2018학년도 D&T
6월 모의평가 해설지 (가형)

1	③	**2**	②	**3**	④	**4**	②	**5**	⑤
6	④	**7**	①	**8**	①	**9**	⑤	**10**	⑤
11	②	**12**	③	**13**	⑤	**14**	④	**15**	③
16	①	**17**	①	**18**	④	**19**	②	**20**	③
21	①	**22**	5	**23**	84	**24**	32	**25**	10
26	16	**27**	192	**28**	20	**29**	225	**30**	64

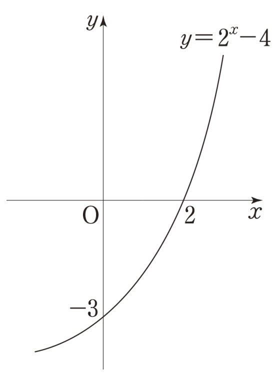
1.
벡터 $\overrightarrow{AB}$ 의 크기는 $|\overrightarrow{AB}|=4$ 이므로
$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=2$ 이다.

2.
$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ 이므로 $\cos\theta<0$ 이고,
$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ 이므로 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ 이다.

3.
$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=2f'(1)$ 이므로
$f'(x)=e^{x-1}$ 에서 $f'(1)=1$ 이다. 따라서 답은 2이다.

4.
$7=1+1+1+1+1+1+1$
$=1+1+1+1+1+2$
$=1+1+1+2+2$
$=1+2+2+2$
이므로 답은 4이다.

5.
함수 $y=2^x-4$ 의 그래프는 x 절편이 2, y 절편이 -3 이다. 밑이 1보다 크므로 증가함수이고, 개형은 다음과 같다.



이 그래프가 지나는 사분면은 제1, 3, 4사분면이므로 모든 a 의 값의 합은 8이다.

6.
벡터 $\vec{u}=(1,\ -2)$ 에 평행하려면 직선의 기울기가 -2 이어야 한다. 따라서 직선의 방정식은 $y=-2(x-2)$ 이므로 y 절편은 4이다.

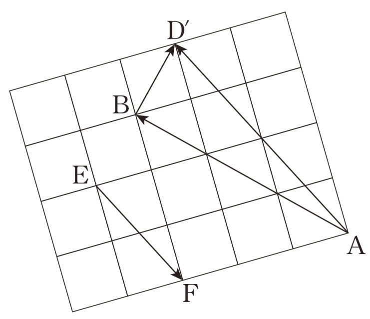
7.
$f'(x)=\frac{3x^2}{x^3-6}$ 이므로 $f'(2)=\frac{12}{2}=6$ 이다.

8.
$\cos x=(\sin x)'$ 이므로 $\sin x=t$ 라 하면
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+1}dx=\int_0^1\frac{1}{t+1}dt=[\ln|t+1|]_0^1=\ln2$
이다.

9.
구별이 안 되는 것은 새우초밥 두 개와 연어초밥 두 개이므로 구하고자 하는 방법의 수는
$\frac{6!}{2!\times2!}=\frac{720}{4}=180$ 가지이다.

10.
$\frac{dx}{dt}=2t,\ \frac{dy}{dt}=3t^2+1$ 이므로 접선의 기울기는
$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+1}{2t}$ 이다. 따라서 $t=2$ 에 대응되는 점에서의 접선의 기울기는 $\frac{13}{4}$ 이다.

11.
벡터 $\overrightarrow{AB}$ 의 종점과 벡터 $\overrightarrow{CD}$ 의 시점을 B로 일치시키면 다음과 같다.



위 그림에서 알 수 있듯이 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD'}$ 이며, 이 벡터는 $\overrightarrow{EF}$ 와 방향이 반대이고 크기가 2배 차이이므로 $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$ 이다. 따라서 $k=-\frac{1}{2}$ 이다.

12.
$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ 이라 하면
$f'(x)=x\sqrt{x^2+2}$ 이므로
$l=\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$
$=\int_0^1\sqrt{(x^2+1)^2}\,dx=\int_0^1(x^2+1)dx$
$=\frac{4}{3}$ 이다.

13.
연속함수 $f(x)$ 이므로 $x^2f(x)=2(1-\cos x)$ 에서 $x\neq0$ 일 때, 양 변을 x^2 으로 나누면
$f(x)=\frac{2(1-\cos x)}{x^2}$ 이다. $f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$ 이므로
$\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos^2x)}{x^2(1+\cos x)}$
$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{x^2(1+\cos x)}=1$ 이다.
따라서 $f(0)=1$ 이다.

14.
$x,\ y$ 는 홀수, z 는 짝수이므로
$x=2X+1,\ y=2Y+1,\ z=2Z+2$
$(X\geq0,\ Y\geq0,\ Z\geq0)$ 으로 치환할 수 있다.
준 식은 $(2X+1)+(2Y+1)+(2Z+2)=14$ 와 동치이고 이는 $X+Y+Z=5$ 와 동치이다. 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$ 의 개수는 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z)$ 의 개수와 같으며 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z)$ 의 개수는 ${}_3H_5={}_7C_5=21$ 이다.

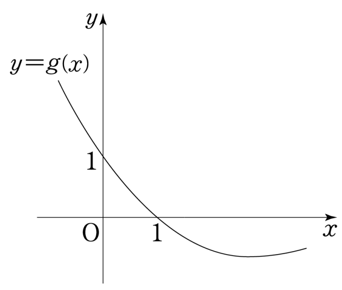
15.
함수 $f(x)$ 를 $f(x)=(x^2-6x+6)e^x$ 이라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록한 구간에 속하는 정수를 구하자. 이때, $f''(x)<0$ 을 만족시키는 정수 x 를 찾는 것과 같으므로 함수 $y=f(x)$ 를 두 번 미분하자.
$f'(x)=(x^2-4x)e^x,\ f''(x)=(x^2-2x-4)e^x$
이므로 $f''(x)<0$ 을 만족시키는 x 의 범위는
$x^2-2x-4<0$ 을 만족시키는 x 의 범위와 같다.
$x^2-2x-4<0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{5}<x<1+\sqrt{5}$
에서 위로 볼록한 구간에 속하는 정수는
$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이다.
따라서 정수 x 의 개수는 5이다.

16.
주머니에 들어 있는 7개의 공 중 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 $p={}_7C_3=35$ 이다.
$1+1+2=4$ 인 경우는 1의 숫자가 적혀 있는 공을 2개, 2의 숫자가 적혀 있는 공을 1개 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_2\times{}_3C_1=9$ 이다. $0+2+2=4$ 인 경우는 0의 숫자가 적혀 있는 공을 1개, 2의 숫자가 적혀 있는 공을 2개 뽑는 경우의 수와 같으므로 $1\times{}_3C_2=3$ 이다.
따라서 $n(A)=q=9+3=12$ 이다. 이때, ㉠을 만족시키는 경우의 수는 $1\times{}_3C_2=3$ 이므로 $n(A\cap B)=r=3$ 이다.
그러므로 $p+q+r=35+12+3=50$ 이다.

17.
직선 PQ의 기울기는 $\frac{3}{a-(a-2)}=\frac{3}{2}$ 이고, 직선 OP의 기울기는 $\frac{3}{a}$ 이다. 삼각함수의 덧셈정리에 의하여 $\tan\theta=\frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{a}}{1+\frac{3}{2}\times\frac{3}{a}}=\frac{3}{5}$ 에서
$\frac{3a-6}{2a+9}=\frac{3}{5} \Leftrightarrow a=\frac{19}{3}$ 이다.

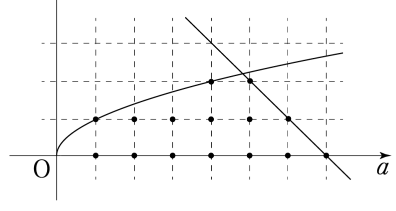
18.
점 A_2의 좌표를 $(x,\ y)$라 하자.
$\overrightarrow{A_1A_2}=(-3,\ 2)$이므로
점 A_1의 좌표는 $(x+3,\ y-2)$이다. 이 점은
제1사분면 위의 점이므로 $x>-3$, $y>2$이다.
$\overrightarrow{A_2A_3}=(1,\ -4)$이므로
점 A_3의 좌표는 $(x+1,\ y-4)$이다. 이 점은
제3사분면 위의 점이므로 $x<-1$, $y<4$이다.
이를 종합하면 $-3<x<-1$, $2<y<4$이므로
정수 x, y의 값은 각각 -2, 3이다.
따라서 답은 -6이다.

19.
ㄱ. $f'(x)=2ax+1+(x-1)e^{-x}$에서 $f'(0)=0$이다. (O)
ㄴ. ㄱ에서 $f'(0)=0$임을 구했다. $a=1$일 때,
$f(x)=x^2+x-xe^{-x}$에서
$f'(x)=2x+1+(x-1)e^{-x}$이고,
$f''(x)=2+(2-x)e^{-x}$이다.
$f'(0)=0$인데, $f''(0)=4>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이다. (O)
ㄷ. $f'(x)=2ax+1-(1-x)e^{-x}=0 \Leftrightarrow$
$2ax+1=(1-x)e^{-x}$에서 방정식 $f'(x)=0$을 만족시키는 x는 직선 $y=2ax+1$와
곡선 $y=g(x)=(1-x)e^{-x}$의 교점의 x좌표와 같다.
곡선 $y=g(x)$를 그려 보면 다음과 같다.



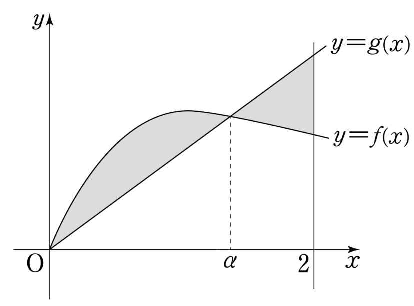
함수 $y=g(x)$의 그래프의 y절편이 1이므로
직선 $y=2ax+1$과 함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $(0,\ 1)$이다.
이때 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 $x=0$을 근으로 가지므로 양의 실근을 갖거나 음의 실근을 가져야 하고 이 실근을 α $(\alpha\neq0)$라 할 때, $x=\alpha$에서 $f'(x)$의 부호 변화가 있어야 한다. 따라서 직선 $y=2ax+1$의 기울기가 $g'(0)$보다는 크고 0보다는 작거나 $g'(0)$보다 작아야 한다. $g'(0)=-2$이므로 a의 값의 범위는
$a<-1$ 또는 $-1<a<0$이다. (X)

20.
[7번 이하로 게임이 종료될 확률]
$=1-$[8번째 시행을 할 수 있을 확률, 즉 7번째 시행까지도 $b\leq\sqrt{a}$를 만족시킬 확률]이다. 이를 ab평면 위에 나타내면 다음과 같다.



7번의 시행 후 점 $(a,\ b)$는 총 7칸을 이동하여 직선 $a+b=7$ 위에 있다. 그래프 상에 표시된 세 개의 점 $(5,\ 2)$, $(6,\ 1)$, $(7,\ 0)$은 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b=7$이며 $b\leq\sqrt{a}$를 만족시키는 점들이다.
7칸을 이동한 하나의 경로를 따를 확률은 $\frac{1}{2^7}$로 일정하므로
[그래프 상에 표시된 세 개의 점 $(5,2)$, $(6,1)$, $(7,0)$으로 이동하는 경로의 수]$\times\frac{1}{2^7}$
$=$[8번째 시행을 할 수 있을 확률, 즉 7번째 시행까지도 $b\leq\sqrt{a}$를 만족시킬 확률]이다.
[그래프 상에 표시된 세 개의 점 $(5,2)$, $(6,1)$, $(7,0)$으로 이동하는 경로의 수]$=16$
($\because$ $(5,\ 2)$로 이동하는 경로의 수는 9,
$(6,\ 1)$로 이동하는 경로의 수는 6,
$(7,\ 0)$으로 이동하는 경로의 수는 1이다.)
이므로
[7번 이하로 게임이 종료될 확률]$=1-\frac{16}{2^7}=\frac{7}{8}$이다.

21.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 α라 하자.



위 그림에서
$a-b=\int_0^2\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^2\left(\frac{2x}{x^2+1}-mx\right)dx$
$=\left[\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}mx^2\right]_0^2=\ln5-2m$이다.
$a+b=3m-\ln5$이므로 두 식을 연립하면
$a=\frac{m}{2}$ $\cdots$ ㉠
이다. 이때, a의 값은
$\int_0^\alpha\{f(x)-g(x)\}dx=\left[\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}mx^2\right]_0^\alpha$
$=\ln(\alpha^2+1)-\frac{1}{2}m\alpha^2$
이다. 한편 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 α이므로
$f(\alpha)=g(\alpha) \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}=m\alpha$ 에서
$\alpha^2+1=\frac{2}{m}$이다. 따라서
$a=\ln(\alpha^2+1)-\frac{1}{2}m\alpha^2=\ln\frac{2}{m}-\frac{1}{2}m\left(\frac{2}{m}-1\right)$
$=\ln\frac{2}{m}-1+\frac{m}{2}$ $\cdots$ ㉡ 이다. m에 대해서 나타내면 다음과 같다. ㉠에서 $a=\frac{m}{2}$이었으므로 ㉡과 연립하면
$\ln\frac{2}{m}-1+\frac{m}{2}=\frac{m}{2} \Leftrightarrow m=\frac{2}{e}$이다.

22.
$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}\times5=5$

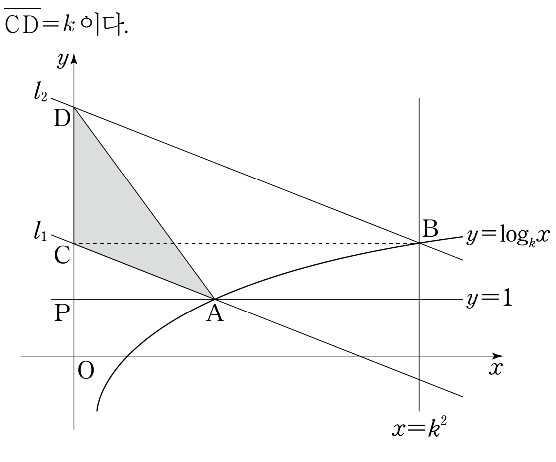
23.
${}_7C_n\times(2x^3)^n\times\left(\frac{1}{x}\right)^{7-n}={}_7C_n\times2^n\times x^{4n-7}$이다.
$4n-7=1$이므로 x의 계수는 $n=2$일 때이며
${}_7C_2\times2^2=21\times2^2=84$이다.

24.
서로 다른 종류의 볼펜 5개를 두 사람 A, B에게 남김없이 나누어 주는 방법의 수는 ${}_2\Pi_5=32$이다.

25.
$\int_1^x f(t)dt=\frac{1}{x}+ax-12$에서 $x=1$을 대입하면
$0=1+a-12 \Leftrightarrow a=11$이다.
$\int_1^x f(t)dt=\frac{1}{x}+11x-12$의 양 변을 x에 대하여
미분하면 $f(x)=-\frac{1}{x^2}+11$이므로 $f(1)=10$이다.

26.
우선 전체 경우의 수를 구하면 서로 다른 5개의 수 중 4개의 수를 택하여 나열하는 경우의 수이므로
${}_5P_4=120$이다.
주어진 조건에서 백의 자리의 수가 2개의 조건으로 맞물려 있으므로 백의 자리의 수를 짝수와 홀수로 분류하여 구해 보자.
i) 백의 자리의 수가 짝수일 때,
천의 자리의 수가 어떤 수가 오든지 천의 자리의 수와 백의 자리의 수의 곱은 짝수이고,
백의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합이 홀수가 되려면 일의 자리의 수는 홀수이어야 한다.
백의 자리의 수를 선택하는 경우의 수 : ${}_2C_1$
일의 자리의 수를 선택하는 경우의 수 : ${}_3C_1$
나머지 자리의 수들(천의 자리와 십의 자리)을 선택하는 경우의 수 : ${}_3P_2$
따라서 ${}_2C_1\times{}_3C_1\times{}_3P_2=36$
ii) 백의 자리의 수가 홀수일 때,
천의 자리의 수는 짝수이어야 하고, 백의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합이 홀수가 되려면 일의 자리의 수는 짝수이어야 한다.
천의 자리의 수와 일의 자리의 수를 선택하는 경우의 수 : ${}_2P_2$
백의 자리의 수를 선택하는 경우의 수 : ${}_3C_1$
나머지 자리의 수(십의 자리)를 선택하는 경우의 수 : ${}_2C_1$
따라서 ${}_2P_2\times{}_3C_1\times{}_2C_1=12$
그러므로 주어진 조건을 만족시킬 확률은
$\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$이다.
$p=\frac{2}{5}$이므로 답은 16이다.

27.
점 $(0,\ 1)$을 P라 할 때, $\frac{1}{k}=\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}}$, $\overline{PA}=k$이므로
$\overline{PC}=1$이다. 따라서 점 C의 좌표는 $(0,\ 2)$이다. 점 B의 좌표는 $(k^2,\ 2)$이므로 점 B에서 y축에 내린 수선의 발은 $C(2,\ 0)$이다. $\frac{1}{k}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}$, $\overline{CB}=k^2$이므로
$\overline{CD}=k$이다.



삼각형 ACD 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{PA}}=\frac{1}{2}\times k\times k=\frac{k^2}{2}$ 이다. $S(k)=\frac{k^2}{2}$ 이므로

$\sum_{k=2}^{10}\frac{k^2}{2}=192$ 이다.

28.

두 선분의 길이의 차가 항상 상수 k 로 일정하므로 점 P 가 나타내는 도형은 쌍곡선이다.

이때, 점 P 의 x 좌표 중 양수인 것의 최솟값이 3 이고, 음수인 것의 최댓값이 -1 이므로 중심이 원점이고, 두 초점이 x 축 위에 있는 쌍곡선 $\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=1$ 이 x 축의 양의 방향으로 1 만큼 평행이동된 쌍곡선과 같다.

따라서 점 P 가 나타내는 쌍곡선의 방정식은 다음과 같다.

$\frac{(x-1)^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=1$

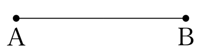
한편, 주축의 길이는 $3-(-1)=4$ 이므로 $p^2=4$ 이다.

또, 두 초점 A, B 사이의 거리가 $(a+6)-a=6$ 이므로 $p^2+q^2=\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$ 에서 $q^2=5$ 이다. 따라서

$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 에서 주축의 길이인 k 의 값은 $k=4$ 이고, 이 쌍곡선의 초점은 각각 $(-2,\ 0)$, $(4,\ 0)$ 이므로 $a=-2$ 이다. 따라서 $a^2+k^2=20$ 이다.

29.

선분 AB 가 있다.



(가) 조건 $(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ 을 통해 점 P 의 위치를 파악해 보자.

직선 AB 에 대하여 점 P 에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

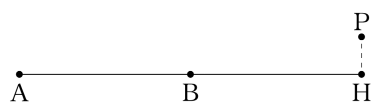
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-2\overrightarrow{\mathrm{BH}}-\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ 이다.

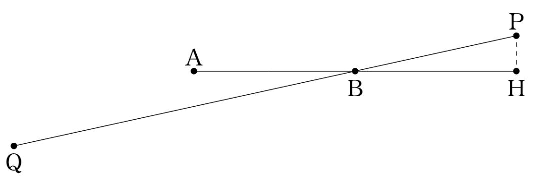
$(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-2\overrightarrow{\mathrm{BH}}-\overrightarrow{\mathrm{HP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ 에서 $\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=2\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ 이다.

즉, 선분 AH 의 중점은 B 이다.



또, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ 이므로 점 Q 의 위치는 다음과 같다.

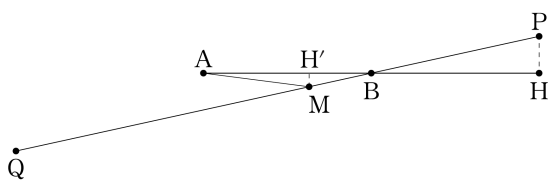


$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ 에서 $\overline{\mathrm{PB}}=3m$ 이라 하면 $\overline{\mathrm{BQ}}=5m$ 이다.

편의상 $\overline{\mathrm{BH}}=3a$, $\overline{\mathrm{PH}}=3b$ 라 하자.

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=4$ 이므로 선분 PQ 의 중점을 M 이라 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|=2$ 이다.

점 M 에서 선분 AH 에 내린 수선의 발을 H′ 이라 할 때, $\overline{\mathrm{BM}}=m$ 이므로 $\overline{\mathrm{BH'}}=a$, $\overline{\mathrm{MH'}}=b$ 이다.



또, 직각삼각형 AMH′ 에서 $\overline{\mathrm{AM}}=2$, $\overline{\mathrm{AH'}}=2a$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여 $4a^2+b^2=4$ ⋯ ㉠ 이다.

한편, 선분 AQ의 길이가 5 이므로 점 Q 에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을 H″ 이라 하면 $\overline{\mathrm{BH''}}=5a$

($\because$ $\overline{\mathrm{BQ}}=5m$, $\overline{\mathrm{QH''}}=5b$) 이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AH''}}=2a$ 이다.

직각삼각형 QAH″ 에서 피타고라스 정리에 의하여

$25=4a^2+25b^2$ ⋯ ㉡ 이다. ㉠, ㉡ 을 연립하면

$a=\frac{5}{8}\sqrt{2}$ 를 얻는다. 이때, 선분 AB 의 길이는

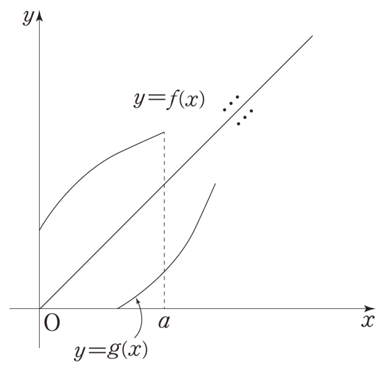
$3a$ 이므로 $l=3a=\frac{15}{8}\sqrt{2}$ 이다. 따라서 답은 225 이다.

30.

$f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x^3+27x+36}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $f'(x)=\frac{x^2+9}{2\sqrt{x^3+27x+36}}$ 이고,

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프의 일부는 다음과 같다.



한편, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 서로 역함수 관계이므로 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$ 이다.

(다)조건의 식 $f(g(x)+b)=x+c$ 에서 양변에 g 를 취하면 $g(x)+b=g(x+c)$ 이다.

이때 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 $f(x+b)=f(x)+c$ 이다.

[별해] $f(g(x)+b)=x+c$ 에서 x 에 $f(x)$ 를 대입하면 $f(x+b)=f(x)+c$ 이다.

한편, (나)조건에 의하여

열린 구간 $(a,\ b)$ 에서 두 점 $(x,\ f(x))$, $(f(x),\ x)$ 사이의 거리는 일정하게 감소하는데,

두 점 $(x,\ f(x))$, $(f(x),\ x)$ 사이의 거리는 점 $(x,\ f(x))$ 과 직선 $y=x$ 사이의 거리의 2 배이다.

즉, 열린 구간 $(a,\ b)$ 에서 함수 $y=2\times\frac{|x-f(x)|}{\sqrt{2}}$ 가 일정하게 감소한다는 의미이므로

열린 구간 $(a,\ b)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선의 일부이어야 한다.

함수 $f(x)$ 는 미분가능하므로

$f'(0)=f'(a)=f'(b)$ 를 만족시켜야한다.

$0\le x\le a$ 일 때, $f'(x)=\frac{x^2+9}{2\sqrt{x^3+27x+36}}$ 에서

$f'(0)=\frac{3}{4}=\frac{a^2+9}{2\sqrt{a^3+27a+36}}$ 이고, 식을 정리하면,

$2(a^2+9)=3\sqrt{a^3+27a+36}$ 에서

$a(a-3)(4a^2+3a+81)=0$ 이므로 $a=3$ 이다.

이때 구간 $(3,\ b)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이고,

$f(3)=4$ 이므로

구간 $[3,\ b]$ 에서 $f(x)=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$ 이다.

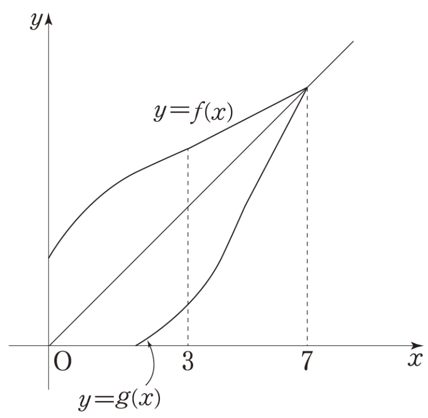
한편, 열린 구간 $(3,\ b)$ 에서 두 점 $(t,\ f(t))$, $(f(t),\ t)$ 사이의 거리가 일정하게 감소하는데,

$f(3)=4>3$, 기울기는 $\frac{3}{4}<1$ 임에 유의한다.

즉, 직선 $y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{3}$ 은 $x=7$ 일 때 직선 $y=x$ 와 만나게 되어 실수 $t\ (t>3)$ 의 값이 일정하게 증가할 때, 두 점 $\left(t,\ \frac{3}{4}t+\frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{3}{4}t+\frac{7}{3},\ t\right)$ 사이의 거리는 일정하게 감소하다가 일정하게 증가하게 된다.

그러므로 실수 b 의 최댓값은 7 이다.

따라서 열린 구간 $(0,\ b)$ 에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

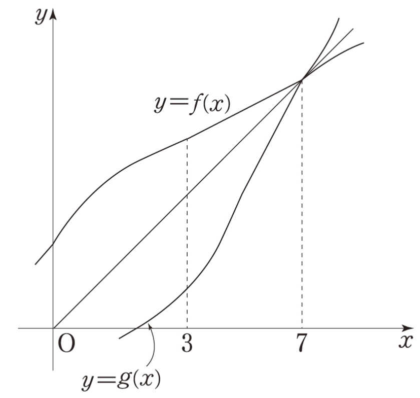


실수 b 가 최대일 때, 함수 $f(x)$ 는

$f(x+7)=f(x)+c$ 을 만족하고,

$f(0)=2$, $f(7)=7$ 이므로 $c=f(7)-f(0)=5$ 이다.

따라서 함수 $g(x)$ 는 $g(x+5)=g(x)+7$ 을 만족시키며, $g'(x+5)=g'(x)$ 이다.



이때, $2\le x\le 4$ 에서 함수 $g(x)$ 는 ‘함수 $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x^3+27x+36}$ 의 역함수’이고,

$4\le x\le 7$ 에서 $g(x)=\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}$ 이다.

나머지 구간($7\le x\le 9$, $9\le x\le 12$, ⋯)에서는 위의 그림처럼 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 $2\le x\le 7$ 에서의 함수 $g(x)$ 의 그래프를 평행이동한 것과 같다.

함수 $g'(x)$ 의 주기는 5 이므로

$\sum_{n=1}^{45}g'\left(\frac{5}{3}n+1\right)$ 의 값은

$g'\left(\frac{8}{3}\right)+g'\left(\frac{13}{3}\right)+g'(6)+g'\left(\frac{23}{3}\right)+g'\left(\frac{28}{3}\right)$

$+g'(11)+\cdots+$ (마지막항)

$=\left\{g'\left(\frac{8}{3}\right)+g'\left(\frac{13}{3}\right)+g'(6)\right\}$

$+\left\{g'\left(\frac{8}{3}+5\right)+g'\left(\frac{13}{3}+5\right)+g'(6+5)\right\}$

$+\cdots+$ (마지막항)

$=15\times\left\{g'\left(\frac{8}{3}\right)+g'\left(\frac{13}{3}\right)+g'(6)\right\}$ 이다.

역함수의 미분법에 의하여 $g'(f(x))\times f'(x)=1$ 에서

$g'\left(\frac{8}{3}\right)$ 의 값은 $f(k)=\frac{8}{3}$ 을 만족시키는 실수 k 에 대하여 $\frac{1}{f'(k)}$ 의 값과 같다.

$f(k)=\frac{1}{3}\sqrt{k^3+27k+36}=\frac{8}{3}$ 을 정리하면,

$k^3+27k-28=0$ 에서 $(k-1)(k^2+k+28)$ 이므로

$k=1$ 이다. 따라서 $g'\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{8}{5}$ 이다.

한편, $4<\frac{13}{3}<7$, $4<6<7$ 이므로

$g'\left(\frac{13}{3}\right)=g'(6)=\frac{4}{3}$ 이다.

그러므로

$\sum_{n=1}^{45}g'\left(\frac{5}{3}n+1\right)=15\times\left\{g'\left(\frac{8}{3}\right)+g'\left(\frac{13}{3}\right)+g'(6)\right\}$

$=15\times\left(\frac{8}{5}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)=64$ 이다.