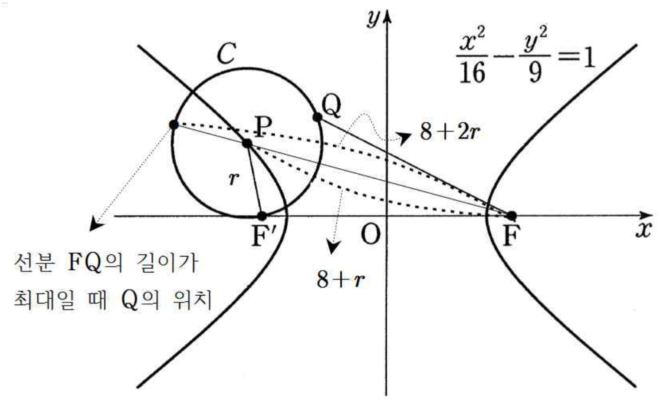
6월 모평

교안
해설

고지우 수학연구소

1) 정답 ③

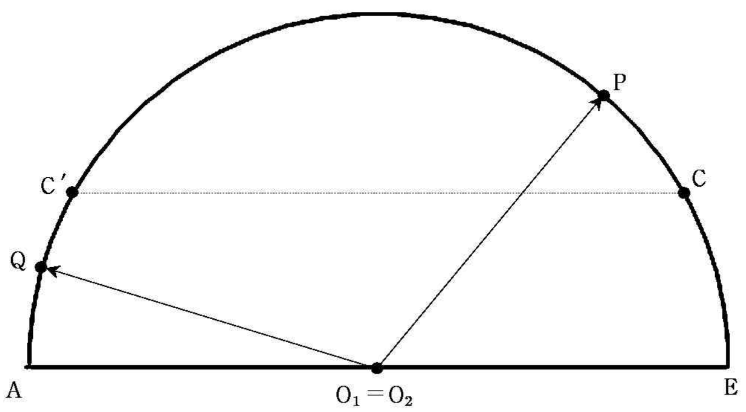
원 C 의 반지름의 길이를 r 이라 할 때,
타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{FP}} = 8+r$ 이다.
선분 FQ의 길이가 최대일 때의 점 Q의 위치는 그림과 같다.



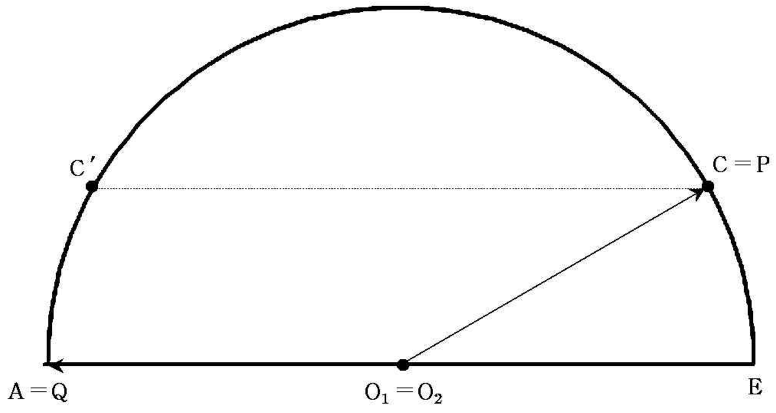
위 그림에서 선분 FQ 의 길이의 최댓값은 $8+2r$이므로
$8+2r = 14$, $\therefore r = 3$이다.
따라서 원 C의 넓이는 9π이다.

2) 정답 19

점 P는 호AC 위에 존재하고
점 Q는 호DC 위에 존재하므로
C를 지나고 AE에 평행한 직선이 원과 만나는 점을 C′라 하고,
$\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$를 시점을 $\mathrm{O_1}$으로 하면 다음과 같다.



$\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$는 길이가 1인 벡터이므로 각이 제일 클 때
$\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}\right|$는 최소가 되고 그 점은 P가 C이며, Q가 A일
경우이므로

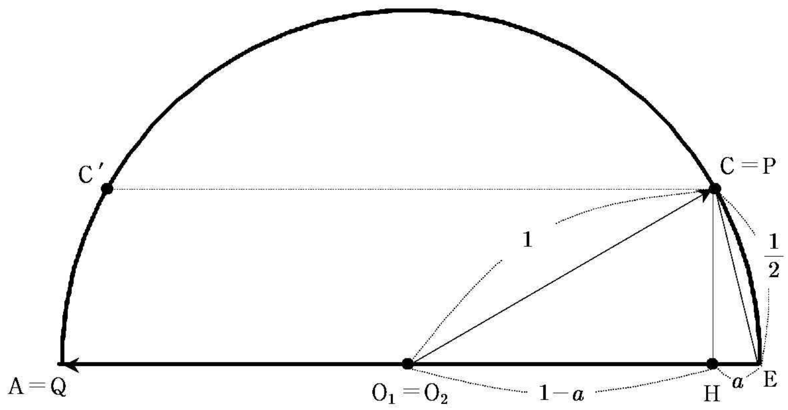


$\overrightarrow{O_2Q} = \overrightarrow{EO_2}$이므로

$|\overrightarrow{EC}| = \dfrac{1}{2}$이다.

C에서 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고

$\overline{HE} = a$라 하면



피타고라스 정리에 의해

$1-(1-a)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - a^2$

$2a - a^2 = \dfrac{1}{4} - a^2$

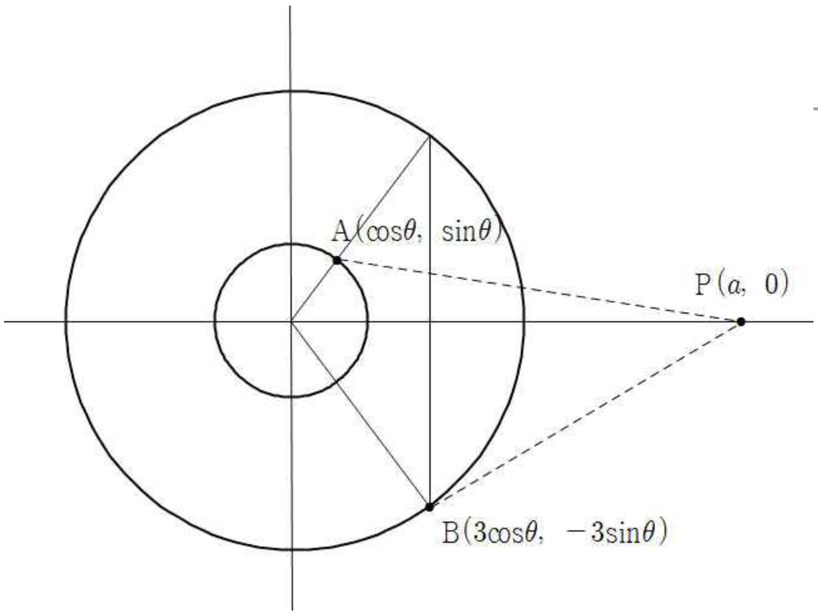
$\therefore a = \dfrac{1}{8}$

$\overline{AH} = 2-a$, $\overline{HB} = 2-a$이므로

$\overline{AB} = 4-2a = 4-\dfrac{1}{4} = \dfrac{15}{4}$

$\therefore p+q = 19$

3) 정답 7



(가) 조건에 의해서 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{B}(3\cos\theta,\ -3\sin\theta)$
점 P는 $\angle\mathrm{AOB}$의 이등분 선상에 존재한다.
따라서 $\mathrm{P}(a,\ 0)$이라 할 수 있다.
(나)조건에 의해서

$$(a-\cos\theta)^2+\sin^2\theta+(a-3\cos\theta)^2+9\sin^2\theta=20$$

$$2a^2-8a\cos\theta+10=20$$

$$a^2-4a\cos\theta=5$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\cos\theta-a,\ \sin\theta)\cdot(3\cos\theta-a,\ -3\sin\theta)$$

$$=3\cos^2\theta-4a\cos\theta+a^2-3\sin^2\theta$$

$$=3\cos2\theta+5$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$일 때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최솟값 $m=2$ 이다.

$a^2-4a\cos\frac{\pi}{2}=5$에서 $a^2=k^2=5$

따라서 $m+k^2=7$

4) 정답 15

좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t $(t \geq 1)$ 에서의 위치 $(x,\ y)$가
$x=2\ln t,\ y=f(t)$로 주어졌으므로
시각 t 에서의 속도는 $\vec{v}=\left(\frac{2}{t},\ f'(t)\right)$이고
시각 t 에서의 가속도는 $\vec{a}=\left(-\frac{2}{t^2},\ f''(t)\right)$이다.
$t=2$일 때 점 P 의 속도가 $\left(1,\ \frac{3}{4}\right)$이므로 $f'(2)=\frac{3}{4}$이다.
$t=2$일 때 점 P 의 가속도가 $\left(-\frac{1}{2},\ a\right)$이므로 $f''(2)=a$이다.
점 P 가 점 $(0,\ f(1))$로부터 움직인 거리가 s가 될 때,
시각 t는 $t=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$이고, 주어진 식을 정리하면

$2t=s+\sqrt{s^2+4}$
$(2t-s)^2=s^2+4$
$4t^2-4ts+s^2=s^2+4$
$ts=t^2-1$
$\therefore s=t-\frac{1}{t}\cdots$㉠이다.

$s=\int_1^t|\vec{v}|dt=\int_1^t\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+(f'(t))^2}\,dt$
에서 양변을 t로 미분하면
$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{4}{t^2}+(f'(t))^2}$ 이다.
한편 ㉠에서 $\frac{ds}{dt}=1+\frac{1}{t^2}$ 이므로
$1+\frac{1}{t^2}=\sqrt{\frac{4}{t^2}+(f'(t))^2}$ 임을 알 수 있고
양변을 제곱하여 정리하면
$1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}=\frac{4}{t^2}+(f'(t))^2$
$(f'(t))^2=1-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}=\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2$
$f'(t)=1-\frac{1}{t^2}\ \left(\because f'(2)=\frac{3}{4}\right)\cdots$㉡
㉡의 식을 t 로 미분하면
$f''(t)=\frac{2}{t^3}$이고 $a=f''(2)=\frac{1}{4}$이다.
따라서 $60a=60\times\frac{1}{4}=15$이다.

5) 정답 45

원소의 개수가 2개인 부분집합의 개수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$

따라서 구하라는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$

6) 정답 ①

$x^2(x+a)^n$의 전개식에서 일반항이

$x^2\cdot{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}x^r={}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}x^{r+2}$이므로

x^{n-1}의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_{n-3}a^3$이다. 따라서 $\boxed{(가)}={}_n\mathrm{C}_3$ $\cdots$①

$a^2n={}_n\mathrm{C}_3\times a^3-2a^2n$의 양변을 정리하면

$a=\dfrac{18}{(n-1)(n-2)}$이므로

$\boxed{(나)}=(n-1)(n-2)$ $\cdots$②

a가 자연수이고 n은 4이상의 자연수이므로 $n=4$이다.

따라서 $\boxed{(다)}=4$ $\cdots$③

①, ②, ③에 의해 $f(n)={}_n\mathrm{C}_3$, $g(n)=(n-1)(n-2)$, $k=4$이다.

그러므로 $f(4)+g(4)={}_4\mathrm{C}_3+(4-1)(4-2)=4+6=10$

7) 정답 20

$\overline{\mathrm{OD}}=x$라 하면

$$f(\theta)=\left(x\tan\frac{\theta}{3}\right)^2$$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}(x\cos\theta)^2\tan\frac{2\theta}{3}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(x\tan\frac{\theta}{3}\right)^2}{\frac{1}{2}x^2\cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}=k$$

$\therefore 60k=20$

8) 정답 ①

ㄱ. (가), (나)에 의하여

$f(x) = -f(-x)$ 이고 $f(-x) \neq 1$ 이므로 $-f(-x) \neq -1$ 이다.

$\therefore\ f(x) \neq -1\quad \therefore$참

ㄴ. $f(x)$는 전 구간에서 미분 가능하고 연속인 원점 대칭
함수이므로 반드시 원점을 지나야 한다.
또한 $f(x) \neq 1$, $f(x) \neq -1$ 이기 위해
$f(x)$은 -1과 1 사이여야 한다.

$\therefore\ -1 < f(x) < 1$

(다)에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{1+f(x)\}\{1+f(-x)\} \\ &= \{1+f(x)\}\{1-f(x)\} \\ &= 1-\{f(x)\}^2 \end{aligned}$$

$\therefore\ f'(x) > 0$

함수 $f(x)$는 전 구간에서 증가한다. $\therefore$거짓

ㄷ. $f'(x) = 1-\{f(x)\}^2$

양변을 미분하면 $f''(x) = -2f(x)f'(x)$

$(0,0)$에서만 이계도함수의 부호가 바뀌므로 변곡점은
오직 하나이다. $\therefore$거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ 뿐이다.

9) 정답 ③

(가)에 의해 $x = \ln\frac{2}{3}$이 변곡점임을 확인할 수 있다.

$f'(x) = 3ae^{3x} + be^{x}$

$f''(x) = 9ae^{3x} + be^{x}$

$$f''\left(\ln\frac{2}{3}\right) = 9a \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + b \times \frac{2}{3} = \frac{8a+2b}{3} = 0$$

$\therefore\ b = -4a$

$f'(x) = ae^{x}(3e^{2x} - 4)$

(나) 조건에서 $3 \cdot e^{2m} - 4 = 0$이다.

$f(2m) = a \cdot e^{6m} - 4a \cdot e^{2m}$

$$= a\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4a\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{80}{9}$$

따라서 $a = 3$, $b = -12$이다.

$\therefore\ f(0) = -9$

10) 정답 ④

$F(x)=\ln|f(x)|$를 미분하면 $F'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$\lim\limits_{x\to1}(x-1)F'(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)f'(x)}{f(x)}=3$에서 $f(1)=0$이다.

$f(x)=(x-1)q(x)$라 하면 $f'(x)=q(x)+(x-1)q'(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\{Q(x)+(x-1)Q'(x)\}}{(x-1)Q(x)}=1\neq3$이다.

$f(x)=(x-1)^k h(x)$ ($k\geq2$인 자연수)라 하면

$f'(x)=k(x-1)^{k-1}h(x)+(x-1)^k h'(x)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{k(x-1)^{k-1}h(x)+(x-1)^k h'(x)\}}{(x-1)^k h(x)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{k(x-1)^k h(x)+(x-1)^{k+1}h'(x)}{(x-1)^k h(x)}$$

$=k$

이므로 조건으로부터 $k=3$이다.

따라서 $f(x)=(x-1)^3(x+a)$의 꼴이 된다.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F'(x)}{G'(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)\times g(x)\sin x}{f(x)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}}=\dfrac{1}{4}$ $\cdots$ ①에서

$x\to0$일 때 (분자) $\to0$이므로 (분모) $\to0$이어야 한다.

따라서 $f(0)=0$이다.

그러므로 $f(x)=(x-1)^3x$이다.

x에 대해 미분하면 $f'(x)=3(x-1)^2x+(x-1)^3$이므로

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{3(x-1)^2x+(x-1)^3}{(x-1)^3x}=\dfrac{4x-1}{x(x-1)}$이다.

위의 식을 ①에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{(4x-1)g(x)\sin x}{x(x-1)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x-1}{x-1}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{g(x)}{g'(x)\sin x+g(x)\cos x}=\frac{1}{4}$$

에서 $g(0)=0$이다.

$g(x)=xk(x)$라 하면 $g'(x)=k(x)+xk'(x)$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{4x-1}{x-1}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{xk(x)}{\{k(x)+xk'(x)\}\sin x+xk(x)\cos x}=\frac{1}{4}$$

에서 $k(0)=0$이다.

따라서 $g(x)=x^m p(x)$ ($m\geq2$인 자연수)라 하면

$g'(x)=mx^{m-1}p(x)+x^m p'(x)$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{4x-1}{x-1}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x^m p(x)}{\{mx^{m-1}p(x)+x^m p'(x)\}\sin x+x^m p(x)\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x-1}{x-1}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x^{m-1}p(x)}{\{mx^{m-1}p(x)+x^m p'(x)\}\dfrac{\sin x}{x}+x^{m-1}p(x)\cos x}$$

$=1\cdot1\cdot\dfrac{1}{m+1}=\dfrac{1}{m+1}$

이므로 조건으로부터 $m=3$이다.

따라서 $g(x)=x^3$이다.

그러므로 $f(3)+g(3)=3\cdot2^3+3^3=51$이다.

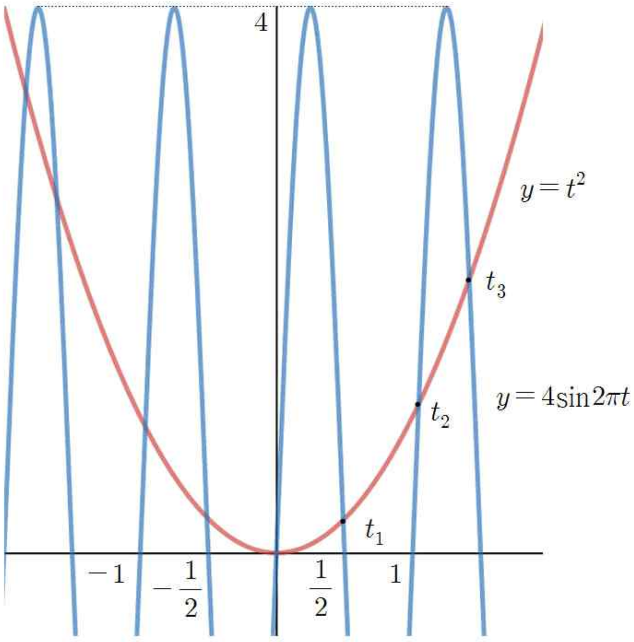
11) 정답 ①

$\vec{v}=(2t,\ 2\pi\sin 2\pi t)$이므로 $\mathrm{P}(t^2+\mathrm{C}_1,\ -\cos 2\pi t+\mathrm{C}_2)$에서

$t=0$일 때 $(0,\ -1)$이므로 $\mathrm{C}_1=\mathrm{C}_2=0$

P, Q가 만날 때는 $t^2=4\sin 2\pi t$이고 $-\cos 2\pi t=|\cos 2\pi|$이다.

$y=t^2$과 $y=4\sin 2\pi t$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



위 그림과 같이 x좌표로 보면 t_1, t_2, t_3의 3곳에서 만난다.

그런데 y좌표가 $-\cos 2\pi t=|\cos 2\pi|$이어야 하므로 t_2는 제외된다.

따라서 2번 만난다.

12) 정답 ②

$$h(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$$
$$=\int_0^a f(x)dx+\int_0^8 g(x)dx-\int_0^a g(x)dx$$
$$=\int_0^a f(x)dx+\int_0^8 g(x)dx-\int_0^a g(x)dx$$
$$=8+\int_0^a (f(x)-g(x))dx$$

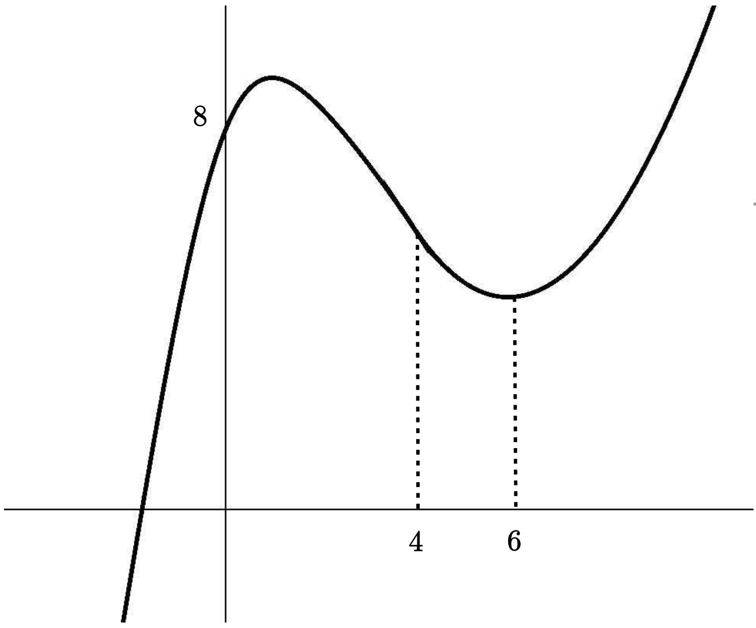
이라 하면

$$h'(a)=f(a)-g(a)=\begin{cases}\dfrac{5}{2}-\dfrac{10a}{a^2+4}-\dfrac{1}{2}a & (a\leqq 4)\\[2ex] \dfrac{5}{2}-\dfrac{10a}{a^2+4}+\dfrac{1}{2}a-4 & (a>4)\end{cases}$$ 이고

$h(a)$는 연속함수이고 $h(0)=8$이므로

$$h(a)=8+\int_0^a (f(x)-g(x))dx$$
$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{5}{2}a-5\ln(a^2+4)+8+5\ln 4 & (a\leqq 4)\\[2ex] \dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{3}{2}a-5\ln(a^2+4)+16+5\ln 4 & (a>4)\end{cases}$$

이고, 주어진 그래프는 아래와 같다.



따라서 $h(a)=\int_{0}^{a}f(x)dx+\int_{a}^{8}g(x)dx$ 의 최솟값은
$h(6)=16-5\ln 10$ 이다.

13) 정답 83

$\int_{x}^{x+a}f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 의 양변을 미분하면

$f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ⋯㉠

위의 식에 x 대신에 $-\frac{a}{2}$ 를 대입하면

$f(x)=f(-x)$ 이므로

$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a}{2}\right)=0$

$\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\frac{a}{2}=0$

$\tan\frac{a}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{a}{2}=\frac{5}{6}\pi$ $(\because 0<a<2\pi)$

$\therefore$ $a=\frac{5}{3}\pi$

(나)식에 $x=-\frac{a}{2}$ 을 대입하면

$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(t)dt=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a}{2}\right)$

$2\int_{0}^{\frac{a}{2}}f(t)dt=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a}{2}\right)$

$2\left[\frac{b}{3}\sin 3x+\frac{c}{5}\sin 5x\right]_{0}^{\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{a}{2}$

위의 식에 $a=\frac{5}{3}\pi$를 대입하면

$2\left\{\frac{b}{3}\sin\frac{5}{2}\pi+\frac{c}{5}\sin\frac{25}{6}\pi\right\}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{5}{6}\pi-\frac{1}{2}\sin\frac{5}{6}\pi$

위의 식을 정리하면

$\frac{2}{3}b+\frac{1}{5}c=-1$ …㉡

한편, ㉠에 $a=\frac{5}{3}\pi$를 대입하면

$f\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

양변을 미분하면

$f'\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)-f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

위의 식에 x 대신에 $-\frac{5}{6}\pi$를 대입하면

$f'(x)=-f'(-x)$ 이므로

$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)-f'\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$2f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=1$

$\therefore\ f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$

$\left[0,\ \frac{5}{6}\pi\right]$에서

$f'(x)=-3b\sin3x-5c\sin5x$

위의 식에 $x=\frac{5}{6}\pi$를 대입하면

$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-3b-\frac{5}{2}c=\frac{1}{2}$ …㉢

㉡과 ㉢을 연립하면

$b=-\frac{9}{4}$, $c=\frac{5}{2}$

$\therefore abc=\frac{5}{3}\pi\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)\cdot\frac{5}{2}=-\frac{75}{8}\pi$

이므로

$p=8, q=75$

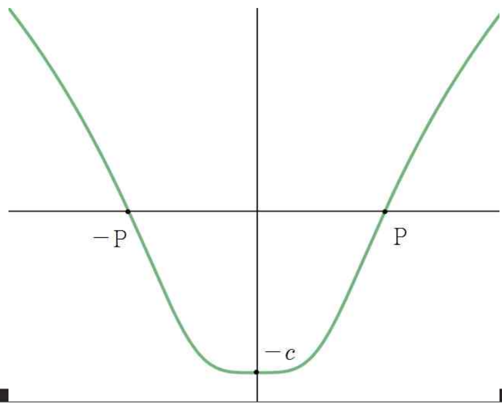
$\therefore\ p+q=83$

14) 정답 16

함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c\ (c>0)$은 $f(-x)=f(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 y축 대칭이다.

$f'(x)=\frac{4x^3}{x^4+1}=0$에서 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

$c>0$이므로 $y=f(x)$의 그래프 개형은 아래와 같다.



$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$에서 $g'(x)=f(x)$이고 조건 (가)에 의해

$g'(1)=f(1)=0$이므로 $c=\ln 2$ $\cdots$ ①

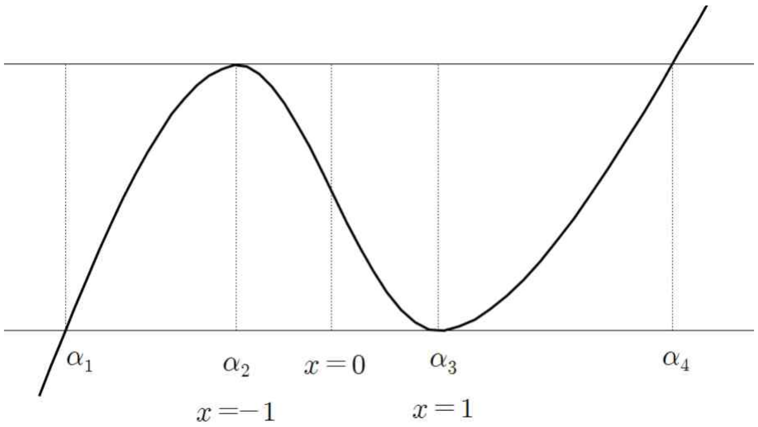
이고 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

따라서 $y=g(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=1$에서 극소이고,

점 $(0,\ g(0))$에 대해 대칭이다.

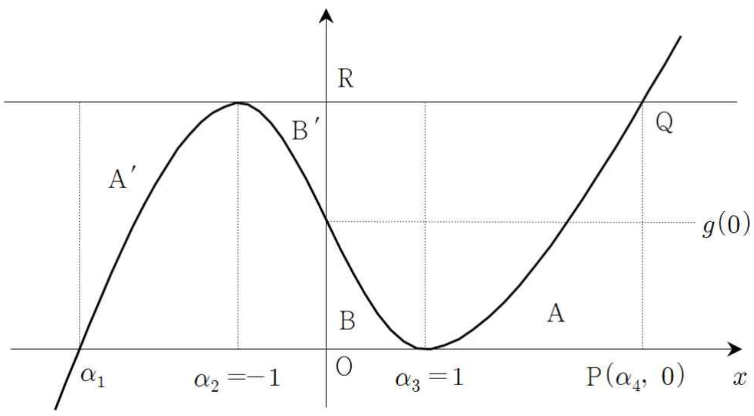
그런데 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는

서로 다른 점의 개수가 2가 되는 경우는 아래 그림과 같다.



가능한 a의 값은 α_1, $\alpha_2(=-1)$, $\alpha_3(=1)$, α_4의 4개다.

따라서 $m=4$ $\cdots$ ②



$y=g(x)$의 그래프는 점 $(0,\ g(0))$에 대해 대칭이므로

위의 그림에서 $\mathrm{A}=\mathrm{A}'$, $\mathrm{B}=\mathrm{B}'$이다.

따라서 $\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)\,dx$는 사각형 OPQR의 넓이와 같다.

조건 (나)에서 $\square\mathrm{OPQR}=k\cdot\alpha_4\cdot\{g(1)-g(0)\}$이고

$\alpha_4=\overline{\mathrm{OP}}$, $g(1)-g(0)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OR}}$이므로 $k=2$ $\cdots$ ③

①, ②, ③에 의해 $m\cdot k\cdot e^c=4\cdot 2\cdot 2=16$