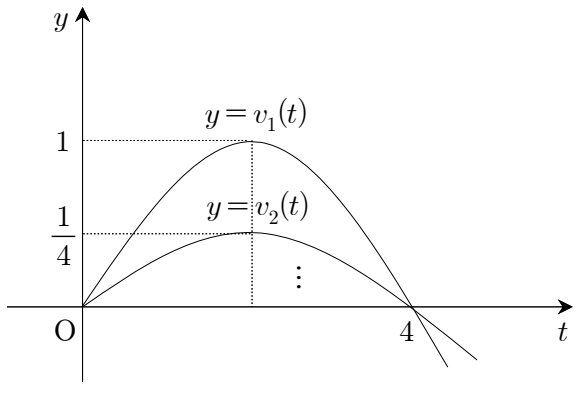
$$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PF}},\ \overline{\mathrm{QF}} = 5$$

일 때, ab^2의 값을 구하시오. (단, $a > 0$, $b > 0$이다.) [3점]



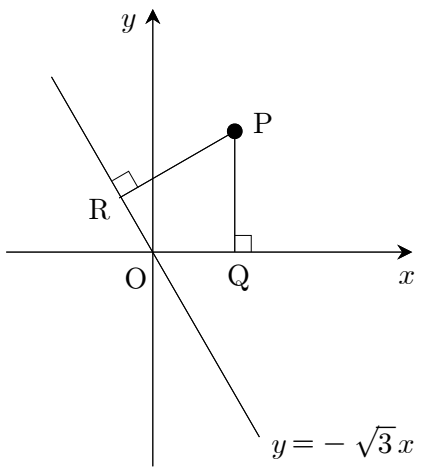
-수능완성 실전모의고사 12쪽 11번

26. 임의의 자연수 n에 대하여 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P_n의 시각 t에서의 속도 $y = v_n(t)$의 그래프는 그림과 같이 두 점 $(0, 0)$, $(4, 0)$을 지나고 최댓값이 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$인 이차함수의 그래프의 일부분이다. 점 P_n이 원점으로부터 양의 방향으로 가장 멀리 떨어진 지점까지 움직인 거리를 S_n이라고 할 때, $S_n < \dfrac{1}{600}$을 만족하는 n의 최솟값을 구하시오. [4점]



-수능완성 실전모의고사 13쪽 14번

27. 일차변환 f를 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$라 할 때, 점 $(2,\ 0)$이 일차변환 f에 의해 옮겨진 점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q, 점 P에서 직선 $y=-\sqrt{3}x$에 내린 수선의 발을 R라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PR}}$가 $\theta=\alpha$에서 최대일 때, $\tan^2\alpha$의 값을 구하시오. [4점]



-수능완성 실전모의고사 6쪽 17번

28. 최고차항의 계수가 양수이고, 서로 다른 두 극값을 가지는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 두 집합 A, B를

$$A=\{x\,|\,f(x)=0\},\ B=\left\{x\,|\,\int_0^x f(t)dt=0\right\}$$

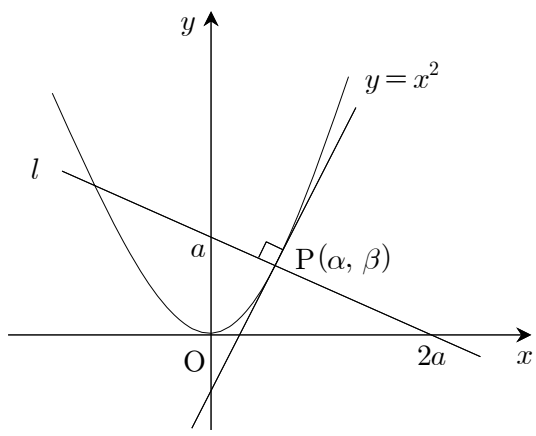
라 하자. $n(A)=2$일 때, $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [4점]

-수능완성 실전모의고사 25쪽 28번

29. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 제1사분면에 있는 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$에서의 접선과 직선 l이 서로 수직으로 만나고 있다. 직선 l의 x절편과 y절편이 각각 $2a$, a이고, 점 P의 x, y좌표인 α와 β에 대하여

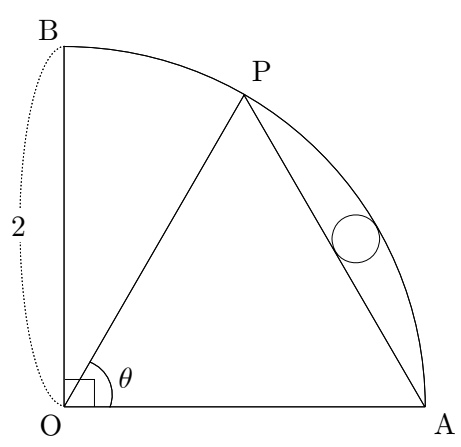
$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & b\\ c & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a\\ 1\end{pmatrix}$$

인 관계식이 성립한다. 이때, $b+c$의 값을 구하시오. (단, $a>0$이다.) [4점]



-수능특강 수1 25쪽 8번

30. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 사분원 OAB의 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{AOP}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자. 선분 PA와 호 PA로 둘러싸인 도형을 S라 하고, 도형 S에 내접하는 원 중 반지름의 길이가 가장 큰 원의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 또한, 삼각형 OAP의 넓이를 $g(\theta)$, 호 PA의 길이를 $h(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{f(\theta)}{\theta^2 g(\theta)h(\theta)}=\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



-수능완성 실전모의고사 40쪽 27번

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.